

# LENTE GRAVITACIONALES



# Lentes Gravitacionales: Simulaciones sencillas y ejemplos numéricos

## Resumen

En esta unidad se pretende aproximar a los alumnos al concepto de lentes gravitacionales mediante una pequeña introducción teórica, algunas actividades sencillas que permiten simular sus efectos y ejemplos numéricos con datos reales.

## Contenidos:

Como actúan las lentes gravitacionales  
Algunos ejemplos de observación  
Cuásares Múltiples  
Anillos de Einstein  
Arcos luminosos gigantes

## Actividades

Simulación de la curvatura del espacio con un pedazo de tela  
Simulación de la lente gravitacional con copa de vino  
Simulación de la lente gravitacional con un pie de copa

## Desarrollo geométrico

Ángulo de desviación según la teoría de Newton  
Ángulo de desviación según la teoría de Einstein  
Ejemplos numéricos  
Ejemplo1: Repitiendo el cálculo del eclipse solar de 1919  
Ejemplo2: Primer planeta extrapolar detectado por "microlensing"

## Material adicional

## Nivel:

Segundo ciclo de ESO y Bachillerato

## Referencia:

1st ESO-EAAE Astronomy Summer School  
<http://www.eaae-astro.org>, <http://www.eaae-astronomy.org>  
<http://www.csic.es/astrosecundaria>

## Autores:

Rosa M. Ros Ferré (Universidad Politécnica de Cataluña)

## Coordinadora apuntes pedagógicos "Con A de Astrónomas":

Josefina F. Ling (Universidad de Santiago)

## Ayudantes de maquetación y traducción:

Surinye Olarte Vives, Alejandra Díaz Bouza



Ella es una Astrónoma



# LENTE GRAVITACIONALES:

## SIMULACIONES SENCILLAS Y EJEMPLOS NUMÉRICOS

### Resumen

Einstein predijo que una estrella situada en un primer plano podría magnificar la imagen de una estrella del fondo estelar. Pero era escéptico respecto a que esta ilusión pudiera ser vista jamás. Lo consideró demasiado improbable como para tener un interés práctico. No fue hasta 1979 que los astrónomos vieron realmente la evidencia de las lentes gravitacionales. El estudio de estas lentes puede ser considerado todavía como una joven ciencia observacional.

Este trabajo presente un conjunto de actividades sencillas que permiten simular los efectos de las lentes gravitacionales y algunos ejemplos numéricos con datos reales.

### Como actúan las lentes gravitacionales

La luz siempre sigue el camino más corto posible entre dos puntos. Pero si una masa está presente, el espacio se curva, y entonces el camino más corto posible es una curva como se puede ver en la figuras 1a y 1b. Esta idea no es difícil para los estudiantes. Realmente podemos mostrárselo sobre un globo terrestre. Evidentemente ellos pueden entender que sobre la superficie de la Tierra las distancias entre dos puntos son siempre según una curva.



Figuras 1: Si el espacio es curvo, el camino más corto entre dos puntos es una curva

En general, podemos imaginar las lentes gravitacionales como una lente ordinaria, pero en este caso la desviación de la luz producida por la masa substituye el fenómeno de la refracción de las lentes. La más importante diferencia es que una lente convexa ordinaria tiene un punto focal bien definido y una lente gravitacional no.

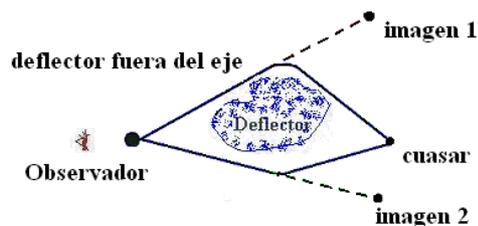
- **Para una lente convexa ordinaria**, la luz próxima al borde de la lente es desviada más que la luz próxima al eje óptico. Así la lente enfoca los rayos paralelos en un punto: el foco (figura 2a).
- **Para una lente gravitacional**, la luz próxima el borde es desviada menos que la luz cerca del centro. Entonces, la lente enfoca la luz en una línea próxima a un punto (figura 2b). Este hecho introduce diversas distorsiones en las imágenes que se muestran seguidamente.



Figuras 2a y 2b. Las lentes convexas convencionales enfocan los rayos paralelos de luz hacia un punto: el foco. Las lentes gravitacionales enfocan la luz en una línea en lugar de un punto

Esencialmente las lentes gravitacionales producen una curvatura en los rayos de luz. En consecuencia los objetos parecen estar en un lugar diferente y aparecen magnificados. Como no son lentes perfectas, ya que no tienen un foco puntual, las imágenes que producen están deformadas. Pueden generar arcos brillantes o imágenes múltiples de un objeto. A continuación se clasifican algunos de estos fenómenos.

- **Cambio de posición.** La desviación da lugar a una aparente localización de la estrella, galaxia o cuasar en el cielo. (figura 3)



Figuras 3. Las lentes gravitacionales cambian la situación aparente de la estrella, galaxia o cuasar

- **Magnificación.** Para una lente normal, la desviación y el enfoque de los rayos de luz afecta el brillo aparente de la estrella o del cuasar del fondo de cielo. Algunos observadores han medido ampliaciones de más de 100 veces. Realmente el deflector actúa como un lente normal.
- **Deformación.** Si la luz del cuerpo desviado es un cúmulo u otro objeto no puntual, las imágenes obtenidas son un conjunto de los arcos del brillo que parecen casi-círculos con más o menos el mismo centro. Si el sistema de lente es perfectamente simétrico, los rayos convergen y la imagen resultante es un anillo (figura 4). Si la luz del cuerpo desviado es

una estrella o una fuente puntual, las imágenes obtenidas permanecen como puntos.

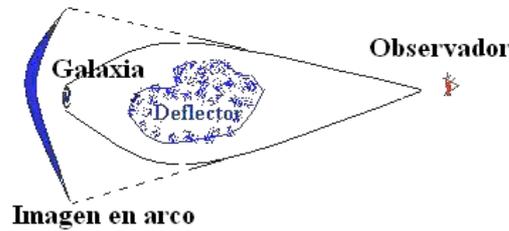


Figura 4: Si el cuerpo desviado es un objeto extendido, las imágenes obtenidas son un conjunto de arcos brillantes que parecen casi-círculos con más o menos el mismo centro. Si el sistema de lente es perfectamente simétrico, los rayos convergen y la imagen resultante es un anillo.

- **Multiplicación.** Cuando las lentes gravitacionales no son perfectas, las más fuertes pueden producir imágenes múltiples. (figura 5).



Figura 5. Como las lentes gravitacionales no son perfectas, las más fuertes pueden producir imágenes múltiples.

Algunos de estos efectos pueden repetirse con una simulación. A modo de ejemplo incluimos algunas direcciones web en las referencias finales.

### Algunos ejemplos de observación

- **Cuásares Múltiples.** En 1979 Walsh descubrió el doble cuásar Q0957+561, un doble par de cuásares casi idénticos uno cerca del otro en el cielo. Era prácticamente imposible que fuera una coincidencia. Actualmente, todavía se hacen estas clases de descubrimientos y ellos son la clara prueba de la existencia de lentes gravitacionales. Incluso, hay algunos cuásares que muestran cuatro imágenes y la original (foto 6a).



Figuras 6a Cuásar Múltiple, b Anillo de Einstein, c Arcos luminosos gigantes

- **Anillos de Einstein.** Cuando la galaxia que actúa de lente es esféricamente simétrica, se redistribuye la luz de un cuásar o una galaxia del fondo en un círculo completo. El diámetro del anillo es proporcional a la raíz cuadrada de la masa de deflector. Este es un nuevo método posible para determinar la masa de la galaxia que actúa de lente. En el caso de la foto 6b, la alineación es tan precisa que la galaxia lejana es distorsionada en un anillo gigantesco casi perfecto alrededor de la galaxia próxima, una formación conocida como un anillo de Einstein. El pico brillante en el centro del ojo de buey es la galaxia más cercana (foto 6b).
- **Arcos luminosos gigantes.** Si la lente no es una galaxia sino un grupo entero de galaxias, la imagen puede ser un calidoscopio de arcos y fragmentos de arcos totalmente distorsionados. El grupo es tan masivo y tan compacto que curva y enfoca la luz de galaxias están detrás. Como resultado, múltiples imágenes de estas galaxias del fondo son distorsionadas en débiles segmentos de arcos. Basado en estas imágenes, los astrónomos procuran reconstruir la distribución masiva dentro del cúmulo. Los resultados implican que los cúmulos están dominados por materia oscura no detectada (foto 6c)).

## Actividades

### **Actividad 1. Simulación de la curvatura del espacio con un pedazo de tela**

Es muy sencillo simular la curvatura del espacio determinada por un agujero negro usando un pedazo de tejido y colocando una pelota pesada en el centro. Si lanzamos una pelota más ligera, su trayectoria seguirá una curva en el espacio simulando la trayectoria del rayo de luz que no sigue una línea recta sino que sigue una curva (figura 7). El grado de esta desviación depende de cuan cerca pase el rayo de luz del cuerpo central y de cuan masivo sea éste. El ángulo de desviación es directamente proporcional a la masa e inversamente proporcional a la distancia como se deducirá en el apartado titulado “aproximación geométrica”.

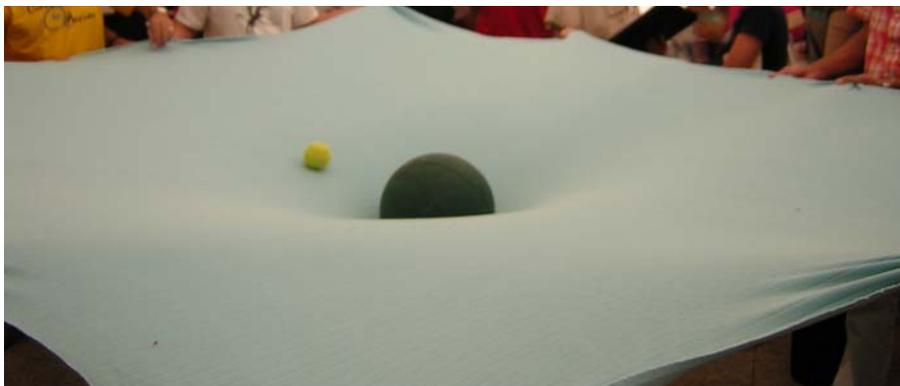


Figura 7. La trayectoria no es en línea recta sino siguiendo una curva.

## Actividad 2. Simulación de lente gravitacional con copa de vino.

Podemos simular una lente gravitacional utilizando una copa de vino. Por supuesto una copa de vino no es una lente gravitacional, pero es el modelo sencillo que permite "mostrar como la materia" puede introducir deformaciones en las imágenes observadas.

Es fácil comprobar que esta simulación da lugar a la "deformación del espacio". Basta situar la copa sobre "papel milimetrado" y observar a través de vino blanco (o algún zumo amarillento), podemos ver esta deformación (figura 8a).

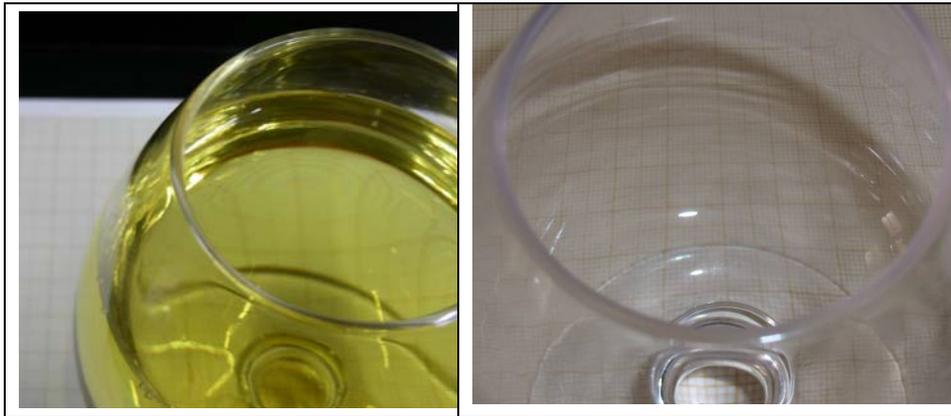


Figura 8. Si ponemos la copa sobre "papel milimetrado" y observamos a través del vino, podemos ver esta deformación. No se observa deformación si la copa colocada sobre el papel milimetrado está vacía.

Veamos ahora como simular el anillo de Einstein o la multiplicidad de imágenes. Es suficiente tomar una linterna que produce "un rayo de la luz". Situando la linterna al otro lado de la copa de vino tinto para que el rayo de la luz pase a través de ella.

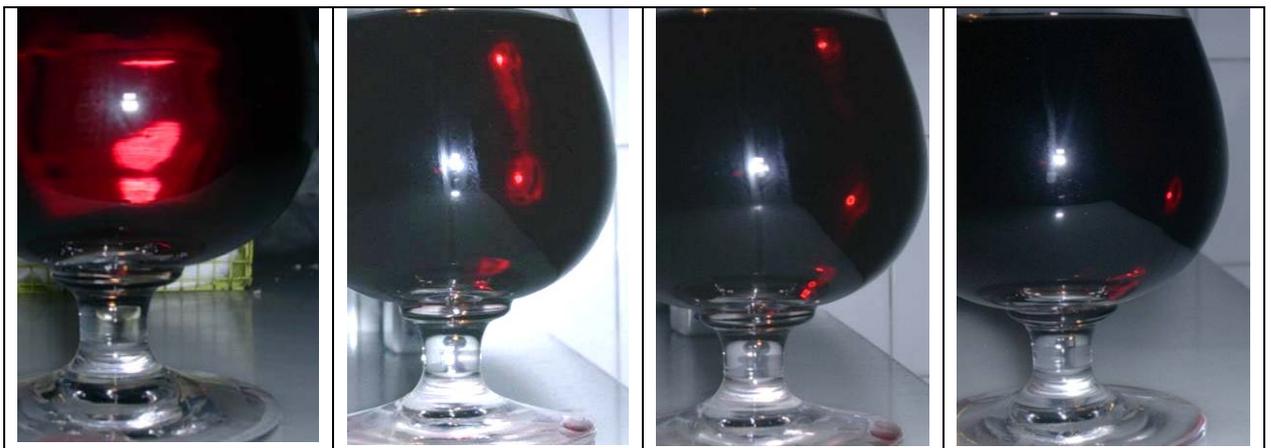


Figura 9: La luz de la linterna esta deformada en una "forma amorfa", en un arco entre los puntos brillantes rojos, en 4 ó 5 puntos rojos brillantes o sólo en un punto.

Si observamos la luz, podemos verla y moverla de derecha a izquierda y de arriba a abajo. Observamos que la luz produce imágenes repetidas y en algunos casos algunos arcos. Esto es a consecuencia de que la copa actúa como un lente que "deforma" el espacio. En particular podemos observar a veces un "forma amorfa rara", o un punto rojo brillante, cuatro puntos rojos o un arco entre los puntos rojos (figuras 9).

### Actividad 3. Simulación de lente gravitacional con un pie de copa.

Podemos simular la lente mirando a través del "pie de una copa". Este es un objeto fácil de conseguir, basta con cortar el pie de una copa. Si ponemos "el pie de copa" sobre "un papel milimetrado" y observamos a través de él, podemos ver esta deformación (Figura 10).

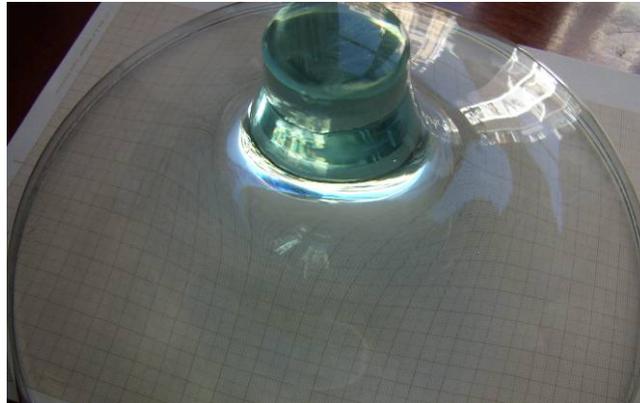


Figura 10. El "pie de copa" sobre una hoja de papel milimetrado muestra la deformación.

Moviendo lentamente de derecha a izquierda el "pie de la copa" sobre un objeto, un círculo rojo, iremos reproduciendo los diferentes objetos reales observados



Figuras 11. El "pie de copa" es un simulador de diversos objetos: segmentos de arco, imágenes de puntos y anillos de Einstein

## Desarrollo geométrico

### Ángulo de desviación según la teoría de Newton

Consideramos un fotón que pasa cerca del deflector de masa  $M$  y sea  $v_p$  la componente perpendicular (a la trayectoria original) de la velocidad del fotón ( $v_p$  no es la velocidad total del fotón). Asumimos que la masa de fotón es el  $m = 1$ , entonces la fuerza es igual a la aceleración

$$f = \frac{dv_p}{dt}$$

Según la teoría de Newton, con  $m = 1$ , la componente de la fuerza perpendicular a la trayectoria del fotón será, de acuerdo con la figura 2a.

$$f = \frac{GM}{r^2} \sin \theta$$

Igualando ambas relaciones,

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{GM}{r^2} \sin \theta$$

Si introducimos

$$r = \sqrt{x^2 + a^2} \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{a}{r}$$

por la geometría de la figura 2a, obtenemos

$$dv_p = GM \frac{a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dt$$

Como la desviación del fotón es pequeña, se tiene  $v_p \ll c$ , y como  $c = dx/dt$  y la integral verifica,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + a^2)^{-3/2} dx = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2}{a^2}$$

Después de sustituir e integrar, tenemos,

$$v_p = \frac{2GM}{ac}$$

Y obtenemos el "ángulo  $\alpha$  de desviación", según Newton,  $\alpha = v/c$

$$\alpha = \frac{2GM}{ac^2}$$

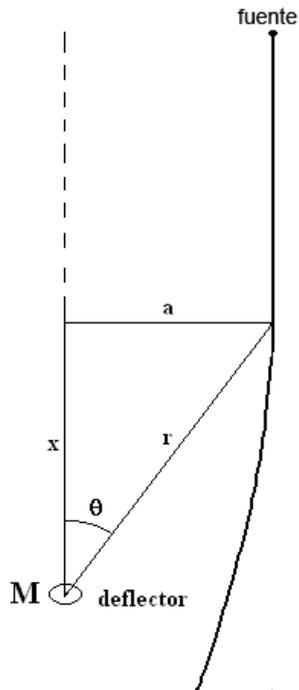


Figura 12a. Trayectoria del fotón próximo al deflector.

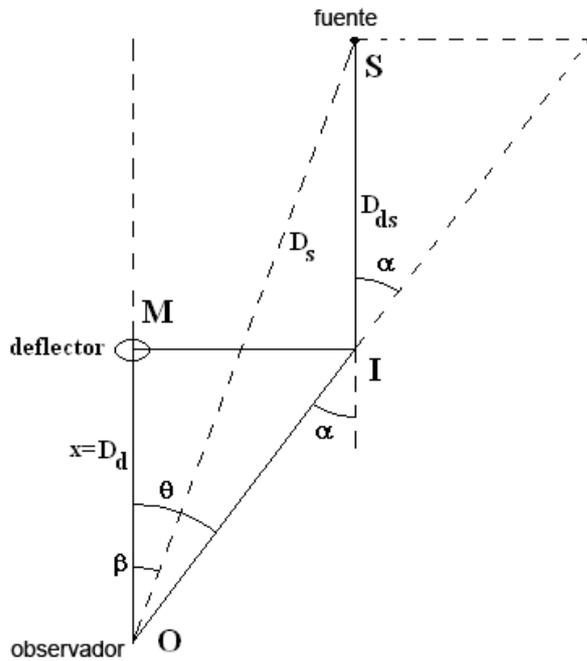


Figura 12b. Geometría del rayo de luz.

## Ángulo de desviación según la teoría de Einstein

En el caso relativista, la gravedad actúa sobre la componente espacial y también sobre la componente temporal, y el ángulo de desviación es el doble que en el caso clásico. Entonces, el ángulo de desviación en teoría de relatividad es:

$$\alpha = \frac{4GM}{ac^2}$$

El ángulo de desviación es directamente proporcional a la masa del deflector.

- **Ángulo de desviación característico  $\alpha_0$  y la posición  $\theta$  de la lente**

En la figura 2b, del triángulo OSI se deduce,

$$\frac{\sin(180-\alpha)}{D_s} = \frac{\sin(\theta-\beta)}{D_{ds}}$$

Se verifica

$$\sin(180-\alpha) = \sin \alpha$$

y para ángulos pequeños, aproximamos el seno a su ángulo, así deducimos

$$\beta = \theta - \frac{D_{ds}}{D_s} \alpha$$

Por la geometría del problema,  $\tan \theta = a/D_d$ , y teniendo en cuenta que  $\theta$  es muy pequeño,  $\theta \approx \tan \theta$ , y sustituyendo  $a=D_d \theta$  en la relación anterior y al expresión calculada para  $\alpha$  previamente se obtiene

$$\beta = \theta - \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_s D_d} \frac{1}{\theta}$$

Finalmente introduciendo el “ángulo característico de desviación”  $\alpha_0$  como un valor que solo depende de la masa del deflector y las distancias a la fuente y al deflector,

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_s D_d}}$$

Donde deducimos,

$$\theta = \frac{1}{2} \left( \beta \pm \sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2} \right)$$

Luego para cada  $\beta$  hay mas de un  $\theta$ . Resumiendo,  $\theta$  da la posición de la lente dependiendo de la posición real de la fuente  $\beta$  y  $\alpha_0$ .

- **Radio de Einstein**

Para el caso especial en que la fuente S este detrás de la lente o deflector ( $\beta = 0$  en figura 2b), debido a la simetría, se forma un anillo cuyo radio es llamado “Radio de Einstein  $\theta_E$ ”.

$$\theta_E = \alpha_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_s D_d}}$$

En el caso que la fuente S y la masa de deflector M está en la línea,  $\beta = 0$ , podemos observar arcos circulares alrededor de la masa de deflector. Es posible medir el radio de este círculo y si las distancias son conocidas es posible calcular la masa.

## Ejemplos Numéricos

### Ejemplo 1. Repitiendo el cálculo del eclipse solar de 1919

Según la teoría newtoniana de la gravedad, la fuerza de atracción del Sol podría doblar los rayos de luz de las estrellas lejanas y esta desviación debía ser de 0.875 segundos de arco. Según la teoría de la relatividad esta desviación es el doble. Arthur Eddington midió este efecto en 1,75 segundos de arco y confirmó la predicción de Einstein durante el eclipse solar de mayo de 1919 (figura 13).

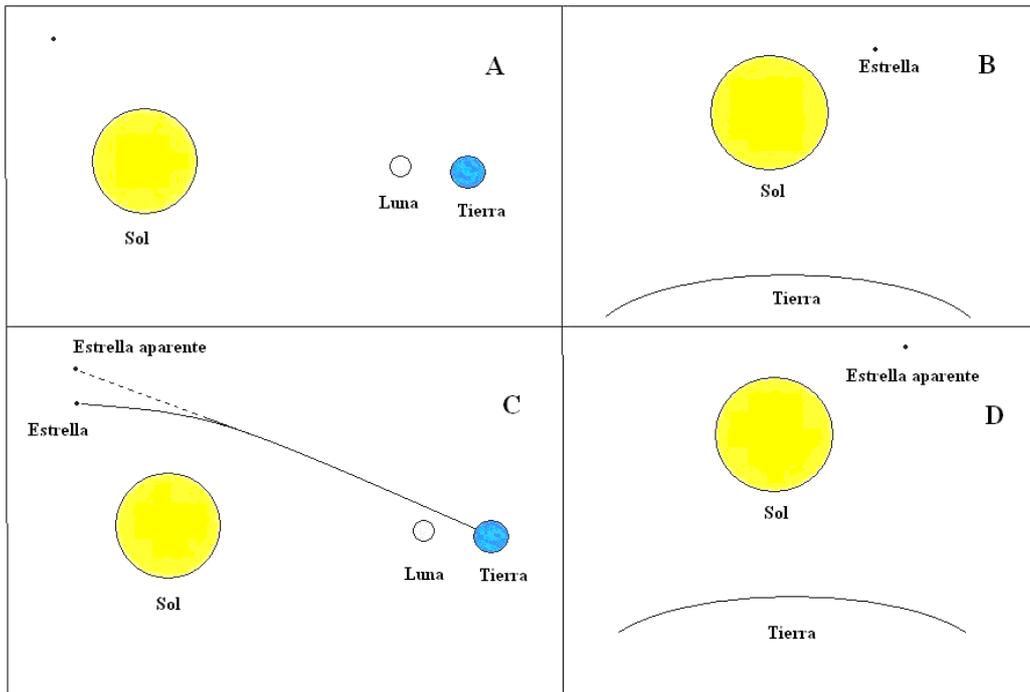


Figura 13: En la figura A se muestra una vista lateral del eclipse solar. En la B aparece una vista frontal desde la Tierra con una estrella a la derecha del Sol. Si se tiene en cuenta la predicción de Einstein en la vista lateral (figura C) la estrella parece estar más lejos del Sol que en su posición real. Para el observador desde la Tierra (figura D) la estrella parece estar aparentemente más alejada del Sol que en su posición real (figura B).

*Calculad los dos valores del ángulo de desviación (según Newton y Einstein) usando la gravitación universal constante  $G=6.67 \cdot 10^{-11}$  en el sistema de MKS, la velocidad de la luz  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s, masa solar  $M_S = 1.9891 \cdot 10^{30}$  kg y el radio solar  $R_S = 698000$  km.*

Resultados según Newton.  $\alpha = 0.004224 \times 10^{-3}$  radianes  $\times 2 \times 10^5$  segundos de arco = 0.84 segundos de arco (usando que 1 radian =  $2 \times 10^5$  segundos de arco)

Resultados según Einstein  $\alpha = 0.008448 \times 10^{-3}$  radianes  $\times 2 \times 10^5$  segundos de arco = 1.68 segundos de arco (usando que 1 radian =  $2 \times 10^5$  segundos de arco)

## Ejemplo 2. Primer planeta extrasolar detectado por "microlensing"

Por un período de cerca de una semana (del 17 al 21 de julio de 2003) la curva de luz del objeto "OGLE 2003-BLG-235/MOA 2003-BLG-53" sufrió una alteración que motivó que pareciera que correspondía a un sistema doble con una componente de sólo 0,4 % de la masa del componente más pesada, lo que implicaba que la componente más ligera debía ser un planeta (figura 4). El 15 de abril de 2004 dos equipos diferentes y por separado (los equipos OGLE y MOA) anunciaron el descubrimiento de un planeta fuera de nuestro sistema solar situado a 17000 años luz. La estrella del fondo estaba a 24000 años luz. La masa de la estrella era  $0.36 M_S$  y el radio de Einstein era de cerca de medio mili-arcosegundo. (El planeta descubierto era de unas 1,5 veces la masa de Júpiter y presumiblemente de tipo gaseoso. Dando vueltas a la estrella a 3 au, recordemos que Júpiter esta a 5,2 au del Sol).

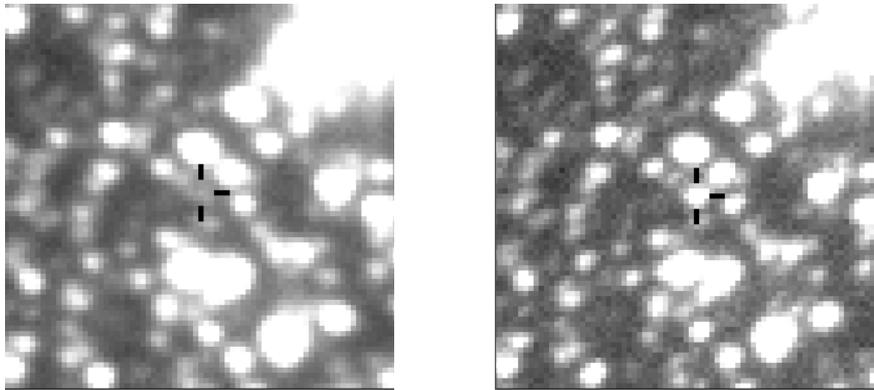


Figura 14. Cambios de brillo en una estrella producidos por una estrella invisible con su invisible planeta extrasolar OGLE 2003-BLG-235/MOA 2003-BLG-53 (sin aumentar (izquierda) aumentado (derecha)).

*Calculad el radio de Einstein  $\theta_E$  usando  $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ ,  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s,  $M = 0.36 M_S$ ,  $D_d = 17000$  a.l. y  $D_s = 24000$  a.l. En el caso de microlensing, asumiremos que  $a$  es muy pequeño si comparamos con las distancias  $D_{ds}$ ,  $D_d$ ,  $D_s$  y suponemos que en la práctica,  $D_s = D_d + D_{ds}$ . Finalmente verificad que el  $\theta_E$  obtenido es del orden de medio mili-arcosegundo.*

Entonces,  $D_{ds} = D_s - D_d = 22704 \cdot 10^{16} - 16084 \cdot 10^{16} = 6620 \cdot 10^{16}$  m

Y el radio de Einstein  $\theta_E = 0.2 \cdot 10^{-8}$  radianes. Si tenemos en cuenta que 1 radian  $= 2 \times 10^5 \theta_E = 0'' \cdot 4 \cdot 10^{-3}$  segundos de arco. Es decir medio milisegundo

Las lentes gravitacionales proporcionan un instrumento muy útil con que estudiar el Universo. Como "balanza", nos proporciona una medida de la masa del cuerpo que actúa de lente, y como "cristal de aumento", nos permite ver detalles en objetos que de otro modo estarían más allá del alcance de telescopios actuales.

## Material adicional

- R.M. Ros, Experiments and exercises involving gravitational lenses, *Proceedings 1st ESO-EAAE Astronomy Summer School*, Barcelona 2007
- R.M. Ros, Gravitational Lenses in the classroom, *Physics Education*, 43, Bristol, 2008
- R.M. Ros, What kind of astronomy should be taught at the beginning of the 21st century? *Proceedings of IAU 1st MEARIM Congress*, Cairo, 2008 (in press)
- Simulación de anillos de Einstein para galaxias simétricas esféricas. Semejante al objeto real "A Bulls-Eye Einstein Ring".  
<http://www-ra.phys.utas.edu.au/~jlovell/simlens>
- Simulación de lentes gravitacionales con M33  
<http://leo.astronomy.cz/grlens/grl0.html> M33
- Simulación de la Cruz de Einstein. Semejante a la Cruz de Einstein (Q 2237+0305).  
<http://www.iam.ubc.ca/%7Enewbury/lenses/lensdemo/demo.ht>.