



VNIVERSITAT  
DE VALÈNCIA

EXPANSIÓN DE SN 1993J Y  
ASTROMETRÍA GLOBAL DE ALTA  
PRECISIÓN

Memoria presentada por

**Iván Martí Vidal**

bajo la dirección del Catedrático

**Juan María Marcaide Osoro**

para optar al título de

**Doctor en Ciencias Físicas**

Valencia, 29 de Abril de 2008

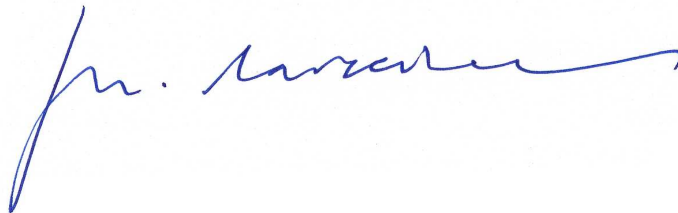


JUAN MARÍA MARCAIDE OSORO, Catedrático de Astronomía y Astrofísica de la Universitat de València – Estudi General,

### **CERTIFICA:**

Que la presente memoria, titulada **Expansión de SN 1993J y astrometría global de alta precisión**, ha sido realizada en el *Departament d'Astronomia i Astrofísica* de la *Universitat de València* por Iván Martí Vidal bajo mi dirección, y constituye su Tesis Doctoral para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Valencia, 29 de Abril de 2008



Fdo. Juan María Marcaide Osoro



A Diana, por su amor y paciencia.



# Agradecimientos

Más de cuatro años han pasado desde aquella vez que entré en el despacho de mi director de tesis, Jon Marcaide, como aspirante a *becario de la bicicleta* en mi último año de carrera. Un año antes, tuve el gran placer de tener a Jon como profesor de Técnicas Observacionales de Astronomía, asignatura que me marcó, no sólo por lo que aprendí, sino por la forma en que lo aprendí. Ya desde entonces, Jon me pareció un personaje singular en el entorno académico, como sigue pareciéndome ahora; siempre ha sido, y será, un placer aprender y trabajar con Jon, para quien el asombro y la curiosidad continuas son la huella dactilar de su mente.

Fue la belleza de contenidos de la última práctica de aquel curso de técnicas, *Reconstrucción de imágenes de VLBI con métodos de Fourier*, la que me llevaría finalmente a decidir llamar a su puerta, recién empezado quinto de carrera, con deseos de introducirme en el mundo de la Astronomía profesional trabajando en un grupo que ha investigado siempre en la cresta de la ola de VLBI. A Jon debo el haber podido investigar en dos grandes temas en los que la interferometría de muy larga base nos sitúa en la frontera misma del conocimiento. Y el placer con el que he investigado, aprendido y disfrutado durante estos años, junto con la satisfacción personal y la autorrealización que he sentido al ver acabado un buen trabajo, no tienen precio alguno. Gracias Jon.

No sería justo dejar de mencionar en estos agradecimientos a José Carlos Guirado (de la Universitat de València), Antxón Alberdi (del IAA, en Granada), Miguel Ángel Pérez-Torres (también del IAA) y Eduardo Ros (del MPIfR, en Bonn), con quienes ha sido un verdadero placer remangarse de vez en cuando la camisa para calibrar y reducir, con cariño y finura, los datos de SN 1993J y de la muestra S5. Las conversaciones de índole académica (y no tan académica) que tuve entre café y café con ellos y con Alberto Fernández y Sergio Jiménez (ambos de la Universitat de València), me ayudaron mucho a recargar las pilas tras las densas jornadas de peleas contra fases y clausuras. Gracias también a

todos vosotros.

Mis agradecimientos también a todos los que han preparado y hecho posibles las buenas acogidas que he tenido en los centros de investigación a los que he tenido la oportunidad de acudir como invitado, en estancias muy productivas, durante todos estos años. Gracias, de nuevo, a Antxón Alberdi, por lo bien que me hizo sentir como invitado en el IAA (Granada); a Alan Pedlar y Phil Diamond, por las ocasiones que me brindaron para trabajar con ellos en ese hermoso lugar que es Jodrell Bank (Inglaterra); a Anton Zensus y Eduardo Ros, por su invitación (y por la volcada atención de Eduardo, procurando que mi estancia y la de mi esposa fuera lo más agradable posible) en el instituto Max Planck de Radioastronomía, en Bonn (Alemania); a Mike Garrett, por su invitación a JIVE (Holanda), que fue la estancia más productiva (y divertida) de todas, así como a su secretaria, Ria Moraal, sin cuya inestimable ayuda con el soporte logístico nos hubiera sido mucho más difícil a Diana y a mí desenvolvernos por tierras holandesas; gracias también a Andreas Quirrenbach, por la buena acogida que tuvimos en el Observatorio de Heidelberg (Alemania), así como por la oportunidad que me brindó para formar parte de uno de sus proyectos de interferometría óptica.

Doy además mi agradecimiento a todas las instituciones responsables del instrumental utilizado durante la toma de los datos a los que refiere esta tesis, por su gran profesionalidad, su total disposición y su inestimable ayuda. En particular, doy las gracias al Observatorio Radioastronómico Nacional (NRAO), a la Agencia Nacional Aero-Espacial (NASA), ambas en Estados Unidos, y a la Red de VLBI en Europa (EVN). También doy las gracias al Ministerio de Ciencia y Tecnología por su ayuda económica.

Fuera de lo académico, también he recibido apoyo y compañía de buenos amigos. Gracias, Edén y Loli, por las horas que hemos disfrutado durante nuestros encuentros y las inolvidables cenas de fin de semana, en las que lo hemos pasado en grande hablando de temas un tanto *heterodoxos* de la ciencia. Gracias también al resto de amigos y colegas de la facultad, que me han ayudado a refrescarme la cabeza de vez en cuando con su compañía.

Y las últimas líneas de mis agradecimientos las reservo para quienes me han dado definitivamente más energía y apoyo para seguir adelante, hasta el final de esta maratón: mi familia. En especial, Diana, mi esposa, quien ha demostrado tener mucha paciencia conmigo, sobretodo por mis horarios laborales. *I a Rafa i la peludeta, que ja són l'única representació d'Alfarrasí que realment em queda.*



# Abstract

This thesis covers two very different topics: a complete study of the radio emission of supernova SN 1993J and the first wide-field astrometric analysis ever performed on a complete sample of radio sources (the S5 polar cap sample) by means of high-precision (differenced-phase-delay) VLBI astrometry.

In the first part of the thesis, we report on the analysis of all the available VLBI data of supernova SN 1993J. With new methods developed by us for accurate estimation of the size and width of the supernova radio-emitting shell-like region, we study the resulting supernova expansion at different frequencies. We find discrepancies between the sizes measured at 1.6 GHz and those measured at higher frequencies. These discrepancies increase with supernova age (we rule out that this is due to resolution effects). We are able to explain all the peculiarities of the supernova expansion with some corrections to the standard model of radio emission in supernovae. These corrections are a time-evolving opacity of the supernova ejecta and a radial dependence of the amplified magnetic fields in the radio shell. All these corrections (along with effects arising from the finite sensitivity of the VLBI interferometers) have been implemented into a new simulation program (*RAMSES*), capable of generating synthetic expansion curves and radio light curves, which are directly compared to observational results. We find excellent agreement between the *RAMSES* simulations and all the observations of SN 1993J.

In the second part of this thesis, we report on the first wide-field high-precision astrometric analysis of the 13 extragalactic radio sources of the complete S5 polar cap sample. This analysis has been carried out at 15.4 GHz for two epochs (1999.57 and 2000.46). Several upgrades of existing software were necessary for the implementation of this kind of astrometric analysis. We have thus created a new software package (*UVPAP*), capable of performing multi-source differenced-phase-delay astrometry. In this thesis, we describe the main characteristics of *UVPAP*. We also describe new algorithms developed to

enable the use of differenced phase delays in wide-field astrometric observations involving more than 2-3 sources and discuss the impact of using differenced phase delays on the precision of the global astrometry. From these fits, we obtain estimates of the relative source positions with precisions ranging from  $\sim 15$  to  $\sim 200 \mu\text{as}$  (for epoch 1999.57) and from  $\sim 20$  to  $\sim 700 \mu\text{as}$  (for epoch 2000.46), depending on the angular separation of the sources (from  $\sim 1.6$  to  $\sim 20.8$  degrees). These precisions are  $\sim 10$  times higher than those achievable using the conventional phase-reference technique.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Interferometría</b>	<b>3</b>
1.1. El límite de difracción . . . . .	3
1.2. Fundamentos de interferometría . . . . .	4
1.2.1. Respuesta de un interferómetro a una fuente puntual . . . . .	4
1.2.2. Fuentes extensas y plano u-v . . . . .	7
1.3. ¿Por qué utilizar un correlador? . . . . .	9
<b>2. Introducción a VLBI</b>	<b>13</b>
2.1. VLBI vs. interferometría conexa . . . . .	14
2.1.1. Ventajas e inconvenientes de VLBI . . . . .	14
2.2. Los observables de VLBI . . . . .	16
2.2.1. Fase interferométrica . . . . .	16
2.2.2. Retraso de fase y retraso de grupo . . . . .	17
2.2.3. <i>Fringe rate</i> y <i>delay rate</i> . . . . .	17
2.2.4. Clausuras de fase . . . . .	18
2.2.5. Clausuras de amplitud . . . . .	19
2.3. Calibrado de los datos de VLBI . . . . .	20
2.3.1. Ganancias de antena . . . . .	20
2.3.2. Calibrado de las fases . . . . .	20
2.3.3. Calibrado de las amplitudes . . . . .	22
<b>3. Supernovas y su radioemisión</b>	<b>23</b>
3.1. Tipos de supernova . . . . .	24
3.1.1. Supernovas de tipo I . . . . .	24
3.1.2. Supernovas de tipo II . . . . .	24
3.1.3. Supernovas tipo IIb (SN 1993J) . . . . .	28
3.2. Radioemisión de supernovas de tipo II, Ib, Ic (y IIb) . . . . .	29

3.2.1.	El modelo de Chevalier . . . . .	30
<b>4.</b>	<b>El código <i>RAMSES</i></b>	<b>35</b>
4.1.	Ecuación de evolución de los electrones . . . . .	36
4.1.1.	Pérdidas por expansión . . . . .	36
4.1.2.	Pérdidas radiativas . . . . .	38
4.1.3.	Ganancias por autoabsorción . . . . .	39
4.1.4.	Término fuente . . . . .	41
4.1.5.	Término sumidero . . . . .	42
4.2.	Integración numérica de la evolución de los electrones . . . . .	43
4.2.1.	Aproximación semi-implícita . . . . .	43
4.2.2.	Aplicación a nuestra ecuación de evolución . . . . .	44
4.2.3.	Test de <i>RAMSES</i> . . . . .	45
4.3.	Modelado de la opacidad de los electrones térmicos . . . . .	46
4.4.	<i>RAMSES</i> paso a paso . . . . .	47
<b>5.</b>	<b>Expansion of Supernova SN 1993J</b>	<b>53</b>
5.1.	Introduction . . . . .	53
5.2.	The Complete Set of VLBI Observations of SN 1993J . . . . .	55
5.3.	Analysis of the SN 1993J VLBI Data . . . . .	59
5.3.1.	Explosion Center and Shell Width . . . . .	59
5.3.2.	Imaging Strategy of SN 1993J VLBI Data . . . . .	62
5.3.3.	Analysis in Fourier Space . . . . .	64
5.4.	Expansion of SN 1993J. Results and Discussion . . . . .	65
5.4.1.	Expansion (CPM Results) . . . . .	71
5.4.2.	Expansion from Analysis in Fourier Space . . . . .	75
5.4.3.	Comparison with Results by Other Authors . . . . .	76
5.4.4.	Refinement of Shell Width and Ejecta Absorption Estimates . . . . .	79
5.4.5.	Azimuthal Evolution of the Shell . . . . .	84
5.5.	Comparison between <i>RAMSES</i> and Observational Results . . . . .	88
5.5.1.	Modelling the Radio Light Curves of SN 1993J . . . . .	89
5.5.2.	Modelling the Expansion Curve of SN 1993J . . . . .	93
5.6.	Conclusions . . . . .	99
<b>6.</b>	<b>Astrometría con VLBI. El programa <i>UVPAP</i></b>	<b>105</b>
6.1.	El programa <i>UVPAP</i> . . . . .	106
6.1.1.	Modelo geométrico del interferómetro . . . . .	107

6.1.2. Medio de propagación de las señales . . . . .	114
<b>7. High-Precision Astrometry of the S5 Polar Cap Sample at 15 GHz</b>	<b>119</b>
7.1. Introduction . . . . .	119
7.2. Observations . . . . .	120
7.3. Astrometric Analysis of Epoch 2000.46 . . . . .	122
7.3.1. The Process of Phase Connection . . . . .	122
7.3.2. Antenna-Based Ambiguities . . . . .	124
7.3.3. Overall (Source-Based) Ambiguities . . . . .	125
7.3.4. Differenced Observables in the Global Fit . . . . .	125
7.3.5. Error Analysis . . . . .	127
7.3.6. Results . . . . .	128
7.3.7. Phase Delay vs. Group Delay for Astrometry . . . . .	132
7.4. Astrometric Analysis of Epoch 1999.57 . . . . .	134
7.5. Comparison of Results . . . . .	137
7.6. Conclusions . . . . .	140
<b>8. Resumen y conclusiones finales</b>	<b>143</b>
8.1. Expansión de SN 1993J . . . . .	143
8.2. Astrometría global de alta precisión . . . . .	146
<b>Bibliografía</b>	<b>151</b>
<b>A. The Common Point Method (CPM)</b>	<b>161</b>
A.1. Derivation . . . . .	161
A.2. Application . . . . .	163
<b>B. Automatic Phase Connector</b>	<b>167</b>
<b>C. Relative Source Position Determination</b>	<b>169</b>



# Índice de figuras

1.1. Interferómetro multiplicador de dos elementos. . . . .	5
1.2. Respuesta de un interferómetro . . . . .	6
1.3. Definición del sistema de coordenadas $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ . . . . .	8
1.4. Equivalencia entre interferómetros añadiendo un retraso relativo entre las señales recibidas. . . . .	10
3.1. Esquema del modelo de Chevalier . . . . .	31
4.1. Ejemplo de simulación de RAMSES . . . . .	47
4.2. Diagrama de flujo de RAMSES . . . . .	51
5.1. Shifts in $\alpha$ and $\delta$ of the SN 1993J explosion center . . . . .	61
5.2. Scheme of SN 1993J visibility function and the taper used in our imaging . . . . .	64
5.3. Examples of results from fitting to the visibilities . . . . .	66
5.4. Contour maps of SN 1993J from annual observations. . . . .	69
5.5. Expansion of SN 1993J from self-calibrated visibility images . . . . .	70
5.6. Expansion of SN 1993J from phase-referenced visibility images . . . . .	71
5.7. Expansion of SN 1993J from modelfitting to the visibilities . . . . .	72
5.8. Expansion of SN 1993J using a running expansion index . . . . .	76
5.9. Azimuthal average of a shell convolved with different beams . . . . .	81
5.10. Ratios $\rho_1$ and $\rho_2$ for epochs since year 1995 . . . . .	82
5.11. Fitted relative shell widths of SN 1993J . . . . .	83
5.12. Degree of circularity of the SN 1993J shell . . . . .	84
5.13. Azimuthal evolution of SN 1993J . . . . .	85
5.14. Scheme of the azimuthal evolution of SN 1993J . . . . .	86
5.15. Light curves of SN 1993J and RAMSES simulated results . . . . .	94
5.16. Spectral index evolution of SN 1993J simulated by RAMSES . . . . .	95
5.17. Radial intensity profiles of SN 1993J with a B radial decay . . . . .	96
5.18. Residuals of SN 1993J flux densities around day 1500 . . . . .	99

5.19. RAMSES residuals of SN 1993J flux densities . . . . .	100
5.20. Differences between the SN 1993J expansion curve and RAM- SES simulations . . . . .	101
6.1. Diferencia entre los modelos de mareas de <i>CALC</i> y <i>UVPAP</i> . .	109
6.2. Diferencia entre los modelos relativistas de <i>VLBI3</i> y <i>UVPAP</i> . .	114
7.1. Sky distribution of the S5 polar cap sample and scheme of our observing schedule . . . . .	121
7.2. Residual delay rate distribution for epoch 2000.46 . . . . .	124
7.3. Effect of an antenna-dependent phase cycle in the differenced delays . . . . .	126
7.4. Images of the S5 polar cap sample sources . . . . .	129
7.5. Postfit delay residuals of baseline HN-KP for epoch 2000.46 . . .	130
7.6. Uncertainties in $\alpha$ and $\delta$ as a function of source separations. . .	131
7.7. Uncertainties in separation as a function of separation for epoch 2000.57 . . . . .	131
7.8. Residual delay rate distribution for epoch 1999.57 . . . . .	134
7.9. Postfit delay residuals of baseline FD-HN for epoch 1999.57 . . .	136
7.10. Postfit delay residuals of baseline HN-KP for epoch 1999.57 . . .	136
7.11. Sources 00, 01, 02, and 04 at epoch 1999.46 . . . . .	141
B.1. Example of baseline-dependent cycles in a test of the automatic connector . . . . .	168
C.1. Rotation in the sky for the correct estimate of relative source positions . . . . .	171



# Índice de Tablas

5.1. Complete set of VLBI observations of SN 1993J . . . . .	57
5.2. Results of shell size measurements using the CPM . . . . .	68
5.3. Expansion parameters of SN 1993J for different approaches . . .	79
5.4. Mean values of $\rho_1$ and $\rho_2$ for all frequencies . . . . .	80
5.5. Biases of CPM and quantities related to shell structure . . . . .	80
7.1. List of the S5 polar cap sample sources . . . . .	120
7.2. Fixed parameters and their uncertainties in our fits . . . . .	128
7.3. Astrometric corrections for sources at epoch 2000.46 . . . . .	132
7.4. Astrometric corrections for source pairs at epoch 2000.46 . . . .	133
7.5. Astrometric corrections for sources at epoch 1999.57 . . . . .	137
7.6. Astrometric corrections for source pairs at epoch 1999.57 . . . .	138



# Introducción

En la presente tesis se han tratado dos temas distintos. Lo común de ambos es la utilización límite de la técnica de VLBI. La primera parte de la tesis trata del análisis (usando nuevos algoritmos diseñados ex profeso) de todas las observaciones de VLBI relativas a la supernova SN 1993J, el más importante caso de radiosupernova descubierto hasta la fecha. La segunda parte de la tesis trata del análisis astrométrico a 15 GHz de una muestra de 13 cuásares y objetos BL-Lacertae, la llamada *muestra S5 del casquete polar* (S5 polar cap sample).

El objetivo de la primera parte de la tesis es extraer toda la información posible de todos los datos existentes de VLBI relativos a la supernova SN 1993J, tanto los tomados por nuestro grupo como los tomados por un grupo competidor. Entre otras cosas, este análisis nos permite comprobar con precisión las predicciones del modelo actualmente aceptado de emisión de jóvenes restos de supernova, o *modelo de Chevalier*. El minucioso estudio de estos datos nos ha llevado a encontrar sutiles efectos en la expansión de la supernova para los que necesitamos corregir algunos detalles del modelo de Chevalier, como lo concerniente a la opacidad de los materiales eyectados o a la estructura radial de los campos magnéticos amplificados.

Dada la radioemisión intrínsecamente débil de SN 1993J, así como su gran distancia a la Tierra (unos 11 millones de años-luz), hemos tenido que idear nuevos algoritmos y herramientas de calibración y análisis para extraer, de forma precisa y fiable, toda la información posible de los datos de esta supernova. Si bien encontramos resultados similares a algunos de los ya publicados por otros autores (y que son compatibles con el *modelo de Chevalier*), a partir de la curva de expansión de SN 1993J hemos descubierto un sutil efecto de dependencia espectral de la región de emisión, correlacionado con un súbito incremento de la radioemisión a frecuencias altas. En la presente tesis proponemos una serie de correcciones al modelo de Chevalier que ayudan a explicar

estos efectos. También presentamos un nuevo software de simulación de la radioemisión en supernovas, al que llamamos *RAMSES* (Radiation-Absorption Modelling of the Synchrotron Emission from Supernovae). Dicho código tiene en cuenta todas las correcciones al modelo de Chevalier que según nuestro planteamiento podrían explicar los resultados obtenidos tras el análisis de los datos de SN 1993J. Finalmente, hacemos un estudio comparativo entre los resultados observacionales y las simulaciones de *RAMSES*. De este estudio extraemos información novedosa acerca de la estructura radial de los campos magnéticos de la región de emisión y de la opacidad de los materiales eyectados a la radioemisión.

El objetivo de la segunda parte de la tesis es realizar, por primera vez, un análisis astrométrico global (en el sentido de muchas fuentes distribuidas en una gran región del cielo) utilizando el observable *retraso de fase*. Este observable es típicamente 100 veces más preciso que el *retraso de grupo*, que es el utilizado hasta ahora en todos los análisis astrométricos que involucran a más de 2 ó 3 fuentes. Nuestro análisis astrométrico se basa en datos a 15 GHz de las 13 fuentes que componen la muestra polar S5. Los resultados obtenidos con este estudio, comparados con nuevos resultados que esperamos obtener pronto a otras frecuencias y otras épocas de observación, constituirán el primer escrutinio preciso de los movimientos internos absolutos de las componentes de una muestra completa de cuásares y BL-Lacertae, lo cual nos permitirá poner a prueba predicciones básicas del modelo estándar de interacción de jets relativistas.

Gracias al desarrollo de nuevos algoritmos y a la actualización y ampliación de software existente, hemos sido capaces de resolver los principales inconvenientes relacionados con el retraso de fase (como es el problema de la *ambigüedad de los ciclos completos de fase*) que impedían el uso de los retrasos de fase en ajustes astrométricos globales, con más de 2 ó 3 fuentes. Con esto, hemos conseguido estimar las posiciones de las 13 fuentes de la muestra polar S5 en un único ajuste, usando los retrasos de fase diferenciales entre todos los pares posibles. Utilizando todos estos retrasos diferenciales hemos mejorado en un factor  $\sim 10$  la precisión astrométrica alcanzable con el instrumento VLBA, si comparamos nuestro método con la comúnmente usada técnica de *referencia de fase*.

# Capítulo 1

## Interferometría

### 1.1. El límite de difracción

La limitación fundamental en la resolución angular de cualquier instrumento óptico es el llamado **límite de difracción**. El efecto de esta limitación es que la respuesta del instrumento a una fuente puntual no es una imagen puntual, sino la llamada **PSF** (*Point Spread Function*). La PSF de un instrumento óptico suele tener una forma de tipo Bessel, parecida a una gaussiana, cuyo lóbulo principal tiene una anchura (en radianes) de

$$\theta \approx \frac{\lambda}{D} ,$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la radiación a la que es sensible nuestro instrumento y  $D$  es la apertura del mismo. Cuando tenemos una fuente extensa en lugar de una puntual, la respuesta de un instrumento óptico es, debido a la naturaleza lineal de la misma, igual a la convolución de la imagen real del objeto con la PSF. Esto puede llegar a confundir puntos muy cercanos de la fuente observada en un sólo punto de la imagen si la distancia angular entre los puntos de la fuente es similar a la anchura del lóbulo principal de la PSF. Así pues, cuanto mayor sea la anchura de la PSF, tanto menor será la resolución de nuestro instrumento de observación.

Para los instrumentos que trabajan en la banda visible del espectro electromagnético, el límite de difracción no parece ser un problema demasiado grave, ya que las longitudes de onda involucradas son tan pequeñas que la resolución alcanzable es bastante alta incluso para aparatos con aperturas de sólo unos pocos centímetros.

La situación cambia cuando nos vamos al régimen de radiofrecuencias. En esos casos, las longitudes de onda son tres o cuatro órdenes de magnitud mayores que las de la radiación visible. Esto implica que un instrumento que en radio pudiese llegar a alcanzar una resolución similar a la de un telescopio óptico debería tener un tamaño miles de veces superior al de éste.

A simple vista, esta limitación no habría permitido el desarrollo de la radioastronomía de alta resolución angular, ya que nos enfrentamos al problema de fabricar instrumentos de observación (radiotelescopios) con tamaños del orden de kilómetros, lo cual es inviable.

Pero gracias a la interferometría (y a las **técnicas de síntesis de apertura**) tenemos la posibilidad de simular un radiotelescopio de tamaño titánico (diámetro comparable al de la Tierra) utilizando unos pocos radiotelescopios de tamaños mucho más modestos (diámetros del orden de decenas de metros), uniendo éstos mediante una sincronización de alta calidad en las señales recibidas. En las siguientes secciones hablaremos de los detalles de estas interesantes técnicas.

## 1.2. Fundamentos de interferometría

### 1.2.1. Respuesta de un interferómetro a una fuente puntual

La interferometría aplicada a la radioastronomía aprovecha las propiedades ondulatorias de la radiación para obtener información acerca de la estructura de emisión de los objetos observados. Para introducir los principios de esta técnica, empezaremos estudiando un caso sencillo de interferómetro, el llamado **interferómetro de dos elementos**.

Existen varios tipos de interferómetros, como el de adición cuadrática, pero el que mejor se adapta a las necesidades de la radioastronomía, por su gran estabilidad y fiabilidad, es el llamado **interferómetro multiplicador o de correlación**. En la figura 1.1 se muestra un ejemplo de interferómetro multiplicador de dos elementos (antenas). La señal de salida de este dispositivo resulta ser la media temporal del producto de las señales recibidas por ambas antenas.

No es difícil concluir a partir de la figura 1.1 que si las antenas A y B se encuentran separadas por una distancia  $\vec{B}$  (que llamamos **línea de base**) y

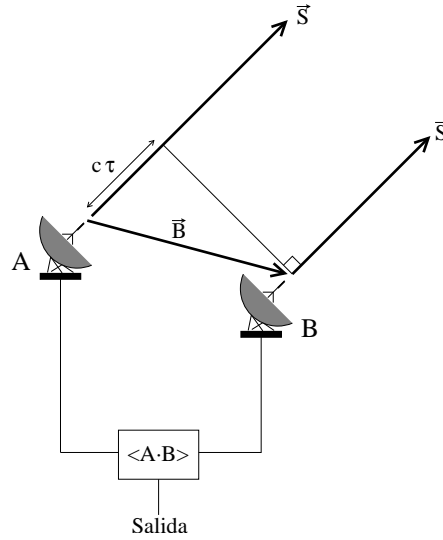


Figura 1.1: Interferómetro multiplicador de dos elementos.

reciben una emisión sinusoidal de frecuencia angular  $\omega$  procedente de cierta dirección  $\vec{S}$  (siendo  $\vec{S}$  un vector unitario), entonces la antena A recibirá la misma señal que B, pero retrasada un tiempo igual a

$$\tau = \frac{\vec{B}\vec{S}}{c}, \quad (1.1)$$

donde  $\vec{B}\vec{S}$  indica producto escalar y  $c$  es la velocidad de propagación de la luz.

Esto significa que la respuesta del interferómetro será igual a

$$Re = v_A v_B \langle \cos(\omega t) \cos(\omega t - \omega \tau) \rangle = G_A G_B \frac{I}{2} \cos \omega \tau, \quad (1.2)$$

donde  $v_A$  y  $v_B$  son los voltajes máximos inducidos por la fuente en las antenas A y B, respectivamente, y donde  $G_A$  y  $G_B$  son las ganancias de las antenas A y B, respectivamente. El intervalo en el que se ha efectuado la media temporal contiene un número suficiente de ciclos de la señal como para que la igualdad se mantenga en un nivel de precisión óptimo. En la práctica, la media suele efectuarse para un par de segundos, durante los cuales ha habido miles de millones de ciclos en la señal.

Así pues, la respuesta de un **interferómetro multiplicador** a una fuente monocromática y puntual en el cielo (i. e. a una onda plana) es proporcional a la intensidad  $I$  de la fuente, viniendo el coeficiente de proporcionalidad determinado por las ganancias de las antenas y por la posición de la fuente en el cielo. Tal coeficiente va como el coseno de  $\omega \tau$ , es decir, como el coseno de la fase avanzada por la señal durante el camino adicional que el frente de ondas

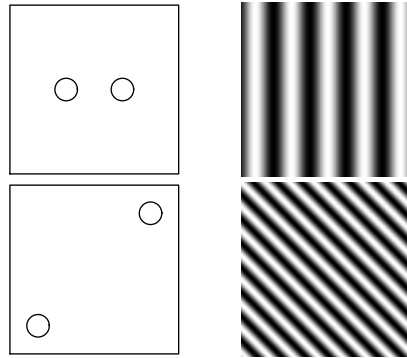


Figura 1.2: Respuesta de un interferómetro en función del emplazamiento de sus antenas (izquierda) y de la región del cielo desde donde se recibe la señal (derecha).

debe recorrer para llegar a la antena A una vez ha llegado a la antena B.

Si representásemos en una pequeña región del cielo cuál es el valor del coeficiente de proporcionalidad de la respuesta de un interferómetro como función de la posición de la fuente (según la ecuación 1.2), nos encontraríamos con una serie de franjas en el cielo, cuya frecuencia espacial aumentaría al aumentar la distancia entre las antenas, y cuya dirección dependería de la orientación relativa entre éstas, tal y como puede apreciarse en la figura 1.2.

En dicha figura vemos, a la izquierda, unos interferómetros multiplicadores de dos elementos, vistos desde donde pudiera encontrarse una posible fuente a observar. A la derecha, vemos representado el coeficiente de proporcionalidad de la respuesta de los interferómetros como función de la posición de la fuente en el cielo.

Vemos que, efectivamente, las franjas de respuesta de un interferómetro tienden a aproximarse entre ellas cuando la distancia entre las antenas aumenta. También podemos ver que la inclinación de dichas franjas en el cielo depende de la inclinación del vector línea de base  $\vec{B}$  entre las antenas.

Si antes de multiplicar las señales recibidas por cada antena añadimos a una de ellas una fase de  $\frac{\pi}{2}$  radianes, las franjas de la figura 1.2 también avanzarán dicha fase, ya que la respuesta del dispositivo será ahora igual a

$$Im = G_A G_B \frac{I}{2} \sin \omega \tau . \quad (1.3)$$

Las ecuaciones 1.2 y 1.3 pueden entenderse como las partes real e imaginaria (respectivamente) de:



$$V = Re + i Im = G_A G_B \frac{I}{2} \exp\left(i \frac{2\pi\nu}{c} \vec{B} \vec{S}\right) . \quad (1.4)$$

$V$  recibe el nombre de **visibilidad**. Los interferómetros con los que vamos a trabajar son capaces de producir ambas salidas ( $Re$  e  $Im$ ) al mismo tiempo, de manera que miden simultáneamente las partes real e imaginaria de la **visibilidad**.

### 1.2.2. Fuentes extensas y plano u-v

Supongamos ahora que tenemos una fuente no monocromática y con cierta extensión angular en el cielo. El interferómetro ya no recibirá una onda plana, sino una señal más complicada. La respuesta del interferómetro a una fuente extensa, una vez pasada la señal por un filtro de banda estrecha<sup>1</sup>, es igual a la suma de las respuestas producidas por cada uno de los emisores puntuales que forman la fuente. Esto es, estamos interpretando una emisión extensa como un conjunto de fuentes puntuales, de manera que la respuesta total la entendemos como la emisión de la fuente convolucionada con la respuesta del interferómetro a un emisor puntual (función de Green del interferómetro). Analíticamente, y ayudándonos de la ecuación 1.4 para un emisor puntual, tenemos que, si  $I(\vec{S})$  representa la distribución de intensidad de la fuente en el cielo, entonces

$$V = Re + i Im = k \int I(\vec{S}) \exp\left(i \frac{2\pi\nu}{c} \vec{B} \vec{S}\right) d\Omega . \quad (1.5)$$

Por comodidad hemos llamado  $G_A G_B = k$ . Esta respuesta del interferómetro no es más que la integral de la estructura de la fuente multiplicada por el factor de proporcionalidad de respuesta del interferómetro, que depende de la posición en el cielo donde se encuentran los emisores puntuales que forman la fuente extensa, según hemos visto ya en la figura 1.2.

Para el caso especial de que uno de los puntos de emisión de la fuente (que podemos definir situado en la dirección  $\vec{S}_0$ ) y el vector  $\vec{B}$  sean ortogonales, podemos encontrar un sistema de coordenadas en el que la ecuación 1.5 se simplifica<sup>2</sup>. En efecto, sea el sistema ortonormal de ejes  $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ , con

---

<sup>1</sup>En la práctica la señal se divide en varios canales y cada canal se pasa por un filtro de anchura igual a unos pocos MHz. De esta forma no se pierde sensibilidad por un filtrado excesivo, ya que posteriormente se unen de nuevo las señales de cada canal pudiéndose reconstruir anchos de banda de varias decenas de MHz.

<sup>2</sup>En la práctica suele elegirse  $\vec{S}_0$  de manera que corresponda al punto más brillante de la fuente a estudiar.

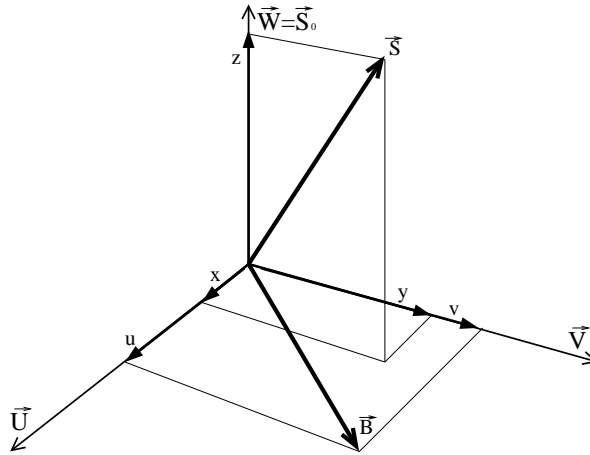


Figura 1.3: Definición del sistema de coordenadas  $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ .

el eje  $\vec{W}$  señalando hacia el punto  $\vec{S}_0$  de la fuente. Los ejes  $(\vec{U}, \vec{V})$  estarán definidos, por lo tanto, en el plano ortogonal a la dirección  $\vec{S}_0$ . El vector  $\vec{B}$  caerá, por construcción, en dicho plano (ver figura 1.3). Esto implica que  $\vec{B}$  no tendrá proyección en la dirección  $\vec{W}$ .

Si las coordenadas de  $\vec{S}$  en la base  $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$  son  $(x, y, z)$  y las de  $\vec{B}$  son  $(u, v, 0)$ , el producto escalar  $\vec{B}\vec{S}$  puede escribirse fácilmente como

$$\vec{B}\vec{S} = ux + vy \quad .$$

Además, el ángulo sólido  $d\Omega$  puede escribirse como

$$d\Omega = \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad ,$$

ya que  $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$  es el factor que relaciona un diferencial de superficie en el plano  $(\vec{U}, \vec{V})$  con el diferencial correspondiente proyectado en la esfera celeste.

Con todo esto, la ecuación 1.5 toma la forma

$$V(u, v) = Re + i Im = k \int I(\vec{S}) \exp\left(i \frac{2\pi\nu}{c}(ux + vy)\right) \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad ,$$

donde se entiende que  $\vec{S}$  está escrito en el sistema de coordenadas en el que  $\vec{S}_0$  no tiene componentes en el plano  $(\vec{U}, \vec{V})$ . Si se da además la condición de que la fuente en estudio sea compacta (de manera que la región donde ésta se define cumpla que  $x \ll 1$  e  $y \ll 1$ ), entonces, de manera aproximada

$$V(u, v) = Re + i Im = k \int I(\vec{S}) \exp(i \frac{2\pi\nu}{c}(ux + vy)) dx dy . \quad (1.6)$$

O sea, que las salidas del interferómetro  $Re$  (producto de las señales de las antenas) e  $Im$  (desfase de 90 grados entre las señales a multiplicar) nos darán, entendiéndolas como la parte real e imaginaria de la visibilidad, la **transformada de Fourier** de la distribución de radiación  $I(\vec{S})$  (i.e., de la estructura de la fuente), centrada en  $\vec{S}_0$  y calculada en el punto  $(u,v)$ . Recordemos que el par  $(u,v)$  son las coordenadas del vector línea de base  $\vec{B}$  en el plano perpendicular al vector  $\vec{S}_0$ . Si dispusiéramos de más antenas en el interferómetro, podríamos hallar tantas visibilidades (i.e., valores de la transformada de Fourier de la fuente) como pares de antenas pudiésemos formar.

Las distintas técnicas de síntesis de apertura se centran en invertir la ecuación de Fourier 1.6 para hallar  $I(\vec{S})$  conociendo  $V(u, v)$ .

### 1.3. ¿Por qué utilizar un correlador?

Como hemos visto en la sección anterior, la manera en que las visibilidades se relacionan con la transformada de Fourier de la fuente es que el vector línea de base  $\vec{B}$  sea ortogonal al vector  $\vec{S}_0$  de la fuente, respecto al cual se centra la transformada. A medida que la fuente se mueve en el cielo, las posiciones de los radiotelescopios deberían también cambiar, de suerte que la línea de base  $\vec{B}$  fuese siempre ortogonal al vector  $\vec{S}_0$ . No obstante, las posiciones de los radiotelescopios en la Tierra no pueden modificarse durante un experimento (es algo difícil desplazar telescopios de varias decenas de metros de diámetro y varios miles de toneladas de peso) y prácticamente nunca se cumple la condición de ortogonalidad entre  $\vec{B}$  y el vector fuente  $\vec{S}_0$ .

Para dar solución a este problema, lo que se hace en el caso de un interferómetro de dos elementos es añadir a una de las antenas un retraso  $\tau$  que resulte ser igual al retraso relativo de la señal entre los dos radiotelescopios. De esa forma, se consigue que la respuesta del interferómetro sea equivalente a la de un interferómetro en el que la línea de base  $\vec{B}'$  entre antenas fuese ortogonal a  $\vec{S}_0$ , siendo su módulo  $B'$  igual al módulo de la proyección de  $\vec{B}$  sobre el plano ortogonal a  $\vec{S}_0$ . Esto puede verse fácilmente en la figura 1.4.

A medida que la fuente se moviese en el cielo, deberíamos ir cambiando el valor de  $\tau$ , de manera que tanto el módulo como la dirección del vector

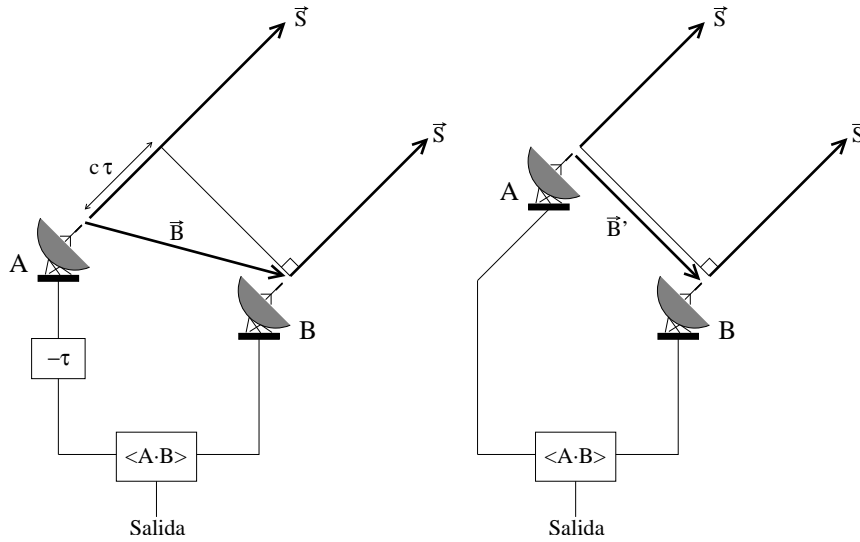


Figura 1.4: Equivalencia entre interferómetros añadiendo un retraso relativo entre las señales recibidas.

$\vec{B}'$  en la figura 1.4 irían cambiando con el tiempo. Las franjas de respuesta del interferómetro resultante (ver figura 1.2) evolucionarían junto con  $\vec{B}'$ , estrechándose, ensanchándose, rotando y, por lo tanto, muestreando distintas componentes de la transformada de Fourier de la fuente.

Lo que se hace en la práctica es multiplicar las señales de ambas antenas, no para un cierto valor  $\tau$  de retraso relativo añadido, sino para todo un conjunto de valores de retraso  $\tau_i$ . Se construye entonces, para cada par de antenas (A,B) del interferómetro, la función de correlación  $C(A, B, \tau_i, t)$ , que es igual a

$$C(A, B, \tau_i, t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} A(t')B(t' - \tau_i) dt' , \quad (1.7)$$

donde  $A(t')$  y  $B(t')$  son las señales captadas por las antenas A y B, respectivamente, en el instante  $t'$ .  $\Delta t$  es el tiempo de integración de la correlación (que suele ser un par de segundos) y  $t$  es el valor del tiempo para el que la correlación se centra. Todas estas operaciones se realizan pasando las señales de las antenas por un conjunto de chips (mezcladores, rotadores de fase, filtros digitales, etc.), que recibe el nombre de *correlador*.

De esta forma, seleccionando distintos valores de  $\tau_i$  en  $C(A, B, \tau_i, t)$  obtendremos (para el instante  $t$ ) el equivalente a salidas de distintos interferómetros multiplicadores con las antenas en diferentes posiciones, tales que el retraso de la señal para ir de A a B sea  $\tau_i$ . Por lo tanto, un error en el posicionamiento de las antenas en un instante  $t$  podrá ser fácilmente subsanado eligiendo el valor

### 1.3. ¿Por qué utilizar un correlador?

---

$\tau_i$  adecuado de entre todo el conjunto  $C(A, B, \tau_i, t)$  calculado.

Cuando las líneas de base del interferómetro sean del orden del tamaño de la Tierra, esta técnica de correlación entre las señales de las distintas antenas será más que necesaria, ya que deformaciones de nuestro planeta a gran escala (como las mareas terrestres), así como pequeñas perturbaciones debidas a corrientes oceánicas o atmosféricas, harán que las posiciones de las distintas antenas nunca sean iguales a las teóricas para el nivel de precisión requerido (del orden de milímetros). Por esto, siempre hemos de buscar el valor de  $\tau_i$  (próximo al valor teórico  $\tau$ ) para conseguir que el frente de ondas proveniente de la fuente  $\vec{S}_0$  esté sincronizado en todas las antenas para todo instante  $t$  (i.e., que todos los interferómetros equivalentes formados por cada par de antenas caigan en el plano ortogonal a  $\vec{S}_0$ ). El proceso en el que esto se consigue se denomina **Ajuste de Franjas** o *Fringe Fitting*.



# Capítulo 2

## Introducción a VLBI

VLBI son las siglas de *Very Long Baseline Interferometry*. Como su nombre indica, es la técnica con la que se observan radiofuentes usando interferómetros de líneas de base muy largas, del orden de centenares o miles de kilómetros.

Desde la primera observación de VLBI (en el año 1967 con una línea de base máxima de unos 183 kilómetros) las técnicas de interferometría de muy larga línea de base han avanzado a pasos agigantados. Hoy son habituales los experimentos con líneas de base de unos cuantos miles de kilómetros.

Los algoritmos de calibración y “mapeo” (cartografiado) de VLBI se han refinado tremendamente en las últimas décadas. Sirva este capítulo como resumen de los pasos seguidos para procesar las señales captadas por las antenas del interferómetro, de suerte que el lector pueda comprender debidamente las estrategias de calibración y cartografiado de los datos a los que refiere la presente tesis.

Para un estudio más detallado de la interferometría en radioastronomía, y de la tecnología de VLBI en particular, el lector puede acudir a Burke & Graham-Smith (1986), Thomson et al. (1986), Rohlfs & Wilson (1991), Kraus (1986) y a las demás referencias que allí aparecen. En una publicación más reciente de índole educativa/divulgativa (Martí-Vidal & Marcaide 2008a), también se describen, aunque más someramente, todos los pasos involucrados en la técnica de VLBI, pero aplicándolos, en lugar de a señales de radio, a señales acústicas grabadas en dispositivos digitales.

## 2.1. VLBI vs. interferometría conexa

Una condición esencial para poder calcular los coeficientes de correlación de la ecuación 1.7 es una muy buena sincronización de las señales de llegada a las distintas antenas. Hemos de tener un reloj que pueda asignar el valor de la amplitud del campo eléctrico en cada antena para cada instante de tiempo  $t$  con enorme precisión y estabilidad. Para este propósito se utilizan relojes atómicos superprecisos y máseres muy estables que sirven tanto para marcar el tiempo como para proporcionar una frecuencia muy estable (oscilador local) que, mezclada con la señal original, permita rebajar la frecuencia de ésta hasta una frecuencia intermedia (IF), de tal forma que pueda ser tratada sin pérdidas por la electrónica. Esta fase de captación y tratamiento de la señal es totalmente análoga a la de cualquier receptor heterodino de radio, solo que aquí estamos tratando frecuencias que pueden ser mucho mayores que las comúnmente usadas en las emisiones radiofónicas normales.

Los primeros interferómetros que se usaron en radioastronomía fueron los llamados **interferómetros conexos**. El **VLA** (*Very Large Array*), en New Mexico, es un buen ejemplo moderno de interferómetro conexo. En estos casos, los radiotelescopios están lo suficientemente cerca unos de otros como para que todos ellos puedan utilizar el mismo reloj atómico, los mismos osciladores locales, en el tratamiento de las señales. Estas señales son directamente llevadas al correlador, que calcula los coeficientes  $C(A, B, \tau_i, t)$  en tiempo real. No obstante, las redes de VLBI comprenden radiotelescopios separados por distancias enormes (del orden del tamaño de la Tierra), lo que hace particularmente difícil la sincronización de las distintas señales de las antenas en tiempo real para que las correlaciones se puedan determinar. Dada la gran dificultad de una sincronización de alta calidad en tiempo real, cada estación de VLBI debe tener sus propios relojes (máseres de hidrógeno) y osciladores locales, grabando las señales recibidas por cada antena en cintas o discos duros que, tras la observación, son llevados al correlador, que los lee y calcula los coeficientes  $C(A, B, \tau_i, t)$ .

### 2.1.1. Ventajas e inconvenientes de VLBI

El hecho de que cada antena de VLBI deba tener sus propios relojes atómicos provoca una enorme cantidad de problemas en la correlación. Aunque se supone que los relojes atómicos son extraordinariamente estables, son muy co-



munas las pequeñas derivas en su sincronización, lo que causa una degradación en la calidad de los datos difícilmente resoluble en el análisis posterior a la correlación.

Además, la rotación de la Tierra, unida a las enormes líneas de base entre las antenas, produce efectos Doppler en la radiación recibida, los cuales son distintos para cada estación. Esto producirá una variación de la fase de la visibilidad como función del tiempo que será ajena a la estructura de la fuente y que hará imposible, de no tratarse adecuadamente, la correcta reducción de los datos. Este problema se intenta corregir en el correlador, aplicando rotadores de fase cuya frecuencia depende de cada antena y de cada momento en el tiempo. Estos rotadores modifican la frecuencia de la señal para cada estación, de manera que corre los espectros de todas las señales a un valor común para todos los radiotelescopios, eliminando, por lo tanto, los distintos efectos Doppler entre las antenas. No obstante, los efectos Doppler son calculados en el correlador en base a un modelo de rotación terrestre que suele diferenciarse de la realidad debido a pequeños factores no considerados en el modelo. Esto hace que queden pequeñas secuelas, efectos Doppler residuales, en las señales a correlacionar. La manera en la que estos residuos Doppler se eliminan forma parte del proceso de calibración posterior al correlador y constituye el llamado *Fringe Fitting* del que ya hablaremos.

A todos estos problemas hay que añadir que las enormes distancias entre las antenas involucradas en una observación de VLBI conllevan a que las condiciones climáticas puedan ser muy diferentes de una estación a otra. La distinta densidad de electrones en la ionosfera o el distinto grado de humedad (entre otros muchos factores) en los diferentes medios por los que pasa la señal antes de llegar a cada estación, afectan de manera distinta a las ondas que llegan a cada antena. Los caminos ópticos recorridos por la señal no estarán, pues, únicamente relacionados con la geometría del interferómetro y la estructura de la fuente, como hasta ahora hemos ido suponiendo. Las fases de las visibilidades estarán contaminadas por efectos atmosféricos no deseados. Estos problemas se resuelven en el proceso llamado **mapeo híbrido**.

En cuanto a las ventajas de VLBI, por una parte tenemos que las enormes líneas de base involucradas se traducen en la posibilidad de muestrear la transformada de Fourier de la fuente para enormes valores de frecuencias espaciales, pudiendo obtener información de radioestructuras de diminuta extensión angular. Actualmente pueden obtenerse resoluciones del orden de la fracción de milisegundo de arco, el equivalente a poder distinguir desde la Luna un objeto

de tamaño similar a un Compact Disc. Los *jets* de cuásares lejanos a escalas no mucho mayores al radio de Schwarzschild del agujero negro supermasivo que los produce, por poner un ejemplo, nos serían totalmente desconocidos de no ser por las enormes resoluciones alcanzables con VLBI.

Del mismo modo en que pueden obtenerse grandes resoluciones en el cielo, VLBI también permite conocer con enorme precisión las posiciones relativas de los radiotelescopios en la Tierra, incluso cuando están separados por distancias transatlánticas. Gracias a los estudios de posicionamiento de antenas con VLBI, la Geodesia ha avanzado mucho en las últimas décadas. Hoy en día se ha conseguido medir de manera directa el movimiento de las placas tectónicas de la Tierra (corroborando definitivamente la teoría de la deriva continental) y su deformación debida a mareas oceánicas y terrestres. Incluso se han llegado a detectar y modelizar las microaceleraciones en el movimiento de rotación de la Tierra debidas a la transferencia de momento angular entre las placas continentales, la atmósfera y los océanos, así como la continua desaceleración en la rotación terrestre debida a la interacción gravitatoria con la Luna.

## 2.2. Los observables de VLBI

Las magnitudes realmente importantes en una observación de VLBI pueden resumirse en unas pocas:

### 2.2.1. Fase interferométrica

La **fase interferométrica** se define para cada par de antenas (i.e., para cada línea de base) y para cada instante de tiempo. Es, sencillamente, la fase relativa de las señales recibidas por el par de antenas en cuestión.

Las contribuciones que afectan al valor de la fase interferométrica son varias. En concreto, si  $\phi$  es la fase interferométrica, ésta es igual a

$$\phi = \phi_{geo} + \phi_{tro} + \phi_{ion} + \phi_{str} + \phi_{ins} + 2\pi n \quad .$$

donde  $\phi_{geo}$  es la fase debida al retraso geométrico  $\tau$  entre ambas antenas (ver figura 1.1),  $\phi_{tro}$  y  $\phi_{ion}$  son las contribuciones debidas a la presencia de troposfera e ionosfera, respectivamente,  $\phi_{str}$  está relacionada con la estructura de la fuente observada,  $\phi_{ins}$  es la contribución debida a la instrumentación de las antenas y, finalmente,  $2\pi n$  es un número entero de ciclos de ambigüedad,

inherente a la determinación de cualquier fase.

### 2.2.2. Retraso de fase y retraso de grupo

Hay dos maneras de estimar el retraso relativo  $\tau$  que hay que añadir entre dos antenas para que observen el mismo frente de ondas de manera sincronizada.

Primero, el **retraso de fase**  $\tau_\phi$  se define como

$$\tau_\phi = \frac{\phi}{2\pi\nu_0} .$$

siendo  $\phi$  la fase interferométrica y  $\nu_0$  la frecuencia de referencia en la observación. El principal inconveniente de este estimado es su ambigüedad  $n/\nu_0$ .

Otro estimado del retraso  $\tau$  es el llamado **retraso de grupo**. Se define como la pendiente de la variación de la fase con la frecuencia dentro del ancho de banda de observación. Es decir

$$\tau_g = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial\phi}{\partial\nu} .$$

El retraso de grupo es menos preciso que el de fase típicamente en un factor  $\sim 100^1$ . No obstante, la ventaja del retraso de grupo es que no tiene el problema de la ambigüedad  $n\nu_0$  del retraso de fase, por lo que puede usarse directamente en los ajustes astrométricos sin necesidad de aplicar correcciones (dependientes de modelo) de ambigüedades, como veremos en el capítulo 7.

### 2.2.3. *Fringe rate* y *delay rate*

La fase no solo varía con la frecuencia, sino también con el tiempo. A la variación de la fase con el tiempo se la denomina **ritmo de franja** o *fringe rate*. El efecto Doppler residual entre las antenas que no se pudo eliminar en el correlador, así como la estructura de la fuente observada si la fase de su transformada de Fourier varía entre punto y punto del plano u-v, dan origen al *fringe rate*.

Para el caso de fuentes puntuales, o con una estructura tan compacta que no es resoluble por VLBI, el ritmo de franja se debe únicamente a efectos Doppler residuales. Matemáticamente, el ritmo de franja se define como

---

<sup>1</sup>La razón entre los errores del retraso de fase y de grupo es proporcional a la razón entre el ancho de banda y la frecuencia de observación.

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} .$$

Esta variación temporal afecta por igual a todas las fases de las visibilidades calculadas para cualquier retraso  $\tau$  de la correlación. Es, pues, la franja entera de correlación la que está alterando su fase como función del tiempo.

Dado que el ritmo de franja está producido por efectos Doppler residuales en las señales, y tales efectos Doppler son fruto del desplazamiento de las antenas con respecto a la fuente, es de esperar que el ritmo de franja esté relacionado con cambios en los vectores línea de base entre las antenas. Así pues, un ritmo de franja residual en una línea de base nos está diciendo que debe haber también un cambio en el retraso  $\tau$  para el que encontramos el máximo de correlación, ya que una de las antenas se está acercando (o alejando) a la fuente a mayor velocidad que lo que había programado en el correlador. Esta relación directa entre el ritmo de franja y una variación en el retraso relativo entre radiotelescopios nos da pie a hablar del **ritmo de retraso** o *delay rate*. Matemáticamente, éste se define como

$$\dot{\tau}_{\phi} = \frac{1}{2\pi\nu_0} \frac{\partial \phi}{\partial t} .$$

Esta cantidad nos da la velocidad a la que la franja de correlación se está desplazando a través del espacio de retrasos  $\tau$  debido a la **velocidad residual** en las antenas. La velocidad residual a la que aquí nos referimos es la diferencia entre la velocidad real de las antenas y el modelado de velocidades que se introduce en el correlador para eliminar los efectos Doppler antes de la correlación. Esta velocidad residual es, por consiguiente, la responsable directa de los efectos Doppler que produce el ritmo de franja residual en las visibilidades correlacionadas.

Ambas cantidades (*fringe rate* y *delay rate*) están, pues, directamente relacionadas por el movimiento de los radiotelescopios.

#### 2.2.4. Clausuras de fase

Las fases interferométricas son bastante ruidosas y dependen mucho de las distintas condiciones atmosféricas en las que se encuentra cada estación. Es por ello que el uso de las **clausuras de fase**, como ligadura adicional, se hace

totalmente necesario para el correcto calibrado de los datos de VLBI.

Las clausuras de fase se definen a partir de las fases interferométricas medidas por tres antenas. Matemáticamente, para las antenas A, B y C, la clausura de fase  $\phi_{ABC}$  es igual a

$$\phi_{ABC} = \phi_{AB} + \phi_{BC} - \phi_{AC} \quad ,$$

donde  $\phi_{AB}$  es la fase interferométrica observada por las antenas A y B.

La principal ventaja de la clausura de fase es que es insensible a los errores de calibración de las antenas o a las contribuciones atmosféricas. Por ello, **la clausura de fase tan sólo depende de la estructura de la fuente en estudio**. Eso hace de este observable una robusta ayuda para la interferometría de VLBI. No obstante, la clausura de fase también tiene un importante inconveniente: no guarda información alguna de la posición absoluta de las fuentes en el cielo. Si bien sí guarda información de las posiciones relativas entre las componentes que dotan de estructura a la fuente observada, las posiciones absolutas de tales componentes nos son del todo desconocidas si utilizamos las clausuras de fase como información.

En el mapeo de fuentes observadas con VLBI no hay otra manera de proceder más que con el uso de las clausuras de fase. Hablando con todo rigor, nos es por lo tanto imposible conocer la posición absoluta de las fuentes en el cielo utilizando las técnicas de cartografiado de VLBI.

### 2.2.5. Clausuras de amplitud

Al igual que hemos hecho con las fases, también podemos encontrar un observable que dependa de las amplitudes de las franjas de correlación (de las amplitudes de las visibilidades), pero que sea insensible a correcciones de amplitud dependientes de cada antena. El observable en cuestión se denomina **clausura de amplitud**.

Si la amplitud determinada por la línea de base formada por las antenas A y B es  $I_{AB}$ , entonces definimos la **clausura de amplitud** para las cuatro antenas A, B, C y D como

$$C_{ABCD} = \frac{I_{AB} I_{CD}}{I_{AC} I_{BD}} \quad .$$

Es de resaltar que, si bien necesitamos tres antenas para calcular las clau-

suras de fase, las clausuras de amplitud necesitan de cuatro antenas para estar definidas, por lo que tan sólo podemos estar seguros de que tenemos información robusta de la distribución de brillo de las fuentes observadas cuando tenemos, como mínimo, cuatro antenas en nuestro interferómetro.

## 2.3. Calibrado de los datos de VLBI

### 2.3.1. Ganancias de antena

Las ganancias de antena dan cuenta de las correcciones de amplitud y fase que deben añadirse, para cada instante de tiempo, a las señales de los radiotelescopios. Operacionalmente, son números complejos,  $A e^{i\phi}$ , que multiplican a las visibilidades en la forma

$$V_{ij}^{cal}(t, \nu) = A_i A_j V_{ij}^{obs}(t, \nu) e^{i((\Psi_i - \Psi_j) + 2\pi((\tau_i - \tau_j)(\nu - \nu_0) + \nu_0(r_i - r_j)(t - t_0)))} \quad , \quad (2.1)$$

donde  $t_0$  y  $\nu_0$  son el tiempo y frecuencia de referencia de la visibilidad, respectivamente,  $V_{ij}^{cal}$  es la visibilidad calibrada,  $V_{ij}^{obs}$  es la observada y  $A_j$ ,  $\Psi_j$ ,  $\tau_j$  y  $r_j$  son la corrección de amplitud, de fase, de retraso y de ritmo de franja, respectivamente, para la antena  $j$ .

### 2.3.2. Calibrado de las fases

El calibrado de fases en VLBI se realiza en varios pasos. El primero, y más importante, es el llamado **Ajuste de Franjas** o *Fringe Fitting*. Para cada tiempo, este algoritmo organiza las visibilidades de cada línea de base en matrices denominadas *delay-rate* (retraso-ritmo de franja). Las visibilidades producen picos de amplitud en estas matrices, de los que se extraen las fases, retrasos y ritmos de franja residuales de todas las líneas de base del interferómetro. Hecho esto, el algoritmo *Fringe Fitting* encuentra, para cada instante de tiempo, qué correcciones necesitan las antenas para que las visibilidades  $V_{ij}^{cal}$ , en la ecuación 2.1, correspondan a las de una fuente compacta, localizada en el punto de la esfera celeste donde se centró la correlación. Calibrando, pues, con las ganancias correspondientes, se optimiza la coherencia de la correlación, tanto en el espacio de frecuencias como en el de tiempos.

El Ajuste de Franjas da muy buenos estimados de los residuales de fase, retraso y ritmo de franja cuando las fuentes son muy intensas, definiendo picos

muy nítidos en las matrices *delay-rate*. No obstante, para fuentes débiles se dan casos de picos espurios de ruido que pueden llegar a ser mayores que el propio pico de la señal. El *Fringe Fitting* fallaría rotundamente en tales casos, ya que los picos encontrados serían falsos y, por consiguiente, también lo serían los estimados de todos los residuales<sup>2</sup>.

#### Referencia de fase

La esencia de la técnica de referencia de fase (e.g., Beasley & Conway 1995) es hallar estimados de los residuales observando fuentes intensas y usar esos estimados para calibrar los datos de fuentes débiles. En un experimento típico de referencia de fase se suelen estudiar dos fuentes próximas de manera intermitente, a saber, observando una durante un corto intervalo de tiempo (del orden del minuto), observando después la otra durante más tiempo y vuelta a empezar. Este esquema se denomina *beam switching*. Si las fuentes están lo suficientemente cerca una de otra (pudiendo entrar ambas en el lóbulo central de la PSF de cada radiotelescopio) se puede poner a las antenas a observar a una posición intermedia entre las fuentes; el correlador, posteriormente, se encargará de centrar la correlación en una fuente u otra, ya que las visibilidades de ambas fuentes se medirán de manera simultánea. Esta manera de diseñar una referencia de fase se llama observación *in beam*.

Una de las dos fuentes observadas es la que realmente nos interesa estudiar: la *Target Source*, en nuestra jerga. La otra es una fuente intensa que define muy bien los picos de las franjas para ejecutar el *Fringe Fitting*: es la fuente calibradora, o *Cal Source* en nuestra jerga.

La referencia de fase es una técnica muy robusta cuando la distancia angular entre el calibrador y la fuente de interés no es exageradamente grande (del orden de unos grados, como mucho, aunque esto depende de la frecuencia de observación). Gracias a esta técnica se han descubierto y estudiado fuentes muy débiles, como la supernova SN 1993J, usando como calibrador el AGN de su galaxia anfitriona M 81 (ver capítulo 5), que serían totalmente invisibles al interferómetro de no poder “mirar de reojo” fuentes intensas próximas con la ayuda de la referencia de fase.

---

<sup>2</sup>En Martí-Vidal & Marcaide (2008b) hacemos un estudio cuantitativo de cómo estos picos espurios de ruido pueden llegar a generar falsas detecciones en observaciones de VLBI.

### 2.3.3. Calibrado de las amplitudes

Los radiotelescopios son, probablemente, los instrumentos más sensibles del mundo. Si sumáramos el flujo que todas las antenas de VLBI han conseguido correlacionar desde que empezaron a tomar datos, la energía total recolectada no sería suficiente ni para incrementar la temperatura de una gota de agua en una milésima de grado. La unidad típica de densidad de flujo en radioastronomía recibe el nombre de **Jansky** (Jy), en honor a Karl Jansky, ingeniero americano hoy considerado padre de la radioastronomía. Un Jansky equivale a  $10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$ .

Calibrar en amplitudes no es más que multiplicar todas las visibilidades por unos números reales que convierten una amplitud de coeficiente de correlación (sin unidades) en una densidad de flujo (en Jy). La fórmula utilizada para esta calibración es

$$S_{ij} = C_{ij} b \sqrt{(SEFD)_i (SEFD)_j} \quad , \quad (2.2)$$

donde  $S_{ij}$  es la visibilidad calibrada a partir del coeficiente de correlación  $C_{ij}$  y  $(SEFD)_i$  es la *System Equivalent Flux Density* (densidad de flujo equivalente del sistema) de la antena  $i$  (básicamente, es la medida en Jy de la potencia total de la señal grabada). El factor  $b$  tiene en cuenta varias correcciones necesarias de aplicar, como son las pérdidas en la correlación debidas a la digitalización de la amplitud de las señales (a 1 ó 2 bits, generalmente), así como pequeñas correcciones específicas de la estructura interna del correlador.



# Capítulo 3

## Supernovas y su radioemisión

Las explosiones supernova son sucesos tan dramáticos como interesantes. Los titánicos valores que alcanzan las variables físicas involucradas en estas explosiones rebasan con creces las fronteras de nuestra imaginación. Durante esas explosiones, entran en juego en unas condiciones límite las teorías que actualmente forman los pilares de la Física Moderna, desde la Relatividad General hasta la Teoría Cuántica de Campos. Estas explosiones son, pues, un campo de pruebas ideal para contrastar algunas predicciones de tales teorías. Además, hoy es sabido que las supernovas desempeñaron un papel esencial en etapas poco conocidas de la evolución del Universo, como fue la *era de la reionización*. Las explosiones supernova también son las responsables de la existencia de elementos pesados en el medio interestelar, lo que a su vez es necesario para la existencia de vida en el Universo. Los materiales de los que están hechas las páginas de esta tesis o el cerebro que en estos momentos está “procesando” las palabras aquí escritas formaron parte en un momento dado, hace varios miles de millones de años, de una explosión supernova.

Las explosiones supernova no están todavía del todo bien entendidas. Cuando pretendemos dilucidar algunos detalles de la teoría, nos encontramos con varios modelos que pretenden explicar los mismos fenómenos, no habiendo a primera vista ningún resultado observacional que nos ayude a discernir definitivamente entre uno u otro. Es por ello que el buen análisis del mayor número de datos posible relacionados con este tipo de fenómenos extremos es esencial para el futuro avance de la teoría.

En este capítulo haremos primero un repaso a la clasificación de los distintos tipos de explosiones supernova. Nos centraremos después en las supernovas de tipo II, Ib, Ic y IIf, que son las susceptibles de emitir en banda radio,

describiendo también el modelo teórico que pretende explicar el origen de su radioemisión.

### 3.1. Tipos de supernova

La clasificación de los distintos tipos de explosiones supernova se realiza en base a las distintas líneas espectrales (en emisión o absorción) que pueden observarse superpuestas a su emisión continua, así como a las curvas de luz en el óptico (esto es, a la evolución temporal de su brillo).

De este modo, clasificamos las supernovas como (e.g., Filippenko 1997):

#### 3.1.1. Supernovas de tipo I

Son las que no muestran líneas de emisión propias del hidrógeno durante la evolución de su brillo. Dentro de este tipo de supernovas nos encontramos con otras tres subclases:

**Tipo Ia.** Muestran una profunda línea de absorción del silicio, en concreto la SiII ( $\lambda 6200\text{\AA}$ ), cuando su brillo se acerca al máximo. Más tarde, su espectro pasa a estar dominado por líneas de hierro y cobalto.

**Tipo Ib.** No muestran la línea de SiII, pero sí otras líneas propias del helio neutro (HeI) que no aparecen, o bien son muy débiles, en las supernovas Ia. Más tarde, empiezan a ser muy visibles las líneas de emisión de multitud de elementos de masa intermedia, como el oxígeno o el calcio.

**Tipo Ic.** No muestran, ni la línea de SiII, ni las del helio neutro a lo largo de la evolución de su brillo. Al igual que las de tipo Ib, estas supernovas también muestran al cabo del tiempo líneas de emisión de elementos de masas intermedias.

En contraste a sus espectros, las curvas de luz de las supernovas de tipo I son muy similares entre sí.

#### 3.1.2. Supernovas de tipo II

Las supernovas de tipo II son las que muestran líneas espectrales propias del hidrógeno en sus espectros. Tales líneas se mantienen en los espectros durante períodos muy largos de tiempo.

Las curvas de luz de este tipo de supernovas alcanzan su máximo muy rápidamente; en tiempos que van desde unos pocos días hasta, incluso, unas

pocas horas. Además, las curvas de luz producidas en estas explosiones son de formas más variadas que las correspondientes a las de tipo I.

A grandes rasgos, podemos subdividir las supernovas de tipo II de acuerdo precisamente a la forma de sus curvas de luz, llegando a diferenciarlas en:

**Tipo II-L** (II-Linear). Las curvas de luz en estos casos son similares a las de tipo I, aunque la caída en brillo tras el máximo es más abrupta.

**Tipo II-P** (II-Plateau). Las curvas de luz de estas explosiones se caracterizan por mantener un nivel de brillo muy constante después del máximo, empezando a decaer tras un intervalo de *plateau* de unos meses.

#### Escenario físico de las supernovas tipo II, Ib y Ic

Las supernovas de tipo II, Ib y Ic están probablemente producidas por el colapso gravitatorio de estrellas muy masivas (en Schaeffer 2003, y referencias que allí aparecen, se describen los detalles del proceso de colapso, que resumimos a continuación).

Como es bien sabido, las estrellas sintetizan por fusión nuclear elementos pesados a partir de elementos más ligeros. Gracias a estas reacciones nucleares, las estrellas son capaces de generar una presión radiativa suficientemente grande como para poder ayudar a la presión del gas a compensar la fuerza gravitatoria producida por éste.

Los distintos elementos generados en la fusión se van estructurando dentro de la estrella a medida que ésta va pasando por las distintas etapas de evolución estelar correspondientes a la síntesis de cada uno de dichos elementos. A medida que transcurre el tiempo, la estrella acaba adquiriendo una estructura en capas, similar a una cebolla, donde los elementos más pesados quedan en las partes más internas del astro y los más ligeros quedan en las capas externas.

Cuando en el corazón de la estrella llega a generarse hierro ( $^{56}\text{Fe}$ ) la estrategia de la fusión nuclear para liberar energía deja de funcionar, dado que cualquier otra reacción de fusión a partir del hierro es endotérmica. Por lo tanto, en el momento en que la masa de hierro en el interior de la estrella supere cierto límite (cercano al límite de Chandrasekhar), la presión térmica y la de degeneración electrónica del núcleo no serán suficientes para aguantar el peso de toda la estructura estelar, comenzando entonces el colapso gravitatorio.

Durante esa caída libre hacia su destrucción, tanto la presión como la densidad y temperatura aumentan en el núcleo estelar hasta alcanzar valores descomunales. Esas enormes presiones y temperaturas deberían inhibir parcialmente

el colapso, pero en estas condiciones extremas empiezan a producirse **fotodisociaciones** de átomos de hierro y **capturas de electrones**, que catalizan de manera muy eficiente el colapso gravitatorio. Todo este proceso de colapso ocurre en un tiempo del orden de 1 segundo.

La **fotodisociación del hierro** es un proceso mediante el cual los fotones suficientemente energéticos rompen todos los núcleos atómicos en protones, neutrones y partículas  $\alpha$ . Esto empieza a ocurrir a temperaturas del orden de  $10^9 - 10^{10}$  K. Dado que éste es un proceso endotérmico, las fotodisociaciones del hierro enfrían el núcleo estelar, acelerando por lo tanto el colapso.

Las **capturas de electrones** se producen por los protones (ya sean libres, en núcleos atómicos o en partículas  $\alpha$ ), para formar neutrones. Esto produce un déficit de electrones en el núcleo colapsante que disminuye la presión de degeneración y acelera, más aún, el colapso gravitatorio del núcleo. Además, este colapso continuado incrementa la energía de Fermi de los electrones (al haber menos espacio fásico), lo cual favorece nuevas capturas de electrones, dado que hay una mayor sección eficaz para estos procesos. La captura de electrones también libera una enorme cantidad de neutrinos, una fracción de los cuales acaba escapando del núcleo colapsante.

Cuando la densidad en la parte interna del núcleo colapsante sobrepasa los  $\sim 3 \times 10^9$  gr cm $^{-3}$ , la sección eficaz de dispersión de neutrinos es ya suficientemente alta como para impedir que éstos escapen del núcleo en un tiempo inferior a la duración del colapso gravitatorio (Suzuki 1994). Empieza a formarse entonces un mar de neutrinos en el interior del núcleo, conocido como **neutrinosfera**, el cual puede eventualmente frenar las capturas electrónicas cuando se llegue a la degeneración de los neutrinos. Estos neutrinos acabarán escapando del núcleo de manera explosiva, llevándose consigo la práctica totalidad de la energía de la supernova (del orden de  $10^{53}$  erg).

Hidrodinámicamente, el núcleo colapsante puede dividirse en dos partes bien diferenciadas. La parte más interna (y en la que las condiciones termodinámicas son más extremas) colapsa de manera subsónica y homóloga (i. e., velocidad proporcional al radio); la parte más externa colapsa aceleradamente y a velocidades supersónicas (Yahil 1983). Llega un momento en que la densidad de la parte interna del núcleo se acerca a las densidades típicas de los núcleos atómicos. En ese momento, el potencial nuclear fuerte (enormemente repulsivo a escalas nucleares) frena súbitamente el colapso del núcleo interno. El núcleo externo en colapso se encuentra entonces con un núcleo interno com-

pacto y rígido, contra el que rebota de forma extremadamente violenta<sup>1</sup>. En un tiempo del orden de una milésima de segundo (Yahil 1983), se forma una onda de choque muy energética que debería empezar a barrer todo el material estelar, desde las capas más internas hasta las más externas de la estrella.

Sin embargo, hay problemas en la modelización teórica de la expansión de esta onda de choque. En principio, al llegar a la parte más externa del núcleo colapsante, gran parte de la energía de esta onda se perdería al producir las fotodisociaciones de los átomos que aún se encontrasen en la zona (Myra & Burrows 1990). Además, los protones libres tienen una mayor sección eficaz de captura de electrones, por lo que las fotodisociaciones aumentarían las capturas electrónicas, disminuyendo esto la presión de degeneración en la región del choque. Por estas razones, el choque perdería gran parte de su potencia antes de llegar a las capas externas del astro, lo cual no es nada compatible con las observaciones.

Una posible explicación de por qué el choque sobrevive a su expansión en el núcleo es gracias a la enorme cantidad de neutrinos atrapados en la zona (Bethe & Wilson 1985; Suzuki 1994). Estos neutrinos podrían alimentar al choque mediante procesos de absorción por neutrones (lo cual produciría protones y electrones), así como de aniquilación (lo cual produciría pares electrón-positrón) y de dispersión con electrones. Aunque ésta es una posibilidad bastante plausible, cabe decir que el recalentamiento del choque en virtud del transporte de neutrinos es un proceso que aún no está del todo bien entendido teóricamente.

La onda de choque generada en el rebote acaba finalmente barriendo todo el material estelar, donde se producen multitud de elementos (radiactivos algunos de ellos) mientras la temperatura del choque lo permite ( $T \gtrsim 2 \times 10^9 \text{K}$ ) (Arnett et al. 1989). Este proceso se denomina **nucleosíntesis explosiva**. Cuando el choque llega hasta la superficie de la estrella, todos los materiales chocados se expanden entonces contra el medio circunestelar a velocidades del orden de decenas de miles de kilómetros por segundo.

El destino del núcleo colapsante dependerá de su masa. Si ésta sobrepasa el llamado **Límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff**<sup>2</sup>, entre 2 y 3 masas solares (e.g., Vassiliki & Gordon 1996), la presión de degeneración de los neutrones que forman el núcleo tras todas las capturas electrónicas no será suficiente para

---

<sup>1</sup>El lector puede producir un choque cualitativamente similar a éste dejando caer al suelo un vaso de plástico lleno de agua. Si el vaso cae orientado verticalmente, cuando llegue al suelo el agua saldrá disparada hacia arriba a gran velocidad.

<sup>2</sup>Esencialmente, este límite es análogo al de Chandrasekhar, con la diferencia de que en esta ocasión son los neutrones los que generan la presión de degeneración.

vencer a la gravedad, por lo que el colapso continuará hasta formar una singularidad en el espacio-tiempo: un **agujero negro**. En el caso de que no se supere este límite, el núcleo se estabilizará tras la explosión supernova, formándose una **estrella de neutrones**. Aunque ésta es una versión muy simplificada de lo que puede ocurrir realmente. En una supernova real, el núcleo colapsante podría pasar por toda una serie de fases antes del colapso gravitatorio final. El mar de Fermi de neutrones podría dotar a éstos de espacio fásico suficiente como para generar mares de Fermi de otras partículas, incluso exóticas, y podría llegar un momento en el que, a energías suficientemente altas, la aproximación de partones fuese aplicable y el astro se convirtiese en una *sopa de quarks*.

En las supernovas de tipo II, las líneas espectrales del hidrógeno se producirían cuando el material eyectado llegase a la capa más externa de la estrella, donde se encuentra el elemento más ligero de todos cuanto forman el astro: el hidrógeno, el elemento a partir del cual se formaron todos los demás. Las supernovas de tipo II-P (como es el caso de SN 2004et) se producirían cuando la envoltura de hidrógeno de la estrella fuese muy extensa, con una masa del orden de varias masas solares. Este enorme conglomerado de hidrógeno tardaría varios meses en enfriarse, dando esto origen al “plateau” observado en las curvas de luz de este tipo de supernovas.

Las supernovas tipo Ib (en las que no se observan líneas del hidrógeno) y Ic (en las que tampoco se observan líneas del helio) ocurrirían, entonces, en sistemas binarios en los que la estrella compañera hubiera robado por acrecimiento el material de las capas más externas de la estrella colapsante, o bien en estrellas cuyo viento solar fuera lo suficientemente grande como para poder lanzar las capas externas del astro al medio interestelar antes de la explosión.

### 3.1.3. Supernovas tipo Iib (SN 1993J)

Cada supernova tiene algunas características propias que la convierten en un caso único, lo que hace a este tipo de fenómeno algo de difícil clasificación.

SN1993J fue un caso que requirió su propia catalogación dentro de los tipos de supernova, ya que ni sus espectros ni su curva de luz consiguieron encasillarse en la clasificación de tipos I y II hasta entonces aceptada.

Tras un primer pico de brillo en la curva de luz, se detectó 15 días después un segundo máximo, seguido ya de una paulatina y normal caída del brillo, similar a las de las supernovas de tipo Ib/c. Un comportamiento similar a éste (una curva de luz con dos máximos) sólo se había observado una vez, en

SN 1987A, aunque la evolución de SN 1993J entre los dos máximos fue unas cuatro veces más rápida que en SN 1987A (Ray et al. 1993).

Además, el espectro de emisión tras los primeros días de la explosión se correspondía claramente con una supernova de tipo II, dadas las intensas líneas del hidrógeno que se observaron. No obstante, tiempo después las líneas del hidrógeno desaparecieron, siendo sustituidas por otras intensas líneas correspondientes al helio. Este patológico comportamiento en la evolución de SN 1993J fue el que hizo que esta supernova fuese catalogada como una supernova de **tipo I Ib**, ya que pasó de ser una supernova de tipo II a “convertirse” en una de tipo Ib<sup>3</sup>.

El escenario físico donde se cree que tuvo lugar esta supernova es un sistema binario en el que la estrella que explotó perdió gran parte de su envoltura de hidrógeno por acrecimiento de su compañera (e.g., Filippenko et al. 1993). De hecho, dicha compañera fue descubierta más tarde por Maund et al. (2004). La presencia de una estrella compañera explicaría la transición de emisión de líneas de hidrógeno a líneas de helio, dado el rápido enfriamiento de la fina capa de hidrógeno tras el paso de la onda de choque. Este rápido enfriamiento sería también el responsable de la aparición del primer pico de brillo en la curva de luz; el segundo pico sería producido por la posterior difusión de la radiación proveniente de níquel radiactivo (creado a partir del hierro durante la explosión supernova) a través de las eyecciones del material expelido (eyecta).

## 3.2. Radioemisión de supernovas de tipo II, Ib, Ic (y I Ib)

La emisión en banda radio procedente de las supernovas de colapso nuclear es un fenómeno poco común. De hecho, en los últimos 20 años sólo se ha detectado radioemisión en poco más de 20 casos, de entre un total de más de cien supernovas observadas (Weiler et al. 2002).

En el caso afortunado de que se produzca emisión en radio, tenemos la oportunidad de conocer los detalles íntimos de la estructura del material eyectado en la explosión (eyecta), así como del medio circunestelar que el viento

---

<sup>3</sup>Si bien la primera supernova en la que se observó esta metamorfosis entre tipo II y tipo Ib fue SN 1987K (Filippenko et al. 1988), la supernova SN 1993J fue la primera de este tipo en la que se observaron dos máximos en la curva de luz, algo característico de las supernovas I Ib. En el caso de SN 1987K, la falta de mediciones de luminosidad suficientemente tempranas impidió la detección del primer máximo.

solar de la estrella generó en su etapa pre-supernova.

La manera en la que podemos estudiar los eyecta y el medio circunestelar en base al estudio pormenorizado de la radioemisión en supernovas es mediante el llamado **modelo de Chevalier** (Chevalier 1982*a;b*), también conocido como **modelo estándar de emisión de supernovas**. En la siguiente sección presentaremos este modelo.

### 3.2.1. El modelo de Chevalier

El modelo de Chevalier permite relacionar la estructura y evolución de la radioemisión de una supernova con los parámetros provenientes de la modelización hidrodinámica de la interacción de los eyecta con el medio circunestelar.

El modelo hidrodinámico usado por Chevalier describe la expansión de los materiales eyectados (que se supone con simetría esférica) como un choque compuesto por una discontinuidad de contacto (que separaría físicamente los eyecta del medio circunestelar) y dos ondas de choque que se alejarían de la discontinuidad de contacto en sentidos opuestos; una onda chocaría al medio circunestelar (es el llamado **choque frontal** o *forward shock*) y la otra onda chocaría al medio de los materiales eyectados (es el llamado **choque trasero** o *reverse shock*). Mostramos un esquema de este modelo hidrodinámico de interacción en la figura 3.1.

Puede demostrarse que la evolución de un choque de este tipo es autosimilar, siempre que la densidad del medio circunestelar tenga una distribución radial de la forma  $\rho_{cs} \propto r^{-s}$  (con  $s = 2$  en el modelo de Chevalier) y, en la región cercana a la discontinuidad de contacto, los materiales eyectados tengan una distribución radial de densidad de tipo  $\rho_{ej} \propto r^{-n}$ .

En estas condiciones, la expansión de los eyecta se rige por la ley (Chevalier 1982*b*)

$$R(t) = K t^m \quad , \quad (3.1)$$

donde  $K$  es una constante y  $m = \frac{n-3}{n-s}$ . Puesto que  $m < 1$ , la expansión de los materiales eyectados es desacelerada.

Debido a la desaceleración de los materiales eyectados (o sea, de la discontinuidad de contacto), parte de éstos se introduce en el medio circunestelar, liberándose energía en forma de turbulencias. Esto es debido a que la densidad de los eyecta es muy superior a la del medio circunestelar. El tipo de turbulencias generadas bajo estas condiciones recibe el nombre de **Turbulencias**



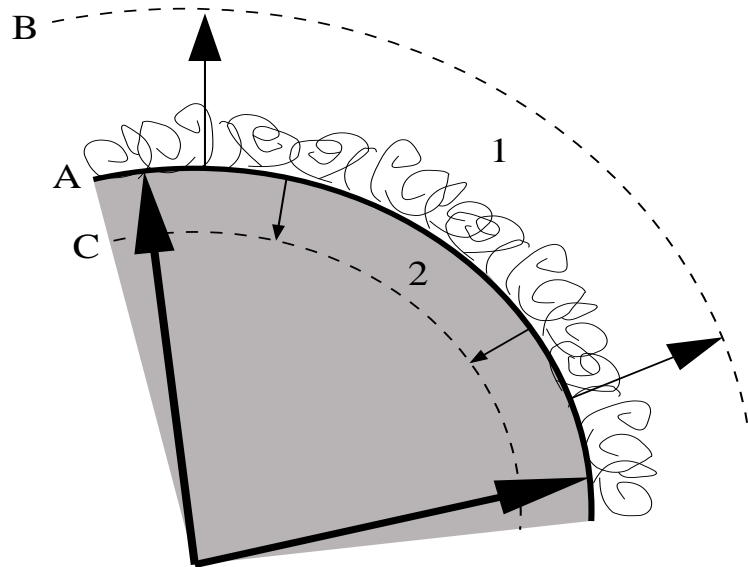


Figura 3.1: Esquema del modelo de Chevalier. La zona sombreada corresponde a los materiales eyectados. La región 1 es la zona circunestelar chocada (donde se produce la radioemisión) y las líneas irregulares representan las inestabilidades de Rayleigh-Taylor. La región 2 corresponde a la zona chocada de los eyecta. La línea A es la discontinuidad de contacto y las líneas B y C son el choque frontal y el choque reverso, respectivamente. Las flechas indican, a nivel cualitativo, los sentidos y módulos de las velocidades de las distintas fuentes de choque.

**de Rayleigh-Taylor.** El flujo turbulento producido por una gota de aceite al caer (y empezar a desacelerar) dentro de un vaso de agua sería un ejemplo de este tipo de fenómenos turbulentos.

Debido a procesos magneto-hidrodinámicos de acoplamiento, los campos magnéticos del medio circunestelar pueden amplificarse notoriamente (más de dos órdenes de magnitud hasta alcanzar decenas de Gauss) en las zonas turbulentas, debido a las vorticidades generadas en el plasma. En el modelo de Chevalier, la densidad de energía de estos campos magnéticos es proporcional a la densidad de energía del choque.

Por otra parte, los campos magnéticos turbulentos, tanto en el choque frontal como en las vecindades de la discontinuidad de contacto, pueden acelerar netamente a los electrones del medio circunestelar, pasando éstos a adquirir energías relativistas por medio de colisiones magnéticas de tipo **Fermi estadístico**. Tras esta aceleración, nos encontraremos con una población de electrones que, en el espacio de energías, obedecerá a una ley del tipo (e.g., Pacholczyk 1970)

$$N(E) = N_0 E^{-p} , \quad (3.2)$$

siendo  $p$  un índice que depende de las características de las nubes magnéticas involucradas en la aceleración. Típicamente, podemos encontrarnos con valores de  $p$  alrededor de 2.5 - 3 (Pacholczyk 1970).

Estos ingredientes (campos magnéticos amplificados del orden de varios Gauss y una población de electrones relativistas en la zona) son los necesarios y suficientes para que se produzca emisión sincrotrón en la región del medio circunestelar chocado (Chevalier 1982a).

En resumen, según el modelo de Chevalier éste sería el origen de la radioemisión observada en las supernovas: **radiación de tipo sincrotrón originada por la interacción de electrones relativistas del medio circunestelar chocado con campos magnéticos amplificados por turbulencias.**

La intensidad de los campos magnéticos amplificados, así como la densidad de población de electrones relativistas, escalarían con las variables hidrodinámicas del modelo de expansión, dado que el tiempo característico de los procesos involucrados en la radioemisión sería mucho más corto que el tiempo característico de evolución hidrodinámica del choque.

### Limitaciones del modelo de Chevalier

Aunque el modelo de Chevalier es capaz de reproducir bastante bien las curvas de luz de la mayoría de las radiosupernovas observadas, aún quedan por esclarecer multitud de detalles con respecto al origen de la radioemisión. Es del todo desconocida, por ejemplo, la distribución de brillo dentro del medio circunestelar chocado, o incluso si la emisión tiene lugar cerca de la discontinuidad de contacto o más bien en la zona del choque frontal.

Para esclarecer estos puntos harán falta muchas más observaciones de radiosupernovas a alta resolución angular y, a ser posible, con una alta relación señal-ruido; algo que en la actualidad es prácticamente imposible, dado el relativamente bajo brillo de este tipo de fuentes (el flujo registrado en los radiotelescopios suele del orden de 1 mJy), así como las distancias extragalácticas que hasta el día de hoy nos separan de estos eventos.

El mejor laboratorio para contrastar el modelo de Chevalier ha sido la supernova SN 1993J. Gracias al relativamente alto flujo que recibimos de esta fuente (pico de unos 100 mJy, Van Dyk et al. 1994), así como a su relativa proximidad a la Tierra (unos 3.6 Mpc) ha sido posible un estudio sistemático

muy preciso, tanto de la evolución de su radioestructura como de su curva de luz en banda radio (e.g., Bartel et al. 2002; Fransson & Björnsson 1998; Marcaide et al. 1997; Pérez-Torres et al. 2001, y la presente tesis). En el capítulo 5 describiremos los resultados de nuestro estudio sistemático de todas las observaciones de VLBI disponibles de esta supernova, comparándolos con los obtenidos por otros autores, tanto a partir de observaciones de VLBI (e.g., Bartel et al. 2002) como a partir de las curvas de luz en radio (Weiler et al. 2007).



# Capítulo 4

## El código *RAMSES*

En la actualidad existen varios códigos para simular la emisión sincrotrón en radiosupernovas, así como su evolución temporal (e.g., Fransson & Björnsson 1998; Pérez-Torres et al. 2001). Sin embargo, estos códigos utilizan las curvas de expansión de las supernovas como dato en las simulaciones, y no como parte del modelo susceptible de ser ajustada. Además, estos programas suponen la constancia del campo magnético a lo largo de toda la región de emisión y no consideran posibles efectos de opacidad en los materiales eyectados en la explosión. Tal y como veremos en el capítulo 5 de la presente tesis, el estudio detallado de la expansión de SN 1993J nos sugiere pequeñas alteraciones al modelo de Chevalier que, hasta donde nosotros sabemos, no han sido todavía implementadas en ningún software de simulación de la radioemisión en supernovas.

En el presente capítulo, describiremos nuestro nuevo código RAMSES (*Radiation-Absorption Modelling of the Synchrotron Emission from Supernovae*), en el que hemos implementado la posibilidad de modelar i) la evolución de la estructura radiativa, así como de la población de electrones, sometidos a campos magnéticos con estructura radial en la región circunestelar chocada, ii) la posible evolución de la opacidad de los materiales eyectados con la frecuencia y el tiempo y iii) la posibilidad de obtener curvas de expansión sintéticas, obtenidas con el mismo método de medida (el *Common-Point Method*, ver apéndice A) que hemos usado para determinar la curva de expansión observacional; para ello, RAMSES tiene también en cuenta los efectos del ruido térmico de los interferómetros de VLBI. En virtud de estas implementaciones, los resultados de RAMSES podrían usarse para modelar las curvas de luminosidad y los tamaños de una supernova en un único ajuste (algo que no se ha hecho

hasta ahora) y podrían también acoplarse simulaciones magneto-hidrodinámicas de la evolución de la región de emisión al propio RAMSES, obteniendo mapas sintéticos y curvas de luz más realistas. Esto último es particularmente interesante, además de fácilmente realizable, puesto que RAMSES tiene la capacidad de poder trabajar con cualquier forma de la estructura de los campos magnéticos, así como con cualquier forma de evolución de la opacidad de los materiales eyectados.

Seguidamente, describiremos con detalle las principales características de RAMSES, las ecuaciones en las que se basa el código y los algoritmos usados para las simulaciones.

## 4.1. Ecuación de evolución de los electrones

RAMSES modela la evolución de la población de electrones relativistas en el espacio de energías utilizando la correspondiente ecuación de continuidad

$$\dot{N}(E, t) = -\nabla_E(\dot{E}N) + S(E, t) - L(E, t) \quad , \quad (4.1)$$

donde  $N(E, t)$  es el número total de electrones con energía entre  $E$  y  $E + dE$  en el instante  $t$ ,  $\dot{E}$  es el ritmo al que cambia la energía de uno de esos electrones,  $S(E, t)$  da cuenta de la inyección de electrones relativistas en la región de emisión entre  $t$  y  $t + dt$  (término fuente) y  $L(E, t)$  da cuenta del escape de electrones de la zona de emisión en el mismo instante de tiempo (término sumidero).

El término con  $\dot{E}$  debe tener en cuenta todos los mecanismos, tanto radiativos como hidrodinámicos, de pérdida y ganancia de energía de los electrones. Seguidamente, desglosaremos todas las contribuciones a  $\dot{E}$  tenidas en cuenta por RAMSES: pérdidas por expansión, pérdidas radiativas (tanto por emisión sincrotrón como por interacciones coulombianas) y ganancias por autoabsorción.

### 4.1.1. Pérdidas por expansión

En la etapa inicial de la expansión, la masa de los materiales eyectados es mucho mayor que la masa del medio circunestelar contra la que dichos materiales van chocando. Esto implica que el trabajo que el medio circunestelar ejerce sobre los materiales que forman el choque es despreciable frente a la

energía del propio choque. Las pérdidas adiabáticas debidas a la expansión serán, por lo tanto, despreciables y podremos considerar que la región chocada se encuentra en expansión libre (adiabática). Nótese que esto no está contemplado en el modelo de Chevalier (Chevalier 1982*a*; *b*), el cual supone un radio inicial infinitesimal al inicio de la expansión y, por lo tanto, una razón constante entre la densidad de material circunestelar (csm) chocado y la de los materiales eyectados.

Durante esta etapa de expansión adiabática, la evolución de los electrones estará gobernada mayormente por pérdidas radiativas. No obstante, a medida que los materiales en expansión penetren más en el medio circunestelar, deberán soportar la inercia de una mayor masa de medio circunestelar chocado, por lo que el choque empezará a resentirse y el trabajo que la presión del medio circunestelar ejercerá sobre la región chocada producirá más pérdidas de energía. El choque dejará entonces de expandirse libremente, entrando la supernova en una fase de desaceleración. De ahí en adelante, la importancia de las pérdidas por expansión (que habrán ganado peso en la evolución de la población de los electrones) irá menguando frente a la importancia de las pérdidas radiativas. Si suponemos que la población de electrones está termalizada con el gas de la zona chocada (i.e., está en equipartición), entonces el ritmo al que cada electrón perderá energía debido a la expansión deberá escalar con el ritmo al que menguará la energía específica del material chocado. Dicha energía deberá, a su vez, escalar con la energía específica (mayormente cinética) del choque frontal, dado que la expansión de la supernova es autosimilar. Esta energía específica va como la velocidad del choque frontal al cuadrado ( $V_{cs}^2$ ). Así pues, la pérdida de energía de un electrón debida a la expansión de la supernova es

$$\left(\frac{\dot{E}}{E}\right)_{ad} = -\frac{\dot{V}_{cs}^2}{V_{cs}^2} \Rightarrow (\dot{E})_{ad} = \frac{2(m-1)E}{t}, \quad (4.2)$$

donde  $m$  es el índice de expansión de la supernova (vid. ecuación 3.1). Nótese que cuando la supernova se encuentra en expansión libre ( $m = 1$ , lo que ocurre cuando  $t$  es pequeño) no se pierde energía debido a la expansión; no obstante, en el marco del modelo de Chevalier, en el que el radio inicial de la supernova es infinitesimal, las pérdidas adiabáticas son muy grandes para tiempos pequeños. Esto no debe preocuparnos, ya que para  $t \rightarrow 0$ , tanto las pérdidas radiativas como el término fuente también se disparan hasta infinito.

### 4.1.2. Pérdidas radiativas

Como ya vimos cuando describimos el modelo de Chevalier, los electrones relativistas emiten radiación sincrotrón al entrar en interacción con campos magnéticos amplificados en la zona circunestelar chocada. El ritmo al que un electrón pierde energía debido a este tipo de emisión es (Pacholczyk 1970)

$$\left(\dot{E}\right)_{sync} = -c_2(\bar{B}_\perp^2)E^2, \quad (4.3)$$

donde  $c_2 = 2.37 \times 10^{-3}$ , en el sistema cgs, y  $(\bar{B}_\perp^2)$  es la componente media perpendicular, respecto de la trayectoria del electrón, del cuadrado del campo magnético (si el campo magnético no es constante en la región de emisión, esta cantidad no tiene por qué ser igual al campo medio perpendicular al cuadrado, i. e.,  $(\bar{B}_\perp)^2$ ).

Por otra parte, los electrones también pueden sufrir pérdidas de energía por efecto Compton inverso. En tal caso, la dependencia de  $\dot{E}$  es también cuadrática con  $E$ , pero la constante de relajación depende de la densidad de radiación a altas frecuencias en la región de emisión, factor del que no tenemos información precisa. Por ello, no tendremos en cuenta el efecto Compton inverso en nuestras simulaciones<sup>1</sup>.

Por último, tenemos las pérdidas debidas a interacciones coulombianas de los electrones con los núcleos atómicos del medio, ya sea debido a la ionización del medio ( $\dot{E}_{ion}$ ) o a la formación de fotones al interactuar con los núcleos (radiación libre-libre,  $\dot{E}_{ff}$ ). Los ritmos de pérdida de energía son (Pacholczyk 1970)

$$\begin{cases} \left(\dot{E}\right)_{ff} &= -n_H f_1 \left(f_2 + \log\left(\frac{E}{m_e c^2}\right)\right) E \\ \left(\dot{E}\right)_{ion} &= -n_H f_3 \left(f_4 + \log\left(\frac{E}{n_H m_e c^2}\right)\right) \end{cases} \quad (4.4)$$

donde  $f_1 = 1.37 \times 10^{-16}$ ,  $f_2 = 0.36$ ,  $f_3 = 1.22 \times 10^{-20}$  y  $f_4 = 73.4$ , en el sistema cgs,  $n_H$  es la densidad de núcleos (que suponemos mayormente de hidrógeno<sup>2</sup>) y  $m_e$  es la masa del electrón.

<sup>1</sup>En Fransson & Björnsson (1998) se analiza la importancia del efecto Compton inverso para SN1993J y se concluye que dicho efecto es claramente inferior al de la radiación sincrotrón durante toda la evolución de la supernova.

<sup>2</sup>El factor de relajación por radiación libre-libre puede cambiar bastante en función de la concentración relativa de distintas especies de núcleos (Pacholczyk 1970).



### 4.1.3. Ganancias por autoabsorción

Una vez vistos los mecanismos de pérdida de energía de los electrones, hablaremos del mecanismo responsable de su ganancia de energía: la autoabsorción sincrotrón. Éste es un proceso mediante el cual los electrones captan parte de la energía que ellos mismos han emitido, debido a saltos cuánticos de los electrones relativistas a distintos niveles energéticos de interacción con los campos magnéticos en los que éstos son acelerados. Dado un campo de radiación propagándose en el seno de un medio en el que se produce autoabsorción sincrotrón, dicha radiación sufrirá un cambio de intensidad dado por la conocida expresión de transferencia radiativa

$$dI_\nu = (\epsilon_\nu + \kappa_\nu I_\nu) dS \quad , \quad (4.5)$$

donde  $\nu$  es la frecuencia de la radiación y  $dS$  es el recorrido diferencial en el que la intensidad  $I_\nu$  ha sido alterada en la cantidad  $dI_\nu$ . Los términos  $\epsilon_\nu$  y  $\kappa_\nu$  son la emisividad y la opacidad sincrotrón, respectivamente. La emisividad da cuenta de las pérdidas radiativas de los electrones, mientras que la opacidad surge de la autoabsorción sincrotrón. Usando los coeficientes de Einstein para describir la emisión y absorción de radiación en equilibrio, puede deducirse (Pacholczyk 1970) que el coeficiente de absorción vale

$$\kappa_\nu = -\frac{K_s}{\nu^2} \int_0^\infty E^2 F(x) \nabla_E \left( \frac{n(E)}{E^2} \right) dE \quad , \quad (4.6)$$

siendo  $n(E)$  la densidad de electrones (con energía entre  $E$  y  $E + dE$ ) y  $K_s = \frac{\sqrt{3}q_e^3 B_\perp}{8\pi m_e}$  (siendo  $q_e$  la carga del electrón). La variable  $x$  es igual a la frecuencia  $\nu$  en unidades de la frecuencia crítica  $\nu_c$ , que se define como aquella en la que un electrón de energía  $E$  radia la mayor parte de su emisión. Esta frecuencia vale, en el sistema cgs,  $\nu_c = 6.27 \times 10^{18} B_\perp E^2$ . Por otra parte, la función  $F(x)$  se define como

$$F(x) = x \int_x^\infty K_{5/3}(z) dz \quad ,$$

siendo  $K_{5/3}$  una función de Bessel de segundo orden. En cuanto a la emisividad sincrotrón, ésta vale

$$\epsilon_\nu = \frac{K_s}{c^2} \int_0^\infty n(E) F(x) dE \quad . \quad (4.7)$$

La ecuación de transferencia radiativa puede entenderse, para cada despla-

zamiento  $dS$  de la radiación, como un balance energético de los electrones en  $dS$ , formado por una pérdida de energía (igual a  $\epsilon_\nu dS dt$ ) y una ganancia de energía (igual a  $-\kappa_\nu I_\nu dS dt$ ). Esa ganancia de energía es la que vamos a calcular en esta sección. Entendiendo de esta forma la ecuación de transferencia, cuando una radiación  $I_\nu$  entra en una zona de grosor  $dS$  con un número  $N(E)$  de electrones, dichos electrones aumentarán su energía en la forma

$$(\dot{E})_{ssa} = \frac{I_\nu}{N(E)} \kappa_\nu(E, B_\perp) dS \quad ,$$

siendo

$$\kappa_\nu(E, B_\perp) = \frac{K_s}{\nu^2} E^2 F(x) \nabla_E \left( \frac{n(E)}{E^2} \right) \quad ,$$

esto es, la contribución de los electrones de energía  $E$  al coeficiente de opacidad. La ganancia total de energía de los electrones será, obviamente, la integral de la ecuación anterior para toda la región de emisión y para todas las frecuencias  $\nu$  (nótese que tanto  $I_\nu$  como  $\kappa_\nu(E, B_\perp)$  varían a lo largo de la región donde radian los electrones relativistas). Por lo tanto

$$\left( \dot{E}N \right)_{ssa} = E^2 \nabla_E \left( \frac{n(E)}{E^2} \right) \int \int \frac{K_s}{\nu^2} I_\nu(S) F(x) dS d\nu \quad , \quad (4.8)$$

donde se supone que  $B_\perp$  (que aparece indirectamente en  $K_s$  y  $x$ ) depende, además, de la zona de emisión (integral de  $dS$ ). Las ecuaciones para la ganancia por autoabsorción usadas en McCray (1969) y Fransson & Björnsson (1998) son casos particulares de esta ecuación que acabamos de deducir. Tanto McCray (1969) como Fransson & Björnsson (1998) utilizan ecuaciones que suponen una constancia del campo magnético a lo largo de toda la región de emisión, así como una alta opacidad de la fuente a la radiación sincrotrón (simplificación que, por otra parte, está bien justificada, ya que la ganancia de energía por autoabsorción sincrotrón es importante precisamente cuando la opacidad de la fuente es alta). Cabe resaltar que el uso de la ecuación 4.8 no sólo se restringe a las simulaciones de *RAMSES* para supernovas, sino que puede ser aplicada para simular cualquier escenario en el que haya emisión no-térmica en presencia de campos magnéticos que varíen notablemente con la posición, siempre que se cumplan unas condiciones básicas que hemos asumido implícitamente en nuestra deducción, a saber: i) que la radiación se encuentre siempre en equilibrio instantáneo con respecto de la distribución de electrones, ii) que la contribución de los electrones a los campos magnéticos amplificados

sea despreciable, iii) que la difusividad de los electrones sea muy alta para el tamaño de la región de emisión, es decir, que la distribución de electrones en el espacio de posiciones (que no de energías) pueda considerarse homogénea y iv) que las líneas de campo magnético estén distribuidas aleatoriamente, de forma que la radiación se despolarice<sup>3</sup>.

Calcular la contribución de la autoabsorción sincrotrón en el espectro de la población de electrones usando la ecuación 4.8 no es trivial. Antes debemos conocer el valor de la intensidad  $I_\nu$  en cada punto de la zona de emisión y para cada frecuencia, para lo cual necesitamos saber cual es la distribución de electrones en el espacio de energías, que es justo la información que buscamos.

#### 4.1.4. Término fuente

El término fuente proviene de la continua aceleración de electrones del medio circunestelar a medida que atraviesan el choque frontal, tal y como vimos cuando describíamos el modelo de Chevalier (ecuación 3.2). Suponiendo que la eficiencia en la aceleración de los electrones relativistas escala con la energía del choque frontal (algo plausible, ya que es en el choque donde supuestamente son acelerados los electrones), tenemos que la densidad de electrones relativistas inyectados en la región de emisión en cada instante será

$$n_{rel} \propto n_{cs} V_{cs}^2 \quad ,$$

donde  $n_{cs}$  es la densidad de electrones en el medio circunestelar recién chocado y  $V_{cs}$  es la velocidad del choque frontal. Con esto, la cantidad total de electrones relativistas introducidos entre  $R$  y  $R + dR$  es

$$N_{rel} = F_{rel} n_{cs}^0 \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-s} V_{cs}^2 4\pi R^2 dR \quad ,$$

donde  $s$  es el índice de densidad del medio circunestelar (recordemos que  $n_{cs} \propto R^{-s}$ ) y donde  $R_0$  y  $n_{cs}^0$  son el radio de la supernova y la densidad del medio circunestelar recién chocado en una época de referencia.  $F_{rel}$  es la fracción de electrones que son acelerados en esa época de referencia (esta fracción es muy pequeña, del orden de  $10^{-4}$ , según Fransson & Björnsson 1998). Estos electrones, además, se han de distribuir en el espacio de energías de acuerdo a  $N \propto E^{-p}$  (desde  $E_{min} = m_e c^2$  hasta infinito), por lo que debere-

---

<sup>3</sup>En caso contrario, la ecuación 4.8 puede modificarse sustituyendo la integral por la suma de dos integrales, una para cada polarización (vid. ecuaciones para  $\kappa_\nu$  en Pacholczyk 1970).

mos multiplicar la expresión por el correspondiente factor integral. Además,  $V_{cs} = V_{cs}^0(R_0/R)(t_0/t)$ , siendo  $V_{cs}^0$  la velocidad del choque frontal en  $t_0$ . Con esto, finalmente tenemos

$$S(E, t) dt = F_{rel} N_{cs}^0 \frac{p-1}{E_{min}^{1-p}} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{5-s} \left(\frac{t_0}{t}\right)^3 E^{-p} dt, \quad (4.9)$$

donde  $N_{cs}^0 = 4\pi n_{cs}^0 R_0^2 V_{cs}^0$  es el número total de electrones del medio circunestelar (csm) que fueron chocados, por unidad de tiempo, en el instante de referencia  $t_0$ .

#### 4.1.5. Término sumidero

Este término da cuenta del escape de los electrones relativistas a través del choque frontal (hacia el medio interestelar) o bien a través del choque reverso (hacia la región de los materiales eyectados ionizados). Puesto que la velocidad del choque es del orden de  $10\,000 \text{ km s}^{-1}$  y los electrones se mueven prácticamente a la velocidad de la luz, es de suponer que habrá un cierto número de electrones que escapará de la región de emisión. Además, la cantidad de electrones escapados será prácticamente independiente de la energía de éstos. La modelización del escape de electrones es complicada, ya que depende de la mayor o menor eficacia de los campos magnéticos para retenerlos en la región chocada. Puede modelarse este término en función de la vida media de un electrón en la región de emisión, en la forma

$$L(E, t) = \frac{N(E, t)}{t_{vm}}, \quad (4.10)$$

donde  $t_{vm}$  es el tiempo de vida media de los electrones en la región de emisión. Cabe esperar que a medida que la densidad de energía de los campos magnéticos vaya disminuyendo (es decir, a medida que la supernova envejezca) aumente la importancia del término sumidero frente a los términos radiativo y adiabático. Esto podría producir un decaimiento exponencial en la densidad de flujo de la supernova que debería afectar prácticamente de la misma forma a todas las frecuencias de emisión. Hablaremos de esto más en detalle en la sección 5.5.1.

## 4.2. Integración numérica de la evolución de los electrones

Una vez descritos todos y cada uno de los términos de la ecuación 4.1, vamos a explicar el algoritmo utilizado por RAMSES para su integración.

### 4.2.1. Aproximación semi-implícita

El ritmo al que evoluciona la energía de los electrones, de acuerdo con la ecuación 4.1, es muy distinto según la energía de éstos. De hecho, la vida media de los electrones debida a las pérdidas sincrotrón y de Coulomb puede cambiar varios órdenes de magnitud a lo largo de todo el espectro de integración (desde 1 hasta  $\sim 10^4$ , en unidades de  $m_e c^2$ ). Por lo tanto, la ecuación 4.1 no se puede integrar con algoritmos sencillos, como la poligonal de Euler o un Runge-Kutta, incluso si aplicamos un mallado variable en la energía y/o el tiempo.

Para tener en cuenta los tan distintos ritmos de evolución de los electrones a lo largo de todo su espectro, realizaremos una integración semi-implícita de la ecuación 4.1. Seguidamente, describiremos esto con más detalle.

Sea la ecuación diferencial  $\dot{N}(E, t) = f(N, E, t)$ . Aplicando la aproximación de diferencias finitas, esta ecuación se traduce en

$$N_{k,i+1} - N_{k,i} = f(N_{k,i}, E_k, t_i) \Delta t \quad ,$$

donde  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  y  $N_{k,i} = N(E_k, t_i)$ . Este tipo de integración no tiene en cuenta los posibles cambios de  $f(N, E, t)$  entre  $t_i$  y  $t_{i+1}$ . Además,  $f$  puede tener una evolución muy distinta en función de  $N$  (e, indirectamente, de  $E$ ). En nuestra aproximación semi-implícita, vamos a tener en cuenta las variaciones de  $f$ , a primer orden en  $\Delta t$ , para cada  $N$ . De este modo, la ecuación diferencial queda en la forma

$$N_{k,i+1} - N_{k,i} = (f(N_{k,i}, E_k, t_i) + (N_{k,i+1} - N_{k,i}) \nabla_N f) \Delta t \quad .$$

Despejando la distribución de electrones en  $t_{i+1}$  tenemos

$$N_{k,i+1} = \frac{N_{k,i} + (f(N_{k,i}, E_k, t_i) - N_{k,i} \nabla_N f) \Delta t}{1 - \Delta t \nabla_N f} \quad . \quad (4.11)$$

### 4.2.2. Aplicación a nuestra ecuación de evolución

Para el caso de la ecuación 4.1, el funcional  $f$  de la ecuación 4.11 vale  $f(N, E, t) = -\nabla_E(\dot{E}N) + S(E, t) - L(E, t)$ . Así pues

$$\nabla_N f = -\nabla_N(N\nabla_E \dot{E} + \dot{E}\nabla_E N) - \frac{1}{t_{vm}} .$$

Si suponemos que  $N$  puede aproximarse localmente a  $g(t) E^{-p}$  (es decir, que podemos describir la distribución  $N$  como una función genérica del tiempo,  $g(t)$ , que escala a la exponencial  $E^{-p}$  con variaciones suaves de  $p$  en el espacio de energías), entonces podemos escribir

$$\nabla_E N = -N \left( \frac{p}{E} + (\nabla_E p) \ln(E) \right) .$$

A partir de esta ecuación, se ve fácilmente que  $N\nabla_N f = -\nabla_E(\dot{E}N) - L(E, t)$ . Sustituyendo en la ecuación 4.11 llegamos finalmente a

$$N_{k,i+1} = \frac{N_{k,i} + S(E_k, t)\Delta t}{1 + \frac{\nabla_E(\dot{E}N)\Delta t}{N} + \frac{\Delta t}{t_{vm}}} . \quad (4.12)$$

Esta es la ecuación que hemos implementado en *RAMSES* para el cálculo de la evolución de los electrones. Cualitativamente, esta ecuación tiene una interpretación sencilla: el numerador nos da el número de electrones con energía  $E_k$ , debidamente corregido con la contribución del término fuente; el denominador actúa como un factor de escalado, relacionado con el término sumidero (recordemos que  $L(E, t)$  va como  $N(E, t)$ ) y también con el gradiente de flujos electrónicos en el espacio de energías alrededor de  $E_k$ . Dicho gradiente de flujos (es decir, el flujo de partículas que van de  $E_{k+1}$  a  $E_k$  menos el flujo de partículas que van  $E_k$  a  $E_{k-1}$ ) nos da directamente el ritmo al que evoluciona el número relativo de partículas en  $E_k$ .

La integración de esta ecuación la realizamos aplicando un mallado logarítmico, tanto en el espacio de energías como en el de tiempos. Esto es así, porque la expansión (autosimilar) de la supernova va como una potencia del tiempo (ver ecuación 3.1) y la distribución de los electrones siempre va a ser muy similar a una potencia de la energía (de hecho, el término fuente, que se encuentra continuamente inyectando electrones relativistas, va como una potencia de la energía). Este tipo de mallado logarítmico optimizará la resolución espectral y temporal para todas las energías y durante toda la expansión de la supernova.

### 4.2.3. Test de *RAMSES*

El código RAMSES ha sido comprobado mediante varios test, para asegurarnos de que todos sus cálculos son correctos. Por una parte, hemos integrado la transferencia radiativa desconectando los términos con  $\dot{E}$ , para comprobar que el código recupera las soluciones analíticas que, en tales circunstancias, tenemos para el espectro de emisión en función del campo magnético, el índice espectral de la distribución de electrones y la densidad de éstos (Pacholczyk 1970).

Por otra parte, hemos calculado el nivel de precisión con el que RAMSES conserva el número de electrones en sus simulaciones (desconectando, por supuesto, el término sumidero). A partir de la ecuación 4.12, y anulando el término sumidero, puede verse fácilmente que el número de electrones  $N_{tot}$  (integrados para todas las energías) introducidos en la región de emisión entre  $t$  y  $t + \Delta t$  viene dado por

$$\frac{N_{tot}(t + \Delta t) - N_{tot}(t)}{\Delta t} = \int_{m c^2}^{\infty} S(E, t) dE - \int_{m c^2}^{\infty} \frac{N(E, t + \Delta t)}{N(E, t)} \nabla_E(\dot{E}N) dE .$$

La segunda integral debería anularse para que el número de partículas se conserve. La razón  $N(E, t + \Delta t)/N(E, t)$  es muy próxima a la unidad en nuestras simulaciones (su efecto integrado es típicamente de un 2–3 por mil), por lo que la segunda integral puede aproximarse sencillamente por

$$\int_{m c^2}^{\infty} \nabla_E(\dot{E}N) dE = \dot{E}N|_{m c^2}^{\infty} .$$

No debemos olvidar que las ecuaciones de todas las contribuciones a  $\dot{E}$  están tomadas en el límite relativista (ver Pacholczyk 1970), por lo que dejan de ser válidas en el entorno  $E \sim m c^2$ . En este entorno de energías, cerca de la masa del electrón<sup>4</sup>,  $\dot{E} \rightarrow 0$ . Por otra parte,  $\dot{E}N \rightarrow 0$  cuando  $E \rightarrow \infty$ , por lo que la integral de arriba, efectivamente, se anula. No obstante, al trabajar con expresiones relativistas para  $\dot{E}$ , RAMSES no anula exactamente el flujo electrónico cuando  $E \rightarrow m c^2$ . Esto produce un ligero escape de electrones a través del borde inferior de la ventana de energías de RAMSES<sup>5</sup>. Además,

---

<sup>4</sup>Aunque las fórmulas de RAMSES no sean exactas en este entorno, cabe decir que los electrones con tan bajas energías no emiten sincrotrón. Así pues, aunque la población de electrones a muy bajas energías no sea simulada con exactitud, esto no afecta en absoluto a las curvas de luz ni a la de expansión simuladas por RAMSES.

<sup>5</sup>No hemos de olvidar que a tan bajas energías la población real de electrones nada tiene

las ventanas de energía usadas en las integraciones de *RAMSES* no pueden llegar hasta infinito, produciendo esto un ligero flujo electrónico desde el borde superior de dichas ventanas, el cual suma una cierta cantidad de electrones a nuestra población, debido mayormente a pérdidas radiativas por emisión sincrotrón. Esto último no significa que el código *RAMSES* no conserve el número de partículas, sino que, más bien, toma en consideración el pequeño flujo de electrones provenientes de energías mayores a las de su ventana de integración (electrones que, por otra parte, existen en la región de emisión). Este flujo, además, es muy pequeño (del orden de una millonésima del término fuente a esas energías).

Otro test realizado a *RAMSES* está relacionado con las contribuciones a  $\dot{E}$ . Tal y como se explica en Pacholczyk (1970), el efecto de las pérdidas radiativas es disminuir, en valor absoluto, el índice espectral de los electrones a energías bajas y aumentarlo a energías altas. Además, la autoabsorción sincrotrón producirá un ligero incremento de la población de electrones en los alrededores de la energía correspondiente a la radiación de frecuencia crítica que empieza a sufrir los efectos de la opacidad sincrotrón. Hemos observado que todos estos efectos aparecen en las poblaciones de electrones simuladas por *RAMSES*. En la figura 4.1 mostramos la distribución de electrones, para varias épocas, resultante de una simulación de *RAMSES*.

### 4.3. Modelado de la opacidad de los electrones térmicos

La opacidad del medio circunestelar (no chocado) a la radiación sincrotrón proveniente de la supernova puede modelarse en base a un decaimiento exponencial provocado por procesos libre-libre con los electrones térmicos de la zona. El argumento de la exponencial,  $\tau_\nu$ , es función de la densidad de electrones del csm y su temperatura, de acuerdo a la expresión (e.g., Pérez-Torres 1999)

$$\tau_\nu = C_f^{-2} \frac{0.17}{\nu^2} \int_R^\infty n_{cs}(r)^2 T(r)^{-3/2} \left( 1 + 0.13 \log \left( \frac{T(r)^{3/2}}{\nu} \right) \right) dr \quad (4.13)$$

---

que ver con la simulada *RAMSES*, no sólo por este escape, sino también porque la región de emisión está totalmente llena de electrones térmicos que no fueron acelerados en el choque frontal ( $\sim 10^4$  electrones térmicos por cada electrón acelerado).



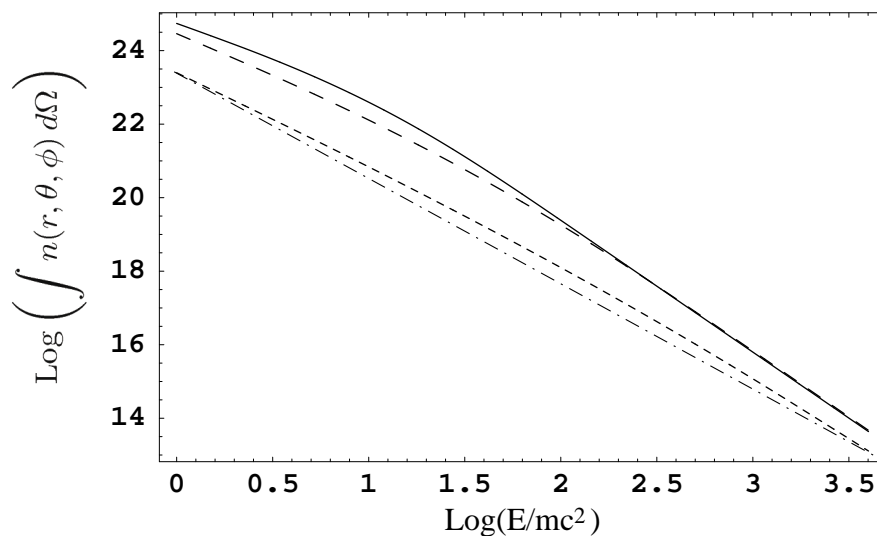


Figura 4.1: Distribución energética de la integral de ángulo sólido (en el choque frontal) de una población de electrones simulada con *RAMSES* (usando los parámetros dados en la sección 4.4). La línea continua es la población a los 10 días tras la explosión (nótese el incremento del número de electrones alrededor de  $E = 10 m c^2$ , producido por la autoabsorción sincrotrón), la línea discontinua de trazo largo es la población a los 100 días y la discontinua de trazo corto la distribución a los 1000 días. La línea más inferior a puntos y rayas es una recta trazada para ayuda visual. Puede apreciarse fácilmente el abombamiento convexo de la distribución de electrones debido a las pérdidas radiativas.

dada en el sistema cgs.  $C_f$  es el factor de compresión del medio circunestelar chocado,  $n_{cs}(r)$ , respecto del no chocado. Este factor vale  $\sim 4$ . Por otra parte,  $T(r)$  es la temperatura de los electrones circunestelares como función de la distancia al centro de la explosión. Dicha temperatura puede modelarse como (e.g., Fransson & Björnsson 1998; Pérez-Torres 1999)

$$T(r) = \text{Max}\left(T_l \times \left(\frac{R_0}{r}\right)^\delta, T_c\right) , \quad (4.14)$$

donde  $T_l$ ,  $T_c$  y  $\delta$  son constantes. Similarmente a como se hace en Fransson & Björnsson (1998), *RAMSES* toma  $T_c = 2 \times 10^5 K$  y  $\delta = 1$ , ajustando el parámetro  $T_l$  a las curvas de luz.

#### 4.4. *RAMSES* paso a paso

Una vez tratados algunos detalles importantes de *RAMSES*, describiremos seguidamente todos los pasos que ejecuta el programa para la modelización de

la supernova. El algoritmo del código *RAMSES* puede descomponerse en los siguientes pasos:

1. Lectura de las condiciones iniciales y de contorno. Éstas son (entre paréntesis mostramos valores típicos):
  - Distancia a la galaxia anfitriona (M 81, 3.6 Mpc).
  - Instantes inicial (2 días) y final (4900 días) de la integración, así como el número de pasos de integración (3000).
  - Factores de Lorentz mínimo (1) y máximo ( $10^4$ ) del espectro de electrones, así como la resolución espectral del integrador (1000).
  - Edad ( $t_0$ , 5.3 días), radio ( $R_0$ ,  $10^{15}$  cm), campo magnético medio ( $\bar{B}_0$ , 60 G), densidad de electrones del medio circunestelar ( $n_0$ ,  $4 \times 10^8$   $e^-$   $cm^{-3}$ ) y fracción de electrones relativistas ( $F_{rel}$ ,  $10^{-4}$ ) en una época de referencia (que no tiene por qué coincidir con la inicial).
  - Índice de expansión  $m$  (0.86) e índice de estructura  $s$  ( $-2$ ) del csm. *RAMSES* también puede trabajar con una curva de expansión formada por dos regímenes (cada uno con un índice de expansión distinto), separados por un *tiempo de rotura* (*break time*). Un modelo de expansión con dos índices describe mejor la curva de expansión observada para SN 1993J (ver capítulo 5).
  - Anchura de la región de emisión en unidades del radio externo de dicha región (0.3, o grosor del 30 % del radio externo), así como la resolución espacial del integrador en la región de emisión (400).
  - Índice  $p$  de la distribución de electrones del término fuente ( $-2.5$ ).
  - Estructura radial del campo magnético,  $B(r)$ , dada como un fichero con los valores de  $B$  (en unidades del campo en la discontinuidad de contacto) en función de la distancia desde la discontinuidad de contacto (en unidades del radio interno de la región de emisión). *RAMSES* interpolará los valores de este fichero para cualquier radio que necesite.
  - Evolución de la absorción de los eyecta, dada como un fichero con los valores del porcentaje de absorción para una serie de tiempos y frecuencias. *RAMSES* interpolará estos valores para los tiempos y frecuencias que necesite. Del mismo modo, *RAMSES* también

leerá el ruido térmico esperable en las imágenes de VLBI para cada frecuencia ( $\sim 0.1$  mJy/haz, dependiendo de la frecuencia). El ruido térmico suele ser menor cuanto menor es la frecuencia de observación.

2. Cálculo de  $B(0)/\bar{B}_\perp$  y  $B(0)/(\bar{B}_\perp^2)$ , así como del vector  $(E_k, N_{k,0})$ , aplicando un mallado logarítmico en  $k$ . Se supone que las trayectorias de las partículas, así como la distribución de líneas de campo magnético, tienen direcciones aleatorias, con lo que, en media, para cada punto de la región de emisión se cumplirá que  $B_\perp^2 = 2/3B^2$ .
3. Cálculo del término fuente y de los términos de pérdida adiabática y radiativa para cada energía  $E_k$  (ecuaciones 4.9, 4.2, 4.3 y 4.4). Por defecto, el término sumidero (ecuación 4.10) suele desactivarse en las simulaciones.
4. Cálculo de los coeficientes de emisión y absorción sincrotrón (ecuaciones 4.6 y 4.7) para cada punto de la región de emisión (suponiendo simetría esférica). Si el campo  $B$  es constante en toda la región de emisión, entonces estos coeficientes también lo serán.
5. Integración de la ecuación de transferencia radiativa (ecuación 4.5) en coordenadas esféricas, a partir de los coeficientes calculados en el paso anterior.
6. Cálculo de la contribución de la autoabsorción sincrotrón en la ganancia de energía de los electrones (ecuación 4.8).
7. Actualización de la población de electrones,  $N_k$ , empleando la ecuación 4.12 y un mallado logarítmico para el tiempo.
8. Síntesis de mapas de VLBI para varias frecuencias, teniendo en cuenta la absorción de los eyecta para cada frecuencia, así como su evolución temporal. En este caso, integramos la ecuación de transferencia radiativa en la dirección del observador.
9. Corrección de la densidad de flujo recibida en los radiotelescopios teniendo en cuenta la opacidad del medio circunestelar, de acuerdo a la ecuación 4.13.

10. Aplicación del Método del Punto Común (CPM, ver apéndice A) para calcular el tamaño de la región a distintas frecuencias. Para este cálculo, el programa corta las imágenes sintéticas por debajo del ruido térmico teórico de VLBI para cada frecuencia.
11. Vuelta al paso 3 para recalcular todas las cantidades en un nuevo instante de tiempo (escalando el campo magnético medio como  $n_{cs} V_{cs}^2$ ). Esta iteración se repite hasta que RAMSES llega al instante final de la simulación.
12. Cálculo de la suma cuadrática de residuos ( $\chi^2$ ), entre las curvas de luz (y la curva de expansión) modeladas y los datos observacionales.
13. Cálculo de nuevos valores para un conjunto de parámetros a elegir, de entre los listados en el paso 1, de forma que se minimice iterativamente la  $\chi^2$  calculada en el paso anterior. Vuelta al paso 2 con este nuevo conjunto de parámetros. Se itera hasta que RAMSES encuentre un mínimo en la  $\chi^2$ .

RAMSES realiza la búsqueda del mínimo de la  $\chi^2$  mediante el algoritmo *Simplex* (e.g., Guardiola et al. 1997), relativamente rápido y robusto, obteniendo de esta forma los valores de los parámetros que optimizan el parecido entre los resultados simulados y los observacionales.

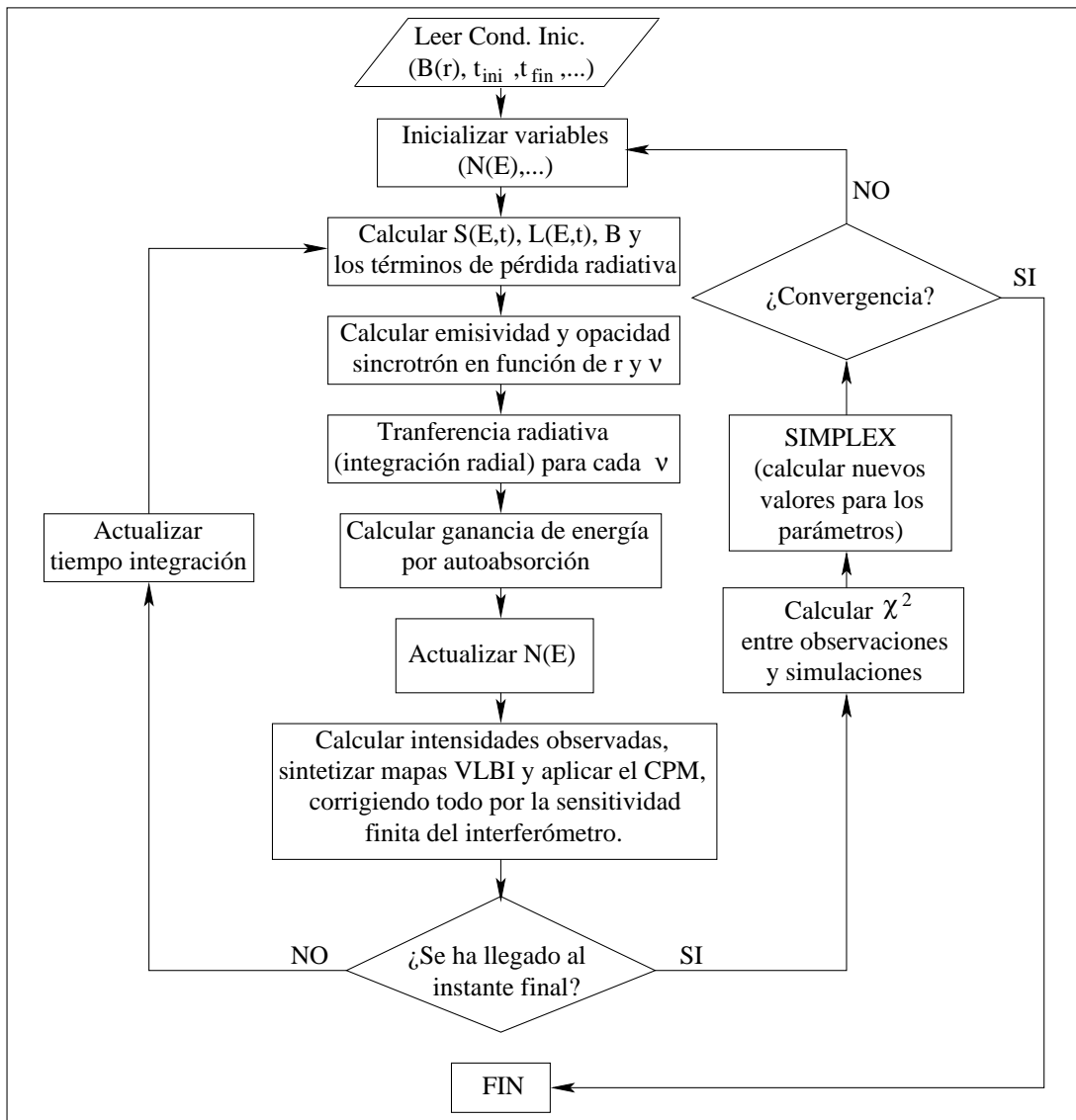


Figura 4.2: Diagrama de flujo (versión muy simplificada) de RAMSES.



# Chapter 5

## Expansion of Supernova SN 1993J

### 5.1. Introduction

Supernova SN 1993J was visually discovered in the nearby galaxy M 81 ( $\alpha = 09^h 55^m 33.173^s$ ;  $\delta = 69^\circ 03' 55.062''$ ) on 28 March 1993 by Francisco García (Ripero et al. 1993). It reached  $m_v = 10.8$  and became the brightest supernova in the northern hemisphere since SN 1954A (see Matheson et al. 2000, and references therein). The relatively small distance to M 81 (3.6 Mpc, Freedman et al. 1994) and the high northern declination of M 81 made SN 1993J to be one of the best observed supernovae, and particularly so at very high angular resolution with VLBI.

Radio emission at 2 cm was detected within two weeks after explosion by Pooley & Green (1993) and radio light curves were soon available at the wavelengths of 1.3, 2, 3.6, 6, and 20 cm (Van Dyk et al. 1994). The high level of radio emission and its high northern declination, made SN 1993J the best case of a radio supernova to be observed with the VLBI technique. The first VLBI observations were obtained during years 1993 and 1994 (Bartel et al. 1994; Marcaide et al. 1994) and have continued for more than a decade. From the analysis of their VLBI data, Marcaide et al. (1995a) found a spherically symmetric shell of width 30 % of the outer radius, Marcaide et al. (1995b) showed the first movie of the self-similar growth of the radio shell over one year, and Marcaide et al. (1997) reported the first evidences of deceleration in the shell expansion, with an estimated expansion index of  $m = 0.86 \pm 0.02$ . Combining this estimate with the study of the opacity due to free-free absorption in the

circumstellar medium (csm) (Van Dyk et al. 1994), a value of  $s = 1.66$  could be obtained for the structure index of the csm, in good agreement with the value  $s = 1.7$  given by Fransson et al. (1996) to explain the X-ray emission. However, such determination of the free-free opacity, and hence of the value of  $s$ , was questioned by Fransson & Björnsson (1998), who instead argued in favor of a constant pre-supernova mass-loss wind ( $s = 2$ ) and emphasized the importance of synchrotron self-absorption. Pérez-Torres et al. (2001) also considered the importance of synchrotron self-absorption in the interpretation of the radio light curves.

The determination of  $m$  also allows for a direct comparison of ejecta density profiles determined from modelling the optical emission spectrum. Baron et al. (1995), using NLTE algorithms fit an early  $n = 50$ , decreasing to  $n = 10$  at later epochs. This later value of  $n$  corresponds (for  $s = 2$ ) to  $m = 0.875$ , totally compatible with the determination by Marcaide et al. (1997). Additionally, such  $m$  is compatible (for the assumed distance of 3.6 Mpc to M81) with expansion speeds of  $14,000 \text{ km s}^{-1}$  reported by Garnavich & Ann (1994) for the early days and  $10,000 \text{ km s}^{-1}$  reported by Fransson et al. (2005) for days 1000-1400 after explosion.

Great effort has been invested in determining the width of the expanding radio shell and the possible evolution of  $m$  as a function of time after explosion. Two groups have been working on independently acquired VLBI data. Each one of them has used different data acquisition and analysis strategies. Bartel et al. (2002) have confirmed the deceleration reported earlier by Marcaide et al. (1997), but have claimed changes in the values of  $m$  for various expansion periods. Those results have been corroborated by numerical simulations made by Mioduszewski et al. (2001), using a rather specific explosion model. Very different results have been obtained by Marcaide et al. (2008, in preparation), which will also be described in this thesis. With regard to the shell width, after the initial estimate by Marcaide et al. (1995a) of  $0.3 \pm 0.1$  times the size of the outer shell radius (totally compatible with the value obtained in this thesis), Bartel et al. (2000) reported on a shell width as narrow as  $0.205 \pm 0.015$ . Later, Bietenholz et al. (2003) revised these estimates of the shell width to obtain  $0.25 \pm 0.03$ , closer to the value reported by Marcaide et al. (1995a), and the value reported in this thesis.

In this chapter, we report on our re-analysis of all the available VLBI data of supernova SN 1993J (the data acquired by Bartel et al.'s group and the data acquired by Marcaide et al.'s group) since 1993 through the end of 2005. We



use several independent algorithms to obtain different expansion curves, and analyze the visibility data in different ways, in order to check the robustness of our results and their independence of the different strategies followed in the analysis.

## 5.2. The Complete Set of VLBI Observations of SN 1993J

We show the complete set of VLBI observations of SN 1993J, from year 1993 through the end of year 2005, in table 5.1. There is a total of 69 observing epochs, many of them at several frequencies.

Date (dd/mm/yy)	Age (days)	Obs. frequency (GHz)						Obs <sup>1</sup>
		22.2	14.8	8.4	5.0	2.3	1.6	
23/04/93	30	X						B
17/05/93	50	X	X	X				B
27/06/93	91		X	X				B
04/08/93	129		X	X				B
19/09/93	175		X	X				B
26/09/93	182			X				M
06/11/93	223		X	X	X			B
22/11/93	239			X				M
17/12/93	264		X	X				B
28/01/94	306		X	X	X			B
20/02/94	329			X				M
15/03/94	352			X	X			B
22/04/94	390			X	X	X		B
29/05/94	427			X				M
22/06/94	451			X	X			B
30/08/94	520			X	X	X		B
20/09/94	541				X			M
31/10/94	582			X	X			B
23/12/94	635			X	X	X		B
12/02/95	686			X				B
23/02/95	697				X			M
11/05/95	773				X			M
11/05/95	774			X	X			B
18/08/95	873			X	X			B
01/10/95	917				X			M

... Continues on the next page

... Continues from the previous page

Date (dd/mm/yy)	Age (days)	Obs. frequency (GHz)						Obs <sup>1</sup>
		22.2	14.8	8.4	5.0	2.3	1.6	
19/12/95	996			X	X			B
28/03/96	1096				X			M
08/04/96	1107			X	X			B
17/06/96	1177				X			M
01/09/96	1253			X	X			B
22/10/96	1304				X			M
13/12/96	1356			X	X	X		B
25/02/97	1430				X			M
07/06/97	1532			X	X			B
21/09/97	1638				X			M
15/11/97	1693			X	X	X		B
18/02/98	1788				X			M
30/05/98	1889				X			M
02/06/98	1893			X	X			B
20/11/98	2064				X			B
23/11/98	2066				X			M
30/11/98	2073						X	M
07/12/98	2080			X		X		B
06/06/99	2261						X	B
10/06/99	2265				X			M
16/06/99	2271				X			B
22/09/99	2369				X			M
28/09/99	2376						X	B
24/11/99	2432				X			B
25/02/00	2525			X				B
06/06/00	2627				X			M
13/11/00	2787			X		X		B
20/11/00	2794						X	M
24/11/00	2798				X			M
14/02/01	2880				X			M
10/06/01	2996				X			B
18/11/01	3157				X			M
26/11/01	3164						X	B
24/05/02	3344				X			B
07/11/02	3511				X			M
17/11/02	3521						X	M
01/06/03	3717				X			B
29/10/03	3867				X			M
25/05/04	4076				X			B
06/06/04	4088						X	B

... Continues on the next page

... Continues from the previous page

Date (dd/mm/yy)	Age (days)	Obs. frequency (GHz)						Obs <sup>1</sup>
		22.2	14.8	8.4	5.0	2.3	1.6	
31/10/04	4235				X			M
11/06/05	4458				X			B
22/10/05	4591				X			M
06/11/05	4606						X	M

Table 5.1: VLBI observations of SN 1993J.

<sup>1</sup> Observer: B = Bartel et al., M = Marcaide et al.

All these observations were made using global VLBI arrays. In nearly all of them (except for some epochs between years 1993 and 1994), the whole VLBA (10 identical antennas of 25 m diameter spread over the USA) and the Phased-VLA (equivalent to a  $\sim 130$  m antenna in New Mexico, USA) were used. Other antennas were used less often (each antenna participated in around 50 % of the epochs): Green Bank (100 m, West Virginia, USA), Goldstone (70 m, California, USA) and part of the EVN (Effelsberg, 100 m, Bonn, Germany; Medicina, 32 m, Bologna, Italy; Noto, 32 m, Noto, Italy; Jodrell Bank, 76 m, Manchester, UK; Onsala, 25 m, Onsala, Sweden; Westerbork, equivalent to 93 m, Groningen, The Netherlands; and Robledo, 70 m, Madrid, Spain). The arrays typically consisted of about 15 antennas at each observing epoch (with the exception of some Marcaide et al. epochs between years 1993 and 1994, with less than 5 antennas).

At each epoch, the observations lasted typically between 12 and 16 hr (with the exception of some shorter Marcaide et al. runs between years 1993 and 1994). Observations scheduled by Marcaide's group were taken at 256 Mbps, using only one polarization and a 2-bit amplitude sampling (in MarkIV format), with the exception of their first seven epochs, recorded at 112 Mbps (1 bit sampling, MarkIII format). For MarkIV observations, a total of 8 subbands, 8 MHz each, were recorded, resulting in a total observing bandwidth of 64 MHz (with the exception of the Phased-VLA, with the bandwidth limited to 50 MHz); for MarkIII observations, a bandwidth of 56 MHz was synthesized. Observations scheduled by Bartel's group were taken at 112 Mbps (1 bit sampling, MarkIII) or 128 Mbps (2 bit sampling, MarkIV) until day 1356 after explosion, and at 256 Mbps (2 bit sampling, MarkIV) in later epochs. When observing at 112 Mbps or 128 Mbps, only one polarization was recorded, synthesizing bandwidths of 56 MHz or 32 MHz, respectively; when recor-

ding at 256 Mbps, both polarizations (RCP and LCP) were recorded, with a total synthesized bandwidth of 32 MHz for each polarization. All data were correlated at the Array Operations Centre of the National Radio Astronomy Observatory (NRAO) in New Mexico (USA), with the exception of the oldest MarkIII epochs of Marcaide group, correlated at the Max-Planck-Institut für Radioastronomie (MPIfR), in Bonn (Germany). In the case of Bartel et al. observations, cross-correlations between LCP and RCP polarizations were also performed, when possible.

The observations were taken in a phase-reference manner, with the exception of the first ten epochs of Marcaide et al. Scans of the radio core of source M 81 (hereafter, M 81\*) were inserted between the scans of the supernova, with duty cycles a few minutes long (from  $\sim 2$  to  $\sim 10$  min, depending on epoch and observing frequency). Fringe finders and flux calibrators, both primary and secondary, were usually observed a few times during each epoch (depending on epoch, the sources 3C 286, 3C 48, 0917+624, 0954+658, and OQ 208 were used).

Other technical details on these observations can be found in Marcaide et al. (1997), Bartel et al. (2002), and referencies therein.

We completely re-calibrated all the epochs of Bartel's group that were observed after year 1995, and all our own phase-referenced epochs, following a uniform strategy (for Bartel et al. epochs earlier than 1995, we adapted their corresponding published results in Bartel et al. (2002) to our analysis strategy, as we explain in section 5.4). For the visibility calibration, we used the NRAO Astronomical Image Processing System (AIPS). We first aligned the visibility phases through all the frequency bands (for all sources and times) by fringe-fitting the single-band delays of one scan of a fringe finder, or flux calibrator, and then applying the estimated antenna delays and phases to all visibilities. Thus, a second fringe-fitting, using now the multi-band delays, provided the new phase, delay, and rate corrections to all the observations. The visibility amplitude calibrations were performed using system temperatures and gain curves from each antenna. We then transferred the calibrated visibilities of M 81\* into the program DIFMAP (Shepherd et al. 1995) and made several iterations of phase and gain self-calibration until obtaining a high-quality image of M 81\*. The M 81\* image and CLEAN model obtained in DIFMAP was used again in AIPS for another fringe-fitting on the M 81\* data. Therefore, the new estimated antenna phases, delays, and rates were free from the (small) structure contributions of M 81\*. Such antenna corrections were then interpolated

into the SN 1993J visibilities using the *AMBG* option of the AIPS task *CLCAL*<sup>1</sup>. The amplitudes of the antenna gains were refined using the CLEAN model of M81\* with the AIPS task *CALIB*. These corrections were then linearly interpolated into the scans of SN 1993J. For the case of Bartel et al. observations, we did not apply any calibration to the cross-polarization data, and all our images and fits were performed using the Stokes I data (i.e., total intensity of the source, RCP + LCP flux densities). At this stage, we edited bad visibilities based on large cross-correlated amplitudes.

## 5.3. Analysis of the SN 1993J VLBI Data

In this section we will describe all the approaches followed in the analysis of the SN 1993J VLBI data, once calibrated as described in the previous section. A first approach consisted in the analysis of the visibility data (i.e., fits of a given source model to the visibilities) which allowed us to estimate the width of the shell-like radio structure and the location of the supernova explosion center, together with its possible change in time. A second approach consisted in an analysis of the supernova expansion in the sky plane, using a new tool (the Common Point Method, described in appendix A) and a refinement of the visibility calibration, described in subsection 5.3.2.

### 5.3.1. Explosion Center and Shell Width

The first step performed in the analysis was directed to precisely determine the location of the supernova explosion center (i.e., the center of the shell-like structure) and its possible evolution in time. This step was essential for a correct determination of the shell size (and width), since an offset from the center may translate into biases in all the analysis strategies reported in this thesis. In order to locate the supernova center, we fitted a simplified shell model to the visibilities. Such a model consisted on the emission of a homogeneous spherical shell of outer radius  $R_{out}$  and inner radius  $R_{in}$ .

Previous analyses of SN 1993J data (Bietenholz et al. 2003; Marcaide et al. 2005), each based on totally different approaches, concluded that there must be some opacity to the radio emission from the ejecta material (which is located

---

<sup>1</sup>Using this option, AIPS tries to find out the possible  $2\pi$  phase cycles introduced in the residuals between the scans of the calibrator source, correcting the phase interpolations of the target source scans.

inwards of  $R_{in}$  in our shell model). However, in Marcaide et al. (2005), we concluded, from our Green-function deconvolution approach, that the ejecta opacity should be maximum, at least for the epochs analysed. On the contrary, Bietenholz et al. (2003) concluded that the ejecta absorption must be as small as 25%, but these authors used a simplified disk-like absorption pattern for the radio emission, model that we consider unrealistic. In order to determine the location of the shell center and to check for any possible biases coming from the use of different absorption models in the fits to the visibilities, we used a shell model with a variable degree of absorption from the ejecta.

The Fourier transform of a shell model with absorption from the inner side does not have an analytical expression. Thus, we generated an interpolating function of such Fourier transform, using the relative shell width,  $\xi = (R_{out} - R_{in})/R_{out}$ , the shell radius,  $R_{out}$ , and the percentage of absorption as interpolating variables for the computation of the  $\chi^2$  of our fits. Any shift of the shell model in the sky plane obviously translates into a plane-wave correction in Fourier space.

Given that the supernova expansion is self-similar (or, at least, nearly-self-similar), the relative shell width remains almost unchanged during all the expansion. Thus, the relative shell width of our fitting model was kept fixed in the estimate of the outer shell radius and the location of the explosion center. However, a correct value of the shell width must be obtained in order to avoid possible biases in the supernova size estimates by model fitting. We used, as relative shell width, the average of the estimates of the relative shell widths obtained from fitting our shell model to the data of our best epochs (i.e., with good UV coverages and large signal-to-noise ratios). The epochs selected for such fits were all at 5 GHz between days 1638 and 2369 after explosion (we only used data at 5 GHz in order to avoid any bias originating from possible spectral effects in the source structure). From all those 10 epochs, we fitted the relative shell width, the supernova radius, the location of the shell center, the percentage of absorption, and the total flux density, obtaining an average relative shell width of  $\xi = 0.31 \pm 0.02$  (and an average percentage of absorption of  $(80 \pm 8)\%$ ).

Fitting the visibilities to a shell model with maximum ejecta absorption and a relative shell width of 0.31, we estimated the shell size and the position of the supernova explosion center for all epochs observed since 1995. Changing the shell width, or the percentage of absorption, at a  $3\sigma$  level did not change the estimates of the explosion center coordinates above the  $1\sigma$  level. The shifts

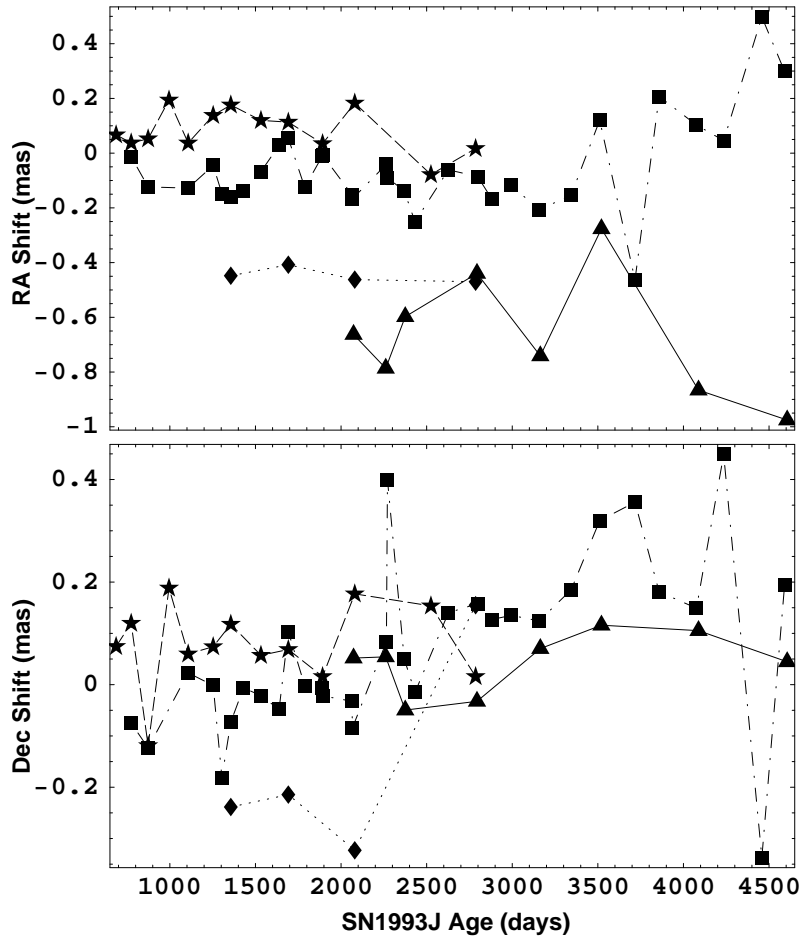


Figure 5.1: Shifts in right ascension and declination of the SN 1993J explosion center, relative to the correlation position of the supernova at epoch 1889 days after explosion. Stars are shifts at 8.4 GHz, squares at 5.0 GHz, diamonds at 2.3 GHz, and triangles at 1.8 GHz. Notice the increase of scattering in the 5 GHz results, beginning on day  $\sim 3000$  after explosion, due to the decrease of data quality as the supernova expands.

obtained in  $\alpha$  and  $\delta$ , with respect to the position used in the correlation of the SN 1993J data at the epoch of day 1889 after explosion, are shown in figure 5.1.

Looking at figure 5.1 we reach several conclusions. The first one is that the location of the explosion center of the supernova seems to be different at different frequencies (having assumed the same location for M 81\* at all frequencies, see below). In fact, we find an average shift of  $-0.62 \pm 0.04$  mas in  $\alpha$  and  $-0.02 \pm 0.02$  mas in  $\delta$  between the explosion centers estimated at 5 GHz and 1.6 GHz; the average shift between 5 GHz and 2.3 GHz is  $-0.40 \pm 0.04$  mas in  $\alpha$  and  $-0.2 \pm 0.1$  mas in  $\delta$ ; the shifts between 5 GHz and 8.4 GHz are smaller

( $0.13 \pm 0.3$  mas in  $\alpha$  and  $0.01 \pm 0.03$  mas in  $\delta$ ). Obviously, since the explosion center cannot depend on the observing frequency (in the frame of the Chevalier model), these shifts may come from shifts in the position of the brightness peak of M 81\* at different frequencies. In fact, according to the standard jet interaction model (Blandford & Konigl 1979) there should be spectral shifts in the brightness peaks of the VLBI core-jet structures due to the frequency-dependent transition of the ejected material from optically thick to optically thin, in terms of the synchrotron radiation, as first found by Marcaide & Shapiro (1984) and later confirmed in many cases (e.g., Kovalev et al. 2008). According to this model, as the observing frequency increases, the brightness peak of the VLBI core-jet image should shift closer to the central black hole. Thus, we could assign all the systematic frequency-dependent shifts in the supernova explosion center to shifts in the brightness peak of M 81\*. Similar results of the spectral shift of M 81\* were reported by Bietenholz et al. (2004), who estimated the position of the real core (i.e., the central black hole) of M 81\* by finding a sharp bound in the radio emission at all frequencies, taking these shifts and the different sizes of the radio structures into account. Given the South-West position of SN 1993J relative to M 81\* we would expect to have negative shifts in  $\alpha$  and  $\delta$  for lower frequencies, just as we are finding, but all the shifts in  $\delta$  are much smaller than in  $\alpha$  (in fact, compatible with zero).

On the other hand, regardless of the systematic shifts between frequencies, the location of the supernova explosion center does not clearly evolve in time with respect to the phase calibrator, at least up to our precision level. Hence, we assign the shifts to M 81\* and, consequently, we will use the same position for the supernova explosion center at all epochs taking into account the corresponding shifts at different frequencies, by centering the SN 1993J images according to the mean frequency-dependent shifts given above.

### 5.3.2. Imaging Strategy of SN 1993J VLBI Data

The flux density of a radio supernova continuously decreases, after reaching the corresponding maximum at each frequency. For SN 1993J, the maximum flux density registered was  $\sim 100$  mJy at 5 GHz, and it decreased to only 6–7 mJy for the last epochs here reported. Thus, even though SN 1993J is the supernova with the highest apparent magnitude in radio ever observed, it was difficult to obtain high-quality VLBI images, specially for the latest epochs, when the very low flux densities are spread over a large shell structure



with a radius of several milli-arcseconds. Moreover, special care had to be taken in applying typical calibration techniques (like phase self-calibration) to noisy data, given that these techniques may bring undesirable results, even to the extent of creating strong spurious sources from pure noise (e.g., Martí-Vidal & Marcaide 2008*b*).

The SN 1993J images obtained from phase-referenced calibrated visibilities could certainly be improved in most cases, but we had to be very careful in order to avoid introducing biases in the measurement of the supernova evolution. We refined the phase calibration of the SN 1993J visibilities by applying a special self-calibration iteration. For each epoch observed after 20 September 1994<sup>2</sup>, the imaging strategy had the following steps:

1. We imaged the supernova in DIFMAP using the visibilities just calibrated in AIPS. The image thus obtained was then used for performing an initial estimate of the supernova size using the Common Point Method.
2. We shifted the data in the sky plane, centering the shell at the correlation position. By doing this, the visibility phases alternate between 0 and  $\pi$  as a function of uv-distance, given that the supernova structure has a high circular symmetry during all the expansion and the Fourier transform of a circularly symmetric (centered) source is real. We then used this circumstance to our benefit by self-calibrating the phases of the first and second lobes of the visibilities (see figure 5.2) to a model with constant phases of 0 and  $\pi$ , respectively. The uv-distance at which there is the transition between the first and second lobes was estimated by scaling the uv-distance of such transition at a reference epoch<sup>3</sup> to the size determined in step 1. Given that the self-calibration solutions are antenna-dependent, the solutions obtained using these short baselines also improved the phases of the longer baselines. This self-calibration was performed to obtain one solution every 5 minutes. We notice that moderately large errors in the estimate of the transition zone between the first and second lobes of the visibility function have small effects on the final calibrated phases, since the phases are ill defined near the amplitude nulls (i. e., near the transition zone between 0 and  $\pi$  radians).

---

<sup>2</sup>In performing these steps we used the Common Point Method, and such method applied to earlier epochs would require an extreme over-resolution of the images

<sup>3</sup>We selected the epoch of day 1889 after explosion, because the high quality of the phases allowed for a good estimate of such transition

3. We performed a second imaging iteration, using the data calibrated in step 2. To avoid any bias in the measurement of the supernova expansion, we used a dirty dynamic beam, similar in concept to the dynamic beam used in Marcaide et al. (1997). This was achieved by tapering the visibilities with a gaussian that scaled, in Fourier space, as the inverse of the shell size determined in step 1. The absolute size of the gaussian taper was chosen such that its half value would approximately fall at the center of the third lobe of the visibility function (see figure 5.2).

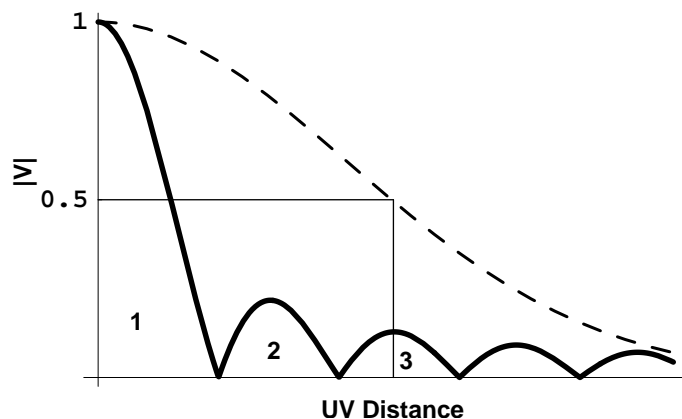


Figure 5.2: Schematic representation of the SN 1993J amplitude visibility function and the taper used in our mapping procedure. The continuum line represents the (normalized) visibility amplitude of SN 1993J as a function of UV distance. As the supernova expands, the axis of UV distance is stretched, but the behavior of the continuum line remains unchanged (as long as the expansion is self-similar). The lobes in visibility amplitude are marked with numbers. Each boundary between amplitude lobes translates into a transition in phases between 0 and  $\pi$  radians (or viceversa). The dashed line represents the taper used in our imaging procedure.

The images obtained after step 3 were very similar to those obtained in step 1, with the exception of the images with lowest dynamical range (e.g., at 5 GHz, from an age of  $\sim 2000$  days onwards). The results of applying the CPM to the images obtained in step 1 and step 3 are not systematically discrepant, but the expansion curve obtained with the CPM applied to the images from step 3 is of higher quality, as we show in section 5.4.

### 5.3.3. Analysis in Fourier Space

In order to allow a comparative analysis of the results here reported with previous results of other researchers (Bartel et al. 2002) obtained using an

analysis in Fourier space, we also analyzed all the VLBI data in Fourier space. This brings more completeness to our analysis and also more robustness to our conclusions, but we warn the reader that the results that we consider definitive for the supernova expansion are those obtained as already explained in section 5.3.2. We will describe here the analysis scheme used in Fourier space.

Since the imaginary part of the visibilities is close to zero at all times, due to the high circular symmetry of the source structure (see section 5.4.5), we only used the real part of the visibilities in the fits. The data were weighted using a taper (similar in profile to that used in the mapping described in the previous section) in order to downweight the data from noisy long baselines and thus avoid model-dependent biases as the source size increases. The model used to fit the data was an optically thin shell with total suppression of the emission coming from behind the ejecta (i. e. a model with total opacity by the ejecta). The free parameters in the model-fitting were the source flux density and size. The relative shell width was fixed to 0.31 times the outer radius (see section 5.3.1). Since the real part of the visibility function has circular symmetry (as it is the case of the source structure) we azimuthally averaged the real part of the visibilities in order to increase the SNR of the data. The radial binning of such average was made using bin sizes that scaled inversely with the source size and thus always sampled the visibility function in the same manner. The fits were performed using the Levenberg-Marquardt (Gill & Murray 1978) non-linear least-square minimization algorithm, as implemented in the program Mathematica 5.0 (Wolfram 2003).

We show in figure 5.3 two examples of the results obtained from fitting our shell model to the SN 1993J visibilities.

## 5.4. Expansion of SN 1993J. Results and Discussion

The CPM analysis of all the images of SN 1993J obtained in step 3 of subsection 5.3.2, yields the shell radii shown in table 5.2. For epochs earlier than 20 September 1994, the supernova sizes cannot be measured with the CPM (it would need large over-resolutions of the images). Therefore, we determined the shell sizes for Marcaide et al. data from fits to the visibilities (as described in the previous section), and the sizes for Bartel et al. (2002) data were just taken from the publication. The shell sizes determined were then transformed

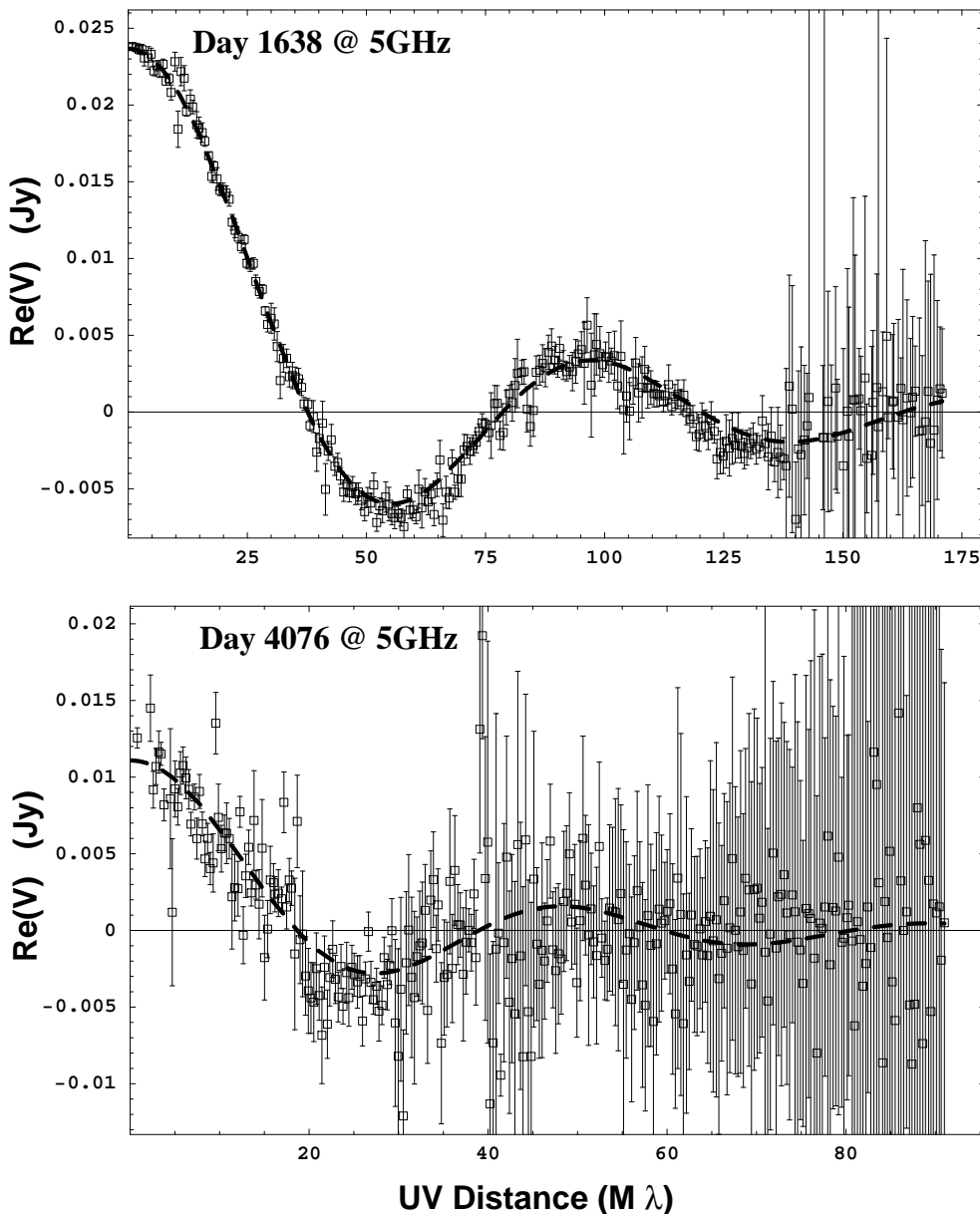


Figure 5.3: Azimuthal averages of the real part of the visibilities corresponding to the epochs of day 1638 (above) and 4076 (below) after explosion. Dashed lines correspond to the shell model fitted to the visibilities, as explained in section 5.3.3. The error bars are scaled to make the reduced  $\chi^2$  equal to unity in each case. We can clearly see how the quality of the data (and the fits) decreases as the supernova expands.

into CPM sizes by multiplying them with the corresponding biases, obtained theoretically from numerical simulations. The factor for converting the results published by Bartel et al. (2002) into CPM-like results is 1.056, for sizes of  $\sim 1$  mas and an emission structure given by a shell width of 0.3 times the ou-

ter radius and a maximum absorption from the ejecta. This factor is close to unity. It must be said that for very early epochs, when the synchrotron self-absorption is large, a shell model does not reproduce the supernova structure well, since the emission pattern of a spherically symmetric optically thick source is disk-like. Moreover, the transition from optically thick to optically thin, in terms of the synchrotron radiation, is frequency dependent. Therefore, we would expect to have some frequency-dependent biases in the expansion curve determined for very early epochs (before day  $\sim 200$  after explosion) should we use all the early data. To avoid these problems, we did not include the few 22.2 GHz and 14.8 GHz observations of Bartel et al. in the fits described in this section<sup>4</sup>.

Age (days)	CPM Radius (mas)	Age (days)	CPM Radius (mas)
<b>Data at 8.4 GHz</b>			
50	$0.137 \pm 0.005$	91	$0.270 \pm 0.006$
129	$0.356 \pm 0.008$	175	$0.459 \pm 0.009$
182	$0.485 \pm 0.007$	223	$0.574 \pm 0.009$
239	$0.63 \pm 0.03$	264	$0.728 \pm 0.011$
306	$0.812 \pm 0.014$	330	$0.82 \pm 0.03$
352	$0.883 \pm 0.014$	390	$1.015 \pm 0.017$
427	$1.02 \pm 0.04$	451	$1.088 \pm 0.017$
520	$1.28 \pm 0.02$	582	$1.38 \pm 0.02$
635	$1.42 \pm 0.02$	686	$1.52 \pm 0.08$
774	$1.6 \pm 0.2$	873	$1.73 \pm 0.16$
995	$2.11 \pm 0.06$	1107	$2.41 \pm 0.18$
1253	$2.50 \pm 0.10$	1356	$2.65 \pm 0.06$
1532	$2.90 \pm 0.13$	1692	$3.14 \pm 0.07$
1892	$3.46 \pm 0.07$	2080	$3.74 \pm 0.09$
2525	$4.43 \pm 0.09$	2786	$4.77 \pm 0.13$
<b>Data at 4.9 GHz</b>			
223	$0.579 \pm 0.017$	306	$0.80 \pm 0.02$
352	$0.884 \pm 0.014$	390	$0.978 \pm 0.017$
451	$1.120 \pm 0.017$	520	$1.26 \pm 0.02$
541	$1.145 \pm 0.05$	582	$1.38 \pm 0.02$
635	$1.47 \pm 0.02$	697	$1.48 \pm 0.07$
774	$1.66 \pm 0.07$	774	$1.68 \pm 0.10$
873	$1.85 \pm 0.07$	917	$1.92 \pm 0.07$
996	$2.15 \pm 0.11$	1096	$2.21 \pm 0.05$

... Continues on the next page

<sup>4</sup>Including these few data in any of the fits described later does not affect our results above the  $0.5\sigma$  level.

... Continues from the previous page

Age (days)	CPM Radius (mas)	Age (days)	CPM Radius (mas)
1107	$2.1 \pm 0.2$	1177	$2.31 \pm 0.07$
1253	$2.51 \pm 0.08$	1304	$2.61 \pm 0.04$
1356	$2.62 \pm 0.11$	1430	$2.81 \pm 0.09$
1532	$2.86 \pm 0.06$	1638	$3.09 \pm 0.05$
1692	$3.13 \pm 0.15$	1788	$3.37 \pm 0.05$
1889	$3.48 \pm 0.06$	1892	$3.43 \pm 0.09$
2063	$3.73 \pm 0.16$	2066	$3.74 \pm 0.07$
2265	$4.07 \pm 0.08$	2271	$4.1 \pm 0.3$
2369	$4.12 \pm 0.07$	2431	$4.3 \pm 0.2$
2627	$4.52 \pm 0.10$	2798	$4.76 \pm 0.18$
2880	$4.94 \pm 0.12$	2995	$5.00 \pm 0.14$
3157	$5.21 \pm 0.18$	3344	$5.49 \pm 0.18$
3511	$5.77 \pm 0.19$	3717	$6.0 \pm 0.2$
3858	$6.34 \pm 0.18$	4076	$6.5 \pm 0.3$
4235	$6.3 \pm 0.2$	4458	$6.6 \pm 0.3$
4591	$6.6 \pm 0.3$	—	—
<b>Data at 2.3 GHz</b>			
390	$1.00 \pm 0.05$	520	$1.29 \pm 0.05$
635	$1.48 \pm 0.05$	1356	$2.52 \pm 0.18$
1693	$3.2 \pm 0.5$	2080	$3.77 \pm 0.07$
2787	$4.9 \pm 0.4$	—	—
<b>Data at 1.6 GHz</b>			
2073	$3.78 \pm 0.07$	2261	$4.11 \pm 0.07$
2375	$4.28 \pm 0.07$	2794	$5.01 \pm 0.13$
3164	$5.59 \pm 0.17$	3521	$6.15 \pm 0.18$
4088	$6.7 \pm 0.2$	4606	$7.0 \pm 0.3$

Table 5.2: Results of the supernova radius measured with the CPM. For epochs before year 1995 from Bartel et al. (2002), we scaled the published results to CPM results (see text) and from Marcaide et al., we also scaled the sizes estimated by us from modelfitting to the visibilities to CPM results (see text). Errors are scaled to make the reduced  $\chi^2$  of the expansion models equal to one (see section 5.4.1).

In figure 5.4 we show the contour maps obtained as described in section 5.3.2 for observations made around October, every year, since 1993 through 2004.

In figure 5.5, we show the expansion curve resulting from the values reported in table 5.2. Looking at this figure, it is very clear that supernova radii measured at 1.6 GHz are systematically larger than those measured at higher

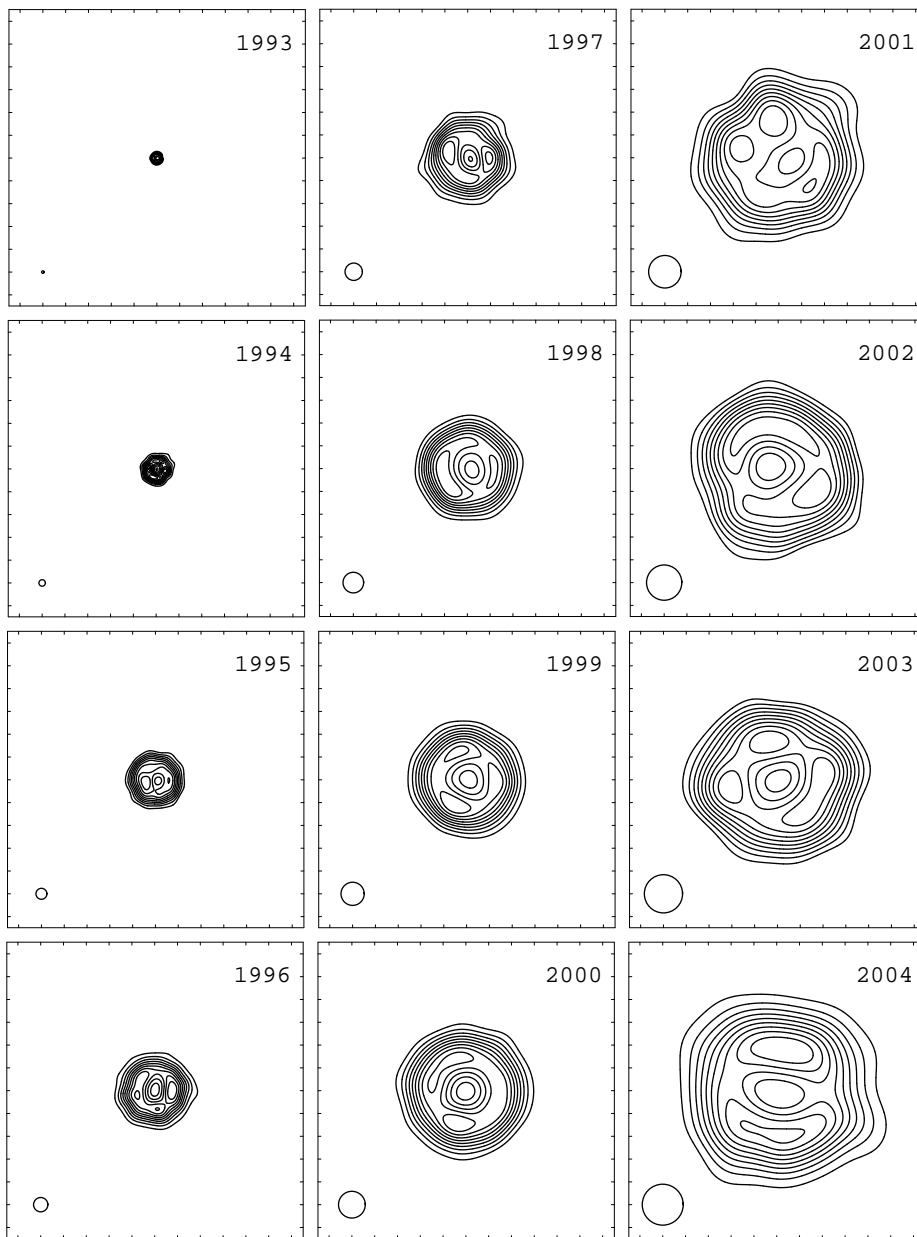


Figure 5.4: Contour maps of SN 1993J corresponding to epochs around October, from year 1993 through year 2004. The FWHM of the beam used to restore each image is shown at bottom left. Contours shown correspond to (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90) % of brightness peak. Tick separations are 2 mas.

frequencies and similar epochs. In contrast, sizes measured at all the other frequencies are more similar. This effect can also be seen in the expansion curve resulting from the CPM applied to the supernova images obtained from the phase-reference calibrated visibilities, as can be seen in figure 5.6, and in the expansion curve resulting from the model-fitting analysis described in section

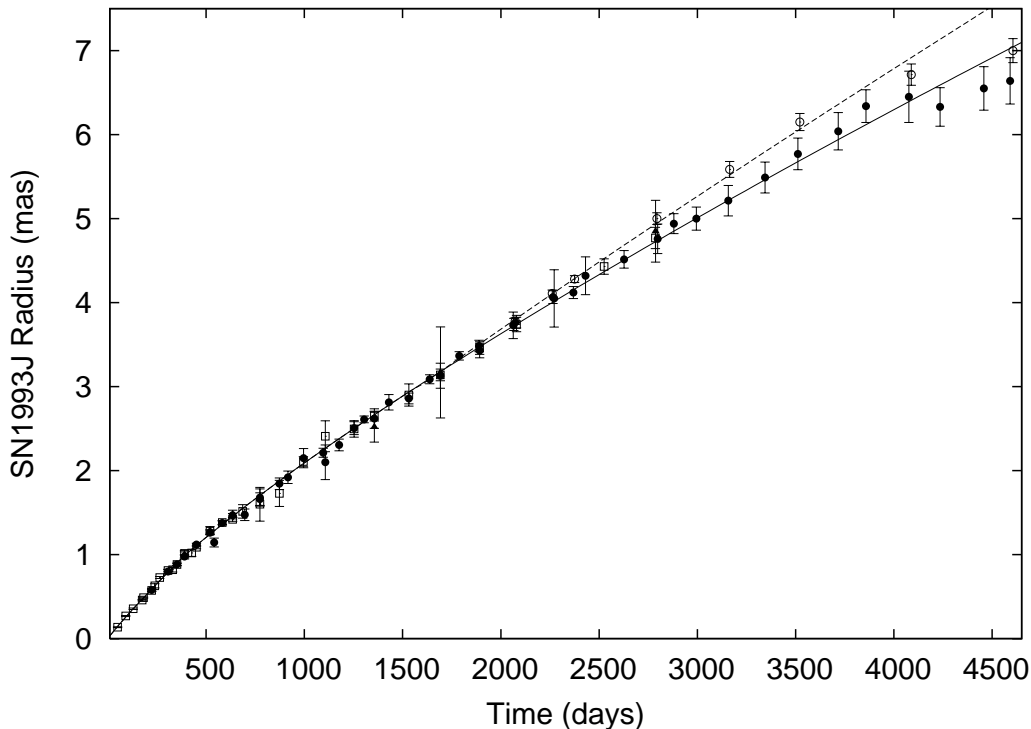


Figure 5.5: Expansion of supernova SN 1993J, resulting from the CPM applied to the images obtained from the mapping process described in section 5.3.2. Empty squares are data at 8.4 GHz; filled circles, data at 5 GHz; triangles, data at 2.3 GHz; and empty circles, data at 1.6 GHz. The dashed line corresponds to the model given by equation 3.1, fitted to 1.6 GHz data (except the last, too low, data point). The continuum line is the model given by equation 5.1, fitted to the data at higher frequencies (except the three latest, too low, data points).

5.3.3, as can be seen in figure 5.7 (although less clearly, given the larger scatter for the latest epochs). *Thus, the systematic dependence of the shell size on the observing frequency is independent of the method used to determine such size.* We will discuss possible reasons for this systematic dependence in section 5.5. Here, suffice to say that this systematic difference between sizes makes statistically questionable the use of data at all frequencies in the modelling of the expansion curve, as it was done by Bartel et al. (2002). Such strategy likely introduced biases in the results published in Bartel et al. (2002), as we will also discuss in section 5.4.3.



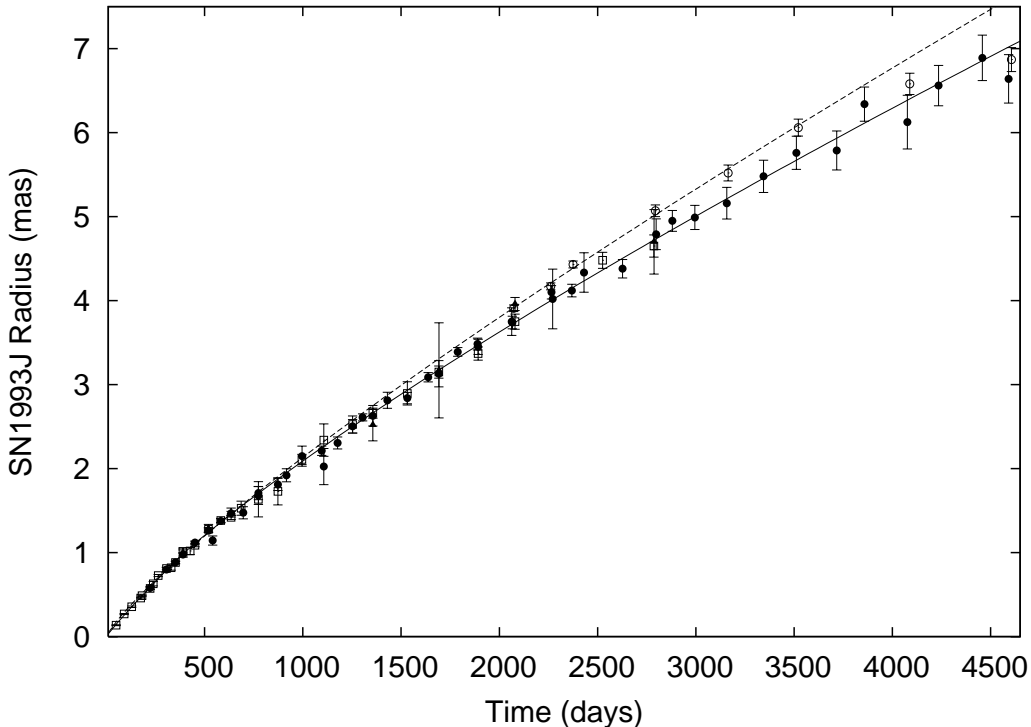


Figure 5.6: Expansion of supernova SN 1993J, resulting from the CPM applied to the images obtained from the phase-referenced visibilities. Empty squares are data at 8.4 GHz; filled circles, data at 5 GHz; triangles, data at 2.3 GHz; and empty circles, data at 1.6 GHz. The dashed line corresponds to the model given by equation 3.1, fitted to 1.6 GHz data (except the latest two, too low, data points) and the continuum line corresponds to the model given by equation 5.1, fitted to the data at higher frequencies.

#### 5.4.1. Expansion (CPM Results)

We show in figure 5.5 several weighted-least-square fits of the supernova radius,  $R$ , as a function of time. The last four epochs were excluded from the fits, since they clearly depart from the general behavior. The fit shown as a continuum line uses all data at 8.4 GHz and 5 GHz, and fits a model with 4 parameters: two expansion indices ( $m_1$  and  $m_2$ ), a break time ( $t_{br}$ ) between the expansion regimes given by each expansion index, and the supernova size at the break time ( $r_{br}$ ). The expression of the fitting model is:

$$R(t) = \begin{cases} r_{br} (t/t_{br})^{m_1}, & t < t_{br} \\ r_{br} (t/t_{br})^{m_2}, & t \geq t_{br} \end{cases} \quad (5.1)$$

The uncertainties of the measured radii were uniformly scaled to make the reduced  $\chi^2$  equal to unity (the resulting uncertainties are those shown in table

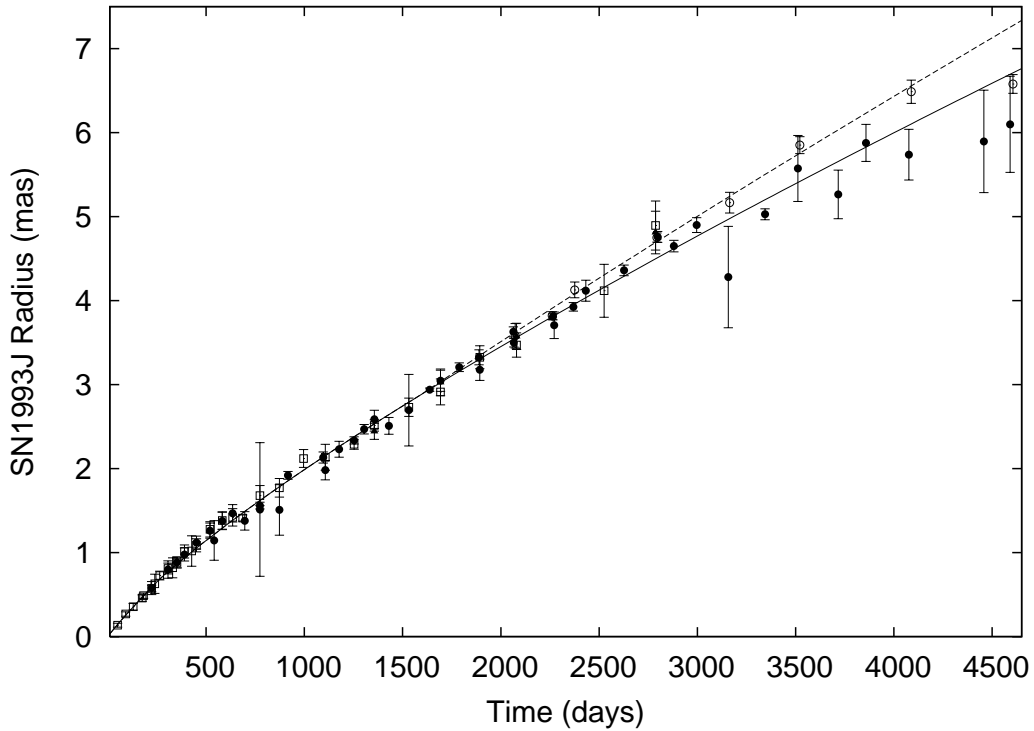


Figure 5.7: Expansion of supernova SN 1993J, resulting from the modelfitting described in section 5.3.3. Empty squares are data at 8.4 GHz; filled circles, data at 5 GHz; triangles, data at 2.3 GHz; and empty circles, data at 1.6 GHz. The dashed line corresponds to the model given by equation 3.1, fitted to 1.6 GHz data (except the last, too low, data point). The continuum line corresponds to the model given by equation 5.1, fitted to the data at higher frequencies.

5.2). The results of the fit to the 8.4 GHz and 5 GHz data are (see table 5.3):

- $m_1 = 0.928 \pm 0.010$
- $m_2 = 0.795 \pm 0.005$
- $t_{br} = 390 \pm 30$  days
- $r_{br} = 0.99 \pm 0.06$  mas

Adding the data at 2.3 GHz to the fit did not change the results above the  $1\sigma$  level. The fit shown as a dashed line in figure 5.5 uses data at 1.6 GHz and the simple model given by equation 3.1 with two parameters ( $K$  and  $m$ ). The uncertainties of the measured radii were also scaled to make the reduced  $\chi^2$  equal to unity. The results of the fit to only the 1.6 GHz data are (see table 5.3):

- $m = 0.87 \pm 0.02$
- $K = (4.5 \pm 0.8) \times 10^{-3} \text{ mas day}^{-m}$

Even though these fits describe well the supernova expansion curve for most of the observations, for epochs observed after day  $\sim 4000$  the sizes are systematically smaller than the model predictions at all frequencies, as can be seen in figure 5.5. However, the observed size at 1.6 GHz on day 4606 after explosion still larger than the size at 5 GHz observed on day 4591. We will discuss this in section 5.5.

### **Expansion with “all Data” vs. Expansion with “only Marcaide et al. Data”**

The expansion curve shown in figure 5.5 is qualitatively similar to the one that will be reported in Marcaide et al. (2008), based on the analysis of the Marcaide et al. data alone, through day 3867 after explosion. However, when we include all the VLBI data in the expansion curve, the new points affect the values of the fitted parameters. In Marcaide et al. (2008), we report on a break time,  $t_{br}$ , of  $1500 \pm 300$  days, which separates two different expansion regimes, with  $m_1 = 0.845 \pm 0.005$  and  $m_2 = 0.788 \pm 0.015$ . Even though the last expansion index,  $m_2$ , is compatible with the one reported here, both the break time and the first expansion index differ strongly. The main reason of these discrepancies is the inclusion of the very early results from Bartel et al. (2002). (Marcaide et al. began observing on day 182 after explosion). The results reported by Bartel et al. (2002) for their earliest epochs (from day 50 to day 390 after explosion) need a high expansion index to be modelled (we fit  $m_1 = 0.928 \pm 0.010$ ). Such a high index carries along the necessity of an early break in the expansion curve, followed by a much lower index to fit the rest of the expansion (see table 5.3). Moreover, the presence of this early break in the model makes numerically difficult to distinguish the possible presence of any other later breaks (like the one to be reported in Marcaide et al. 2008) in the expansion curve; the  $\chi^2$  of a model with two time breaks does not have a clear absolute minimum.

It is remarkable that the model which fits our 1.6 GHz results intersects with the model which fits the higher frequency results between days 1500 and 2000 after explosion, close to the break time that we will report in Marcaide et al. (2008). The first expansion index reported in Marcaide et al. (2008) is also

close to the one reported here for 1.6 GHz data. These similarities favour the interpretation of the expansion curve made in Marcaide et al. (2008), consisting of a change in the expansion rate measured at 5 GHz, but not at 1.6 GHz.

Given that the early results published by Bartel et al. have been adapted to ours by just applying a scaling factor (to make them compatible with CPM results, as explained in section 5.4), one could think that a complete re-analysis of those early data would change our expansion curve, making the resulting fit perhaps more similar to the one reported in Marcaide et al. (2008). Nevertheless, the shell sizes at those early epochs are so small that the CPM cannot be applied, and the supernova is so bright that a model fitting to the visibilities can bring well-defined minima in the  $\chi^2$  distributions, being the estimated sizes very robust, although model-dependent. Thus, a re-analysis of those data (using the fitting strategy described in section 5.3.3) would bring results totally compatible with the results adapted from Bartel et al. (2002).

### Adiabatic Expansion of SN 1993J at Very Early Epochs

The high value of  $m_1$  reported here for the earliest epochs (a similar result was reported in Bartel et al. 2000) can be interpreted as a change in the density profile of the csm. Such a change could be due to an evolution of the pre-supernova stellar wind that generated the circumstellar medium (csm) (Bartel et al. 2002), but could also be explained in terms of an adiabatic regime at the beginning of the supernova expansion. Given that at the beginning of the expansion the mass of the ejecta is much higher than the mass of the shocked circumstellar material, the work of the csm on the ejecta is negligible. Therefore, the kinetic energy of the ejecta can be considered as constant, as it is also the case for the expansion velocity of the shock front<sup>5</sup>. As the supernova expands, the shock will begin to decelerate as the mass of the shocked material increases. This interpretation translates into a correction of the Chevalier model, adding a non-constant expansion index  $m$ , which should decrease as time goes by.

In fact, from the simulations performed by Mioduszewski et al. (2001), a running expansion index  $m$  is found for SN 1993J, evolving, in time, approximately, as  $m(t) = m_0 - K_t \log(t)$  (see their figure 4) until day  $\sim 2000$  after

---

<sup>5</sup>However, according to the self-similar Chevalier expansion model, the ejecta were expanding since  $R \sim 0$ , so the ratio of shocked csm mass and ejecta mass could be considered as constant at all times.

explosion<sup>6</sup>. The large increase in  $m(t)$  computed by these authors after that supernova age (see their figure again) comes, as they claim, from the circumstellar interaction of a narrow feature in the ejecta profile used in their hydrodynamical simulations. Even though this late reacceleration of the supernova might be caused by numerical issues related to such narrow (shock-like) feature in the ejecta (V. V. Dwarkadas, private communication) we could think that the approximately logarithmic decline of  $m$  with time, computed by these authors for earlier epochs, could fit our observational expansion curve without the necessity of introducing any break time. Performing a fit to the 8.4 GHz and 5 GHz data with such running expansion index, we obtain the model shown in figure 5.8, and the values  $m_0 = 1.02 \pm 0.02$  (i. e., compatible with free expansion) and  $K_t = 0.066 \pm 0.007$ , if  $t$  is given in days. This model gives  $m \sim 0.791$  for  $t = 3000$  days. As can be seen in figure 5.8, the fit reproduces well the first  $\sim 3000$  days (but slightly over-predicts the sizes between  $\sim 700$  and  $\sim 1500$  days after explosion), but gives too small sizes for later epochs (in fact, the reduced  $\chi^2$  increases a 25 % with respect to the fit using the model given by equation 5.1).

It must be noticed that this expansion model is not able to explain the expansion curve obtained for 1.6 GHz data. If we want to explain the different expansion curves obtained for all frequencies, we must assume that the increasing deceleration of the expansion at higher frequencies is not related to the hydrodynamics, but to other structure-related bias effects, as it is explained in section 5.5.2.

### 5.4.2. Expansion from Analysis in Fourier Space

When we fit the model given by equation 5.1 to the 8.4 and 5 GHz results obtained from the analysis described in section 5.3.3, we obtain the expansion curve shown in figure 5.7. The fitted parameters are (see table 5.3):

- $m_1 = 0.93 \pm 0.08$
- $m_2 = 0.797 \pm 0.007$
- $t_{br} = 260 \pm 90$  days
- $r_{br} = 0.69 \pm 0.19$  mas

---

<sup>6</sup>Obviously, our analytical approximation to these simulations has no sense for very small times, since  $\lim_{t \rightarrow 0}(\log(t)) = -\infty$

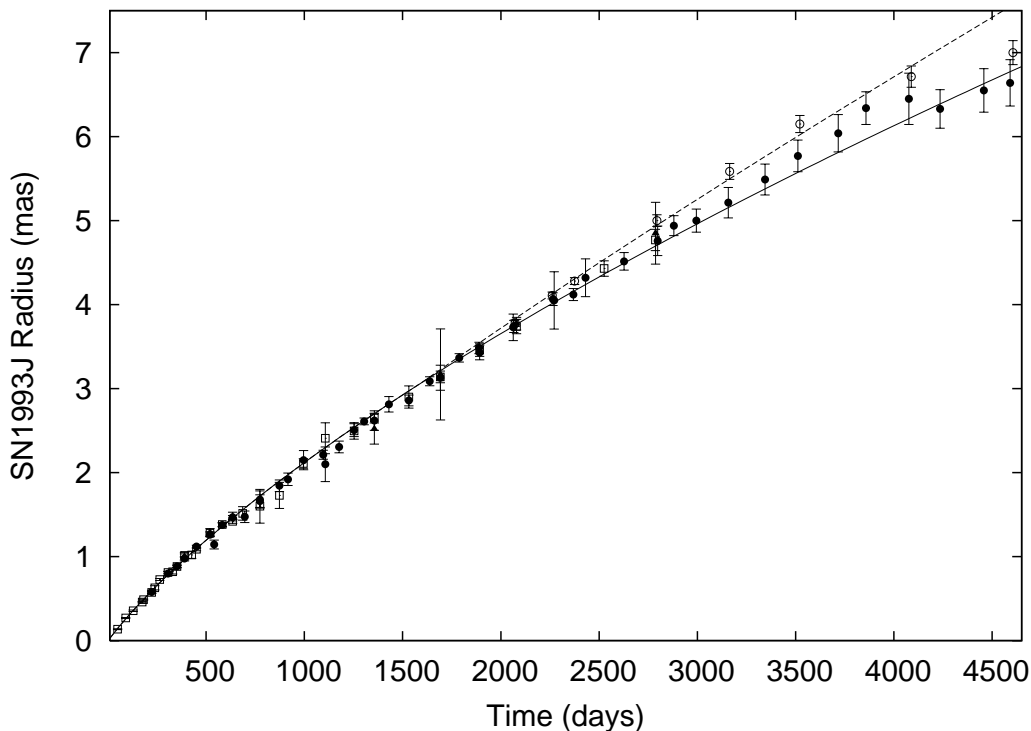


Figure 5.8: Expansion of supernova SN 1993J with the same data shown in figure 5.5. Continuum line is the expansion model given by the running index  $m(t) = m_0 - K_t \log(t)$ , fitted to all data but those at 1.6 GHz.

Adding the data at 2.3 GHz to the fit does not change these results above the  $1\sigma$  level.

The results of the fit to the 1.6 GHz data are (see table 5.3):

- $m = 0.90 \pm 0.03$
- $K = (3.5 \pm 0.9) \times 10^{-3} \text{ mas day}^{-m}$

These results are totally compatible with the results obtained from the sizes measured with the CPM, reported in the previous section. However, the scatter of the data is higher, especially for the latest epochs.

### 5.4.3. Comparison with Results by Other Authors

Bartel et al. (2002) reported on their VLBI observations from year 1993 to year 2001. They estimated the source sizes by fitting models directly to the visibilities, using a modified version of the AIPS task UVFIT. The model used in those fits was a spherical shell with no opacity from the ejecta and a relative shell width,  $\xi$ , of 0.2. In the fits, they estimated the shell outer radius, but also

the shell center coordinates with respect to the correlation position at each epoch. Since in a previous paper of the same group Bietenholz et al. (2001) concluded that the supernova coordinates remain nearly fixed with respect to M81\*, it is not clear why they included the shell center coordinates as free parameters in the fits. Including such parameters is equivalent to determining the plain-wave component of the visibility phases, which otherwise contains no structure information. In our approach described in section 5.3.3, we have assumed the same center for all epochs, fitting the outer shell radius using only the real part of the visibilities. This way, the noise of the imaginary part of the visibilities does not affect the quality of the fit. Also, our use of less parameters in the fit gives more stability to the results. Moreover, we also include absorption from the ejecta, which is a more realistic approach to the true emission structure of the supernova. Hence, results reported in Bartel et al. (2002) are not directly comparable to our results based on the analysis described in section 5.3.3. However, we have used their published size determinations to compare with our results of the supernova expansion curve, as we will see below.

Bartel et al. (2002) determine a deceleration parameter for four supernova age ranges (see their table 4). They claim that “the four time intervals with different deceleration can be distinguished by eye”. This seems to us a rather subjective criterion in spite of supporting arguments provided. For each of the four age ranges, Bartel et al. determine a different deceleration for each observing frequency and notice differences in the determinations. However, they do not pay much attention to these differences and instead they consider decelerations obtained from the combined dataset as representative.

With the determination of the deceleration for the four supernova age ranges, they claim a progressive deceleration of the expansion followed by a slowing deceleration (i.e., re-acceleration) around day 1893. With such evolution of the deceleration, they also claim to provide support to the hydrodynamic simulations performed by Mioduszewski et al. (2001), which, as we mention in section 5.4.1, may depend strongly on certain narrow features of the density profile of the ejecta.

We have carried out a fit of the expansion model given by equation 5.1 to the supernova sizes published in Bartel et al. (2002). If we fit such a model to their 5 GHz data, taking only their epochs observed since day 223 after explosion (for a direct comparison with the fit performed in Marcaide et al. 2008), we find a local minimum in the  $\chi^2$  around  $m_1 = 0.82 \pm 0.03$ ,  $m_2 =$

$0.796 \pm 0.016$ , and  $t_{br} = 1000 \pm 700$  days, totally compatible with the results of Marcaide et al. (2008). Nevertheless, this is not the only minimum of the  $\chi^2$ ; there is another one (only 15 % lower) located around  $m_1 = 0.92 \pm 0.11$ ,  $m_2 = 0.799 \pm 0.008$ , and  $t_{br} = 450 \pm 140$  days, closer to the results here reported for the expansion determined with all the VLBI data. Therefore, introducing just one break time in the expansion of the supernova generates a  $\chi^2$  distribution with an unclear minimum if the number of data points is not large (we used 20 data points for this particular fit). Introducing more than one break (up to four as in Bartel et al. 2002) brings worse results in the  $\chi^2$  distribution (even if we increase the number of data points) unless such breaks are fixed in the fit (i. e., selected “by eye”).

If we now add the 8.4 GHz data to the fit, the minimum in the  $\chi^2$  around  $t_{br} \sim 1000$  days disappears and the unique, clear, minimum gives the fitted parameters:  $m_1 = 0.93 \pm 0.02$ ,  $m_2 = 0.798 \pm 0.006$ , and  $t_{br} = 390 \pm 50$  days, very close to the results here reported. Fitting the 1.6 GHz data with a single expansion index, we obtain  $m = 0.84 \pm 0.06$ , also compatible with the results here reported. *Therefore, even though the conclusions of Bartel et al. (2002) are very different from ours, their fitted shell sizes are compatible with our model of the expansion curve, i. e., one expansion regime for the 1.6 GHz data and two expansion regimes (separated by a break time) for higher frequencies.* In other words, the results reported by Bartel et al. (2002) are compatible with just one deceleration change and there is no need to invoke up to four different decelerations at different times. The agreement of the results reported by Bartel et al. (2002) and the hydrodynamic simulations of Mioduszewski et al. (2001) for epochs after day  $\sim 2000$  (i. e., after the numerically found reacceleration of the shell) might just be circumstantial and dependent on a peculiar data analysis and on high-resolution features of the ejecta profile in the peculiar explosion model used in their simulations.

We must notice that the sizes at 1.6 GHz reported in Bartel et al. (2002) do not show a clear systematic trend of departure from those at 5 GHz and 8.4 GHz. However, the expansion index determined with their reported 1.6 GHz results is larger (although still compatible, given the large errors of the fitted parameters) than the expansion index fitted for their 5 GHz and 8.4 GHz results; there are too few epochs (only 3) at 1.6 GHz reported in Bartel et al. (2002) for arriving to any robust conclusion about the systematic discrepancy between sizes measured at different frequencies. Indeed, the fact that the expansion curve at 1.6 GHz is driven by a larger expansion index than that



at higher frequencies could have misled Bartel et al. (see figure 6 of Bartel et al. 2002) to interpret results of their latest reported observations (taken at 1.6 GHz) as a slowing deceleration (re-acceleration), when compared to results of their previous observations at higher frequencies.

Data fitted	$m_1$	$m_2$	$t_{br}$ (days)	$m_{1.6 \text{ GHz}}$
Selfcal <sup>1</sup>	$0.928 \pm 0.010$	$0.795 \pm 0.005$	$390 \pm 30$	$0.87 \pm 0.02$
Ph-Ref <sup>2</sup>	$0.928 \pm 0.011$	$0.794 \pm 0.005$	$385 \pm 30$	$0.83 \pm 0.02$
Fourier space <sup>3</sup>	$0.93 \pm 0.08$	$0.797 \pm 0.007$	$260 \pm 90$	$0.90 \pm 0.03$
Bartel 1 <sup>4</sup>	$0.93 \pm 0.02$	$0.798 \pm 0.006$	$390 \pm 50$	$0.84 \pm 0.06$
Marcaide <sup>5</sup>	$0.845 \pm 0.005$	$0.788 \pm 0.015$	$1500 \pm 300$	$0.87 \pm 0.03$
Bartel 2 <sup>6</sup>	$0.82 \pm 0.03$	$0.796 \pm 0.016$	$1000 \pm 700$	$0.84 \pm 0.06$

Table 5.3: Expansion parameters of SN 1993J for different approaches in the analysis:

<sup>1</sup> Using CPM-measured supernova sizes from images obtained as described in section 5.3.2.

<sup>2</sup> Using CPM-measured sizes from phase-referenced images.

<sup>3</sup> Using shell sizes fitted to the visibilities.

<sup>4</sup> Using the shell sizes reported in Bartel et al. (2002).

<sup>5</sup> To be reported in Marcaide et al. (2008).

<sup>6</sup> Using the sizes reported in Bartel et al. (2002), but taking only the epochs later than day 182 after explosion (i.e., the day of the first epoch reported in Marcaide et al. 2008).

#### 5.4.4. Refinement of Shell Width and Ejecta Absorption Estimates

In section 5.3.1 we report on a shell width estimate of 0.31 times the outer radius of SN 1993J and an ejecta absorption of 80% for the radio emission, using a fitting model to the visibilities and a selection of the “highest quality” epochs at 5 GHz. However, we can give a better estimate of the relative shell width and degree of ejecta opacity (and their possible dependence on time and observing frequency) by using all the available VLBI data.

#### Shell Width and Ejecta Absorption Measured in the Sky Plane

As it is explained in appendix A, in the CPM the supernova radio shell is convolved, at each epoch, with a Gaussian that scales with the supernova radius. Therefore, in the azimuthal average of this convolution, we can define

a set of special points related to the shell structure. In figure 5.9 we show such points: the ordinate of maximum emission ( $I_{max}$ ) the ordinate corresponding to the central emission ( $I_c$ ), and the abscisas of the outer and inner Common Points ( $R_{OCP}$  and  $R_{ICP}$ , respectively). On the one hand, the ratio of flux densities ( $\rho_1 = I_c/I_{max}$ ) is related to the degree of ejecta absorption; in figure 5.10 we show the estimates of this ratio for all epochs since year 1995. On the other hand, the ratio of the radial positions of ICP and OCP ( $\rho_2 = R_{ICP}/R_{OCP}$ ) is related to the shell width. In figure 5.10, we show all the estimates of this ratio for the same set of epochs. The mean value of ratio  $\rho_1$  is  $0.38 \pm 0.11$  for 8.4 GHz data,  $0.54 \pm 0.16$  for 5 GHz data,  $0.52 \pm 0.30$  for 2.3 GHz data, and  $0.55 \pm 0.11$  for 1.6 GHz data. The mean value of ratio  $\rho_2$  is  $0.397 \pm 0.014$  for 8.4 GHz data,  $0.38 \pm 0.05$  for 5 GHz data,  $0.38 \pm 0.09$  for 2.3 GHz data, and  $0.39 \pm 0.02$  for 1.6 GHz data. Combining the data at all frequencies, we get  $0.51 \pm 0.16$  and  $0.39 \pm 0.05$  for  $\rho_1$  and  $\rho_2$ , respectively (see table 5.4).

Freq. (GHz)	$\rho_1$	$\rho_2$
8.4	$0.38 \pm 0.11$	$0.397 \pm 0.014$
5.0	$0.54 \pm 0.16$	$0.38 \pm 0.05$
2.3	$0.52 \pm 0.30$	$0.38 \pm 0.09$
1.6	$0.55 \pm 0.11$	$0.39 \pm 0.02$
Avg.	$0.51 \pm 0.16$	$0.39 \pm 0.05$

Table 5.4: Mean values of  $\rho_1$  and  $\rho_2$  for all frequencies. The last raw are the weighted average of results at all frequencies.

$\xi$	Absorption	$R/R_{OCP}$	$\rho_1$	$\rho_2$
0.35	YES	0.975	0.54	0.44
0.30	YES	0.970	0.52	0.46
0.25	YES	0.961	0.52	0.47
0.35	NO	1.012	0.80	0.37
0.30	NO	0.995	0.78	0.39
0.25	NO	0.977	0.75	0.41

Table 5.5: List of biases of the CPM ( $R/R_{OCP}$ ) and computed ratios  $\rho_1$  and  $\rho_2$  (see text) for some different shell models.  $\xi$  is the shell width in units of the outer radius and *Absorption* refers to the supression of all the radio emission from behind the ejecta.

If we compare these values with those corresponding to simulated shells, shown in table 5.5, a conclusion can be readily drawn. The values of  $\rho_1$  for the models with and without absorption are included in the range 0.52-0.54

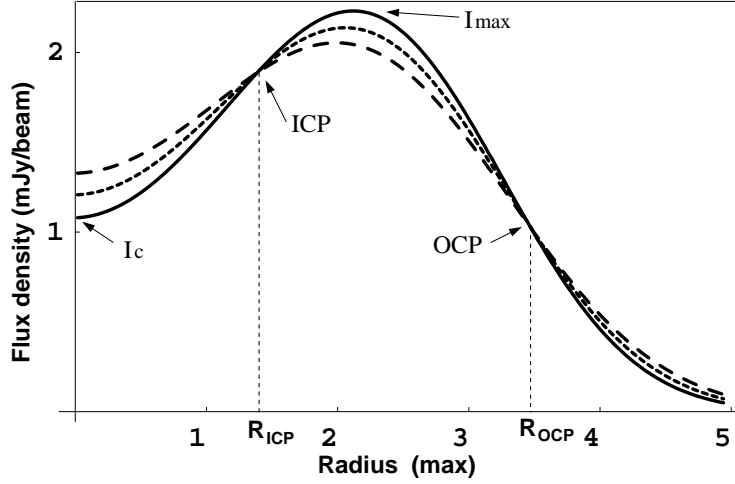


Figure 5.9: Azimuthal average of the model map corresponding to day 1889 after explosion at 5 GHz, convolved with a gaussian with FWHM of 1.75 mas (continuous line), 1.92 mas (dotted line), and 2.1 mas (dashed line). 1.75 mas is 0.5 times the shell radius at that epoch. The three profiles cross at two points (ICP and OCP), being the abscisa of the outer one ( $R_{OCP}$ ) related to the source size. The quantity  $\rho_1$  is equal to  $I_c/I_{max}$  and is related to the degree of ejecta opacity; the quantity  $\rho_2$  is equal to  $R_{ICP}/R_{OCP}$  and is related to the shell width.

and 0.75-0.80, respectively. The observational results clearly favour a model with strong ejecta absorption. Moreover, from figure 5.10, it can be seen that neither there is a clear time evolution of the ejecta absorption (although the scatter of points is large) nor a clear change of the shell width with time at any frequency. The mean value of  $\rho_2$  does not correspond to a relative shell width of  $\sim 30\%$  in a model with maximum ejecta absorption. Instead, the mean value of  $\rho_2$  is more similar to the case of a relative shell width of  $30\%$  with no absorption. Anyway, the real emission structure of SN 1993J may fall within the two extreme cases of maximum absorption and no absorption from the ejecta. In that case, the corresponding  $\rho_1$  and  $\rho_2$  will fall somewhere in between the values shown in table 5.5.

### Relative Shell Width from Model Fitting

Given that we measured the supernova shell radius using a method independent of the model fitting in Fourier space (i. e., the Common Point Method) we can use these measured sizes as fixed parameters in a new model fitting, in which we estimate the relative shell width. But, given that the CPM has a small bias, dependent on the emission structure of the supernova (see appendix

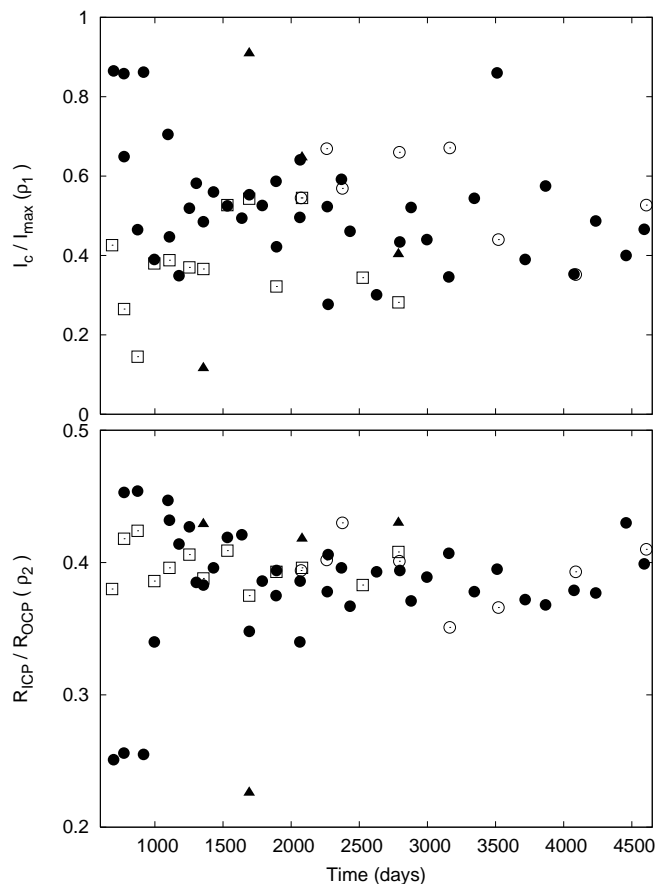


Figure 5.10: Intensity and radial ratios  $\rho_1$  (above) and  $\rho_2$  (below) computed from the azimuthal averages of all supernova images obtained from data taken since year 1995. Empty squares are data at 8.4 GHz; filled circles, data at 5 GHz; triangles, data at 2.3 GHz; and empty circles, data at 1.6 GHz.

A and table 5.5), we should correct the shell sizes of the corresponding bias before estimating the shell width.

However, as shown in table 5.5, the bias of the CPM depends on the degree of absorption of the ejecta and on the relative shell width, which is the quantity to be estimated from the model fitting. Therefore, we have a coupling between fitted shell widths and CPM biases to be applied to the shell sizes prior to model fitting. We could look for self-consistency in that coupling, finding a shell width from which the bias of the CPM, applied to the fixed shell sizes in the model fitting, translates into a fitted shell width equal to that of the CPM bias already applied. Such a shell width is  $\sim 35\%$  of the outer radius for a model with maximum ejecta opacity.

Nevertheless, the real percentage of ejecta opacity could be somewhat smaller than 100%. In fact, from the fits described in 5.3.1, using a selection of epo-

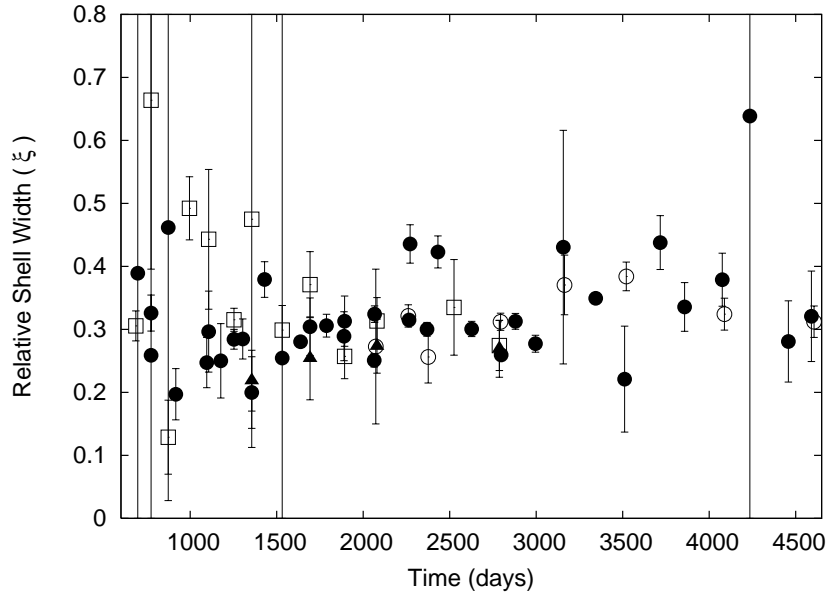


Figure 5.11: Fitted relative shell widths of SN 1993J, using the model described in section 5.3.3 and the shell sizes determined with the CPM, applying the corresponding bias for an ejecta absorption of 80% (see text). Empty squares are data at 8.4 GHz; filled circles, data at 5 GHz; triangles, data at 2.3 GHz; and empty circles, data at 1.6 GHz. The errors shown are such that the reduced  $\chi^2$  of each fit is equal to unity.

chs at 5 GHz, an opacity of 80% is obtained. When we require self-consistency between (bias-corrected) CPM results and (model-fitted) shell widths, lower ejecta opacities translate into narrower shell widths. In that sense, 35% of the outer radius can be considered as an observational upper bound of the relative shell width of SN 1993J. For an ejecta opacity of 80%, the shell widths obtained from the model fitting are shown in figure 5.11 (only epochs from year 1995 onwards have been used). Using these values, we obtain a weighted mean of the shell width of  $(31.0 \pm 1.1)\%$  for 8.4 GHz data,  $(30.0 \pm 0.5)\%$  for 5 GHz data,  $(26 \pm 2)\%$  for 2.3 GHz data, and  $(32.4 \pm 0.8)\%$  for 1.6 GHz data.

All these quantities are close to 30%. Based on very few data, the shell widths estimated at 2.3 GHz are the smallest, located at  $2\sigma$  from the value 30%. On the other side, data at 8.4 and 1.6 GHz give wider shell width estimates than at 5 GHz (the shell width at 8.4 GHz is however compatible with that at 5 GHz at a  $1\sigma$  level). However, looking at figure 5.11, no time evolution of the relative shell width is discernible at any frequency.

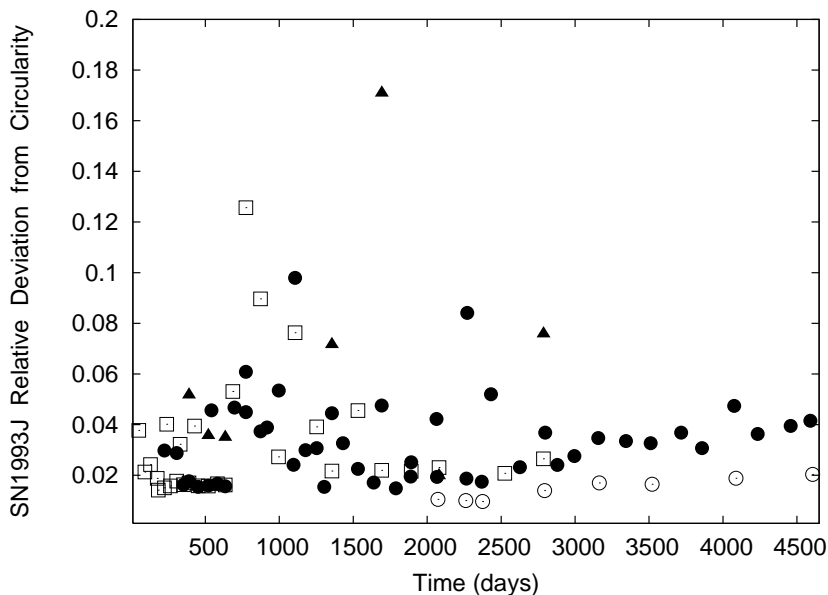


Figure 5.12: Degree of circularity of the SN 1993J shell, as indicated by the CPM uncertainties (see appendix A) in units of the source radius. Empty squares are data at 8.4 GHz; filled circles, data at 5 GHz; triangles, data at 2.3 GHz; and empty circles, data at 1.6 GHz.

#### 5.4.5. Azimuthal Evolution of the Shell

The VLBI images of SN 1993J maintain a large degree of circularity during the whole expansion. A quantitative representation of the degree of circularity of the shell are the uncertainties of the CPM (see appendix A) relative to the source radius, i. e., the scatter of radial positions of a given contour with respect to the shell center, in units of the source radius. The degree of circularity of the supernova, computed this way, is typically around 2-4 %, as can be seen in figure 5.12, with the exception of some epochs in which the image is obtained with low dynamic range. Such circularity must be due to a large isotropy in the angular distribution of ejecta velocities.

However, the symmetry of the shell does not only depend on its circularity, but also on the radiation anisotropy inside it. In order to study the azimuthal anisotropy of the radiation inside the shell, we have computed, for each epoch since year 1995, the angular distribution of flux density in a ring of radius equal to the radial position of the brightness peak at each epoch. We have used a convolving beam with FWHM equal to 0.5 times the shell radius. In figure 5.13 we show the angular distributions of the VLBI images after a linear interpolation between epochs. In the cases of epochs observed less than 50 days apart, we selected for the interpolation only one, that of highest dynamic

range. The ratios between minimum and maximum flux densities inside the ring of each epoch range typically between 0.7 and 0.9, indicating that the shell emission is isotropic to a level of  $\sim 80\%$ .

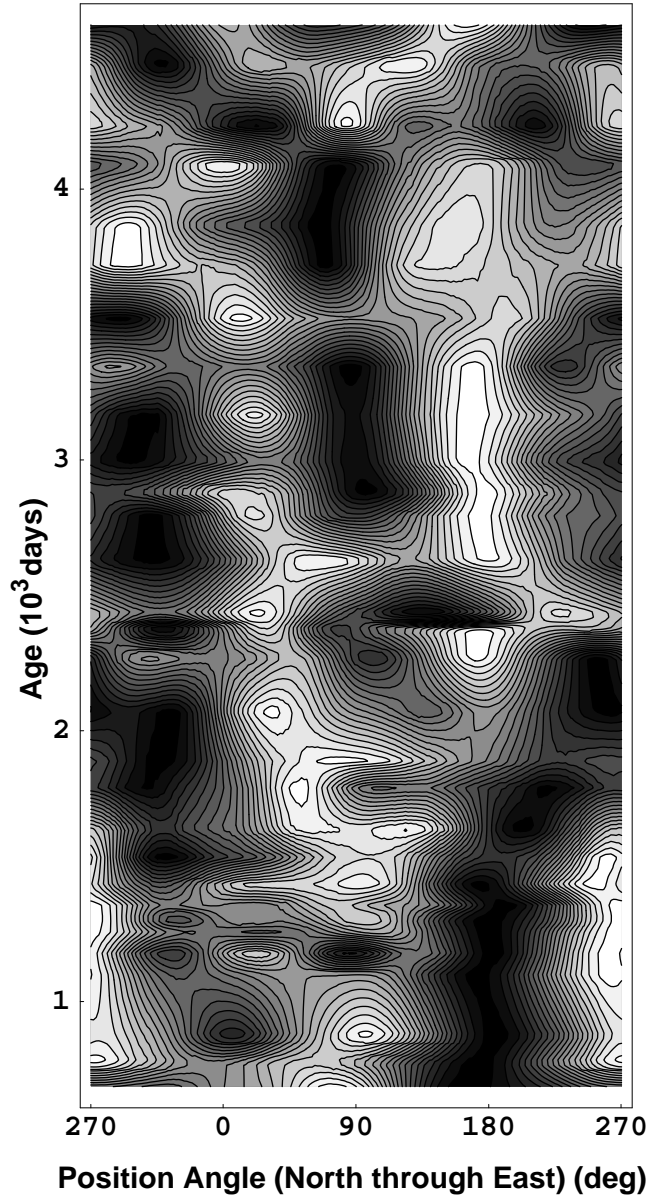


Figure 5.13: Azimuthal evolution of the SN 1993J shell anisotropies, computed as the linear time interpolation of the angular flux density distributions corresponding to a selection of epochs (see text). The angular distributions were computed in rings of radii equal to the radial position of the brightness peak at each epoch. The ten contours shown are equally distributed between the minimum (black) and maximum (white) flux densities inside the rings.

Looking at figure 5.13 we arrive to a clear conclusion: there are some an-

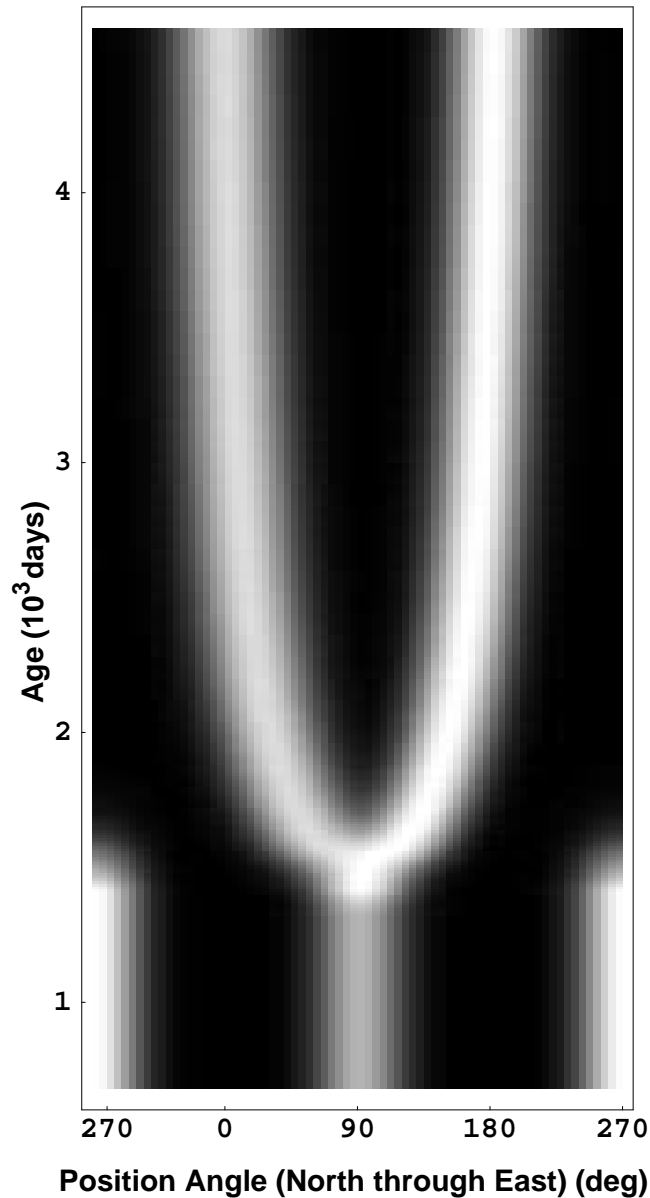


Figure 5.14: Scheme (model) of the azimuthal evolution of the SN 1993J shell anisotropies.

gular regions for which the shell is clearly brighter (i. e., has hot spots), and these regions persist in time during periods of the order of a thousand days. Unfortunately, the dynamic range of the images is not high enough to ensure a single interpretation of the azimuthal evolution of the radio shell. We will put forward a possible interpretation of figure 5.13.

The first hot spot is located at the West (i. e., position angle of 270 degrees in figure 5.13) and it is present from the beginning of the interpolation up to



day  $\sim 1600$  after explosion. There is another, less clear, hot spot present during approximately the same time range, but located at the East (i. e., position angle of 90 degrees). Beginning on day  $\sim 1600$  after explosion, this second hot spot seems to be decomposed into two hot spots, one that shifts towards South (reaching a position angle  $\sim 180$  degrees) and the other that shifts to the West (reaching a position angle  $\sim 20$  degrees). These two new hot spots persist in time until past day 3500 after explosion. From that epoch onwards, the dynamic range of our images is too low to reach to any robust conclusion about the evolution of the angular brightness pattern. It is remarkable that the first hot spot located at a position angle of 270 degrees disappears more or less at the same time as the other hot spot evolves into two hot spots which shift to their final positions at 180 and 20 degrees. In figure 5.14 we show an schematic representation of the hot spot evolution here described. Another possible, although less clear, interpretation of figure 5.13 is that the hot spot located at 270 degrees could shift to 180 degrees on day  $\sim 1600$ , and the one located at 90 degrees could shift to  $\sim 20$  degrees at roughly the same time.

The anisotropy of radiation inside the shell can be due to anisotropies in the distribution of the magnetic field energy density (being higher at the points with higher flux density) or to anisotropies in the csm density distribution (being higher at the points of higher flux density). In the first scenario, a variation in the angular distribution of the magnetic field energy density would be due to anisotropies in the ejecta distribution, given that the magnetic fields are presumably amplified by non-linear effects produced in the magneto-hydrodynamic interaction between the ejecta and the shocked csm. In the second scenario, an anisotropic pre-supernova stellar wind (being higher, for example, at the progenitor equator plane, the rotation axis, or caused by the presence of a companion star) could help explain the hot spots.

It must be noticed that the separation between the two hot spots that persist until day  $\sim 1600$  is approximately 180 degrees, which is approximately the same final angular separation of the two hot spots that develop after that day. Moreover, the angles between the location of the first hot spot (at 270 degrees) and the other hot spots that develop after day  $\sim 1600$ , are around 90 degrees. These peculiar angular separations could give clues for an interpretation of the hot spots as caused by an anisotropic pre-supernova stellar wind along the rotation axis and/or the equatorial plane of the progenitor. However, we do not consider the quality of figure 5.13 good enough to propose one such specific model.

## 5.5. Comparison between *RAMSES* and Observational Results

RAMSES (*Radiation-Absorption Modelling of the Synchrotron Emission from Supernovae*) is a program capable of simulating the expansion curve and radio light curves of a supernova, based on several parameters (see chapter 4), the most important of which are: distance to host galaxy ( $D$ ), number density of csm electrons ( $n_{cs}^0$ ) at a reference epoch ( $t_0$ ), fraction of thermal electrons that are accelerated to relativistic energies ( $F_{rel}$ ), spectral index of the resulting electron population ( $p$ ), mean magnetic field ( $B_0$ ) inside the emitting region at the reference epoch, structure index of the csm density profile ( $s$ ), shell width of the emitting region in units of the outer radius ( $\xi$ ), and expansion index of the supernova ( $m$ , with the possibility of introducing two expansion regimes separated by a break time). RAMSES takes into account cooling effects on the electron population (in a similar way as in Fransson & Björnsson 1998) as well as other effects coming from a possible variability of the amplified magnetic fields through the shell and possible time- and frequency-dependent ejecta opacities.

RAMSES is capable of comparing its simulations with observational results, performing a  $\chi^2$  minimization analysis in order to obtain best-fit estimates for any subset of the parameters listed above. Therefore, RAMSES can be used to describe in detail, from a direct comparison with observational results, the physical scenario in which a radio supernova evolves.

RAMSES has been built to simulate the expansion and light curves of supernova SN 1993J, in order to extract as much information as possible from our VLBI results and from the radio light curves published by Weiler et al. (2007). From these simulations, we find strong support for a circumstellar density profile due to a constant presupernova mass-loss rate, we find estimates of magnetic fields and electron acceleration efficiencies inside the shell, and we model the exponential flux density drop found by Weiler et al. (2007) for the late SN 1993J light curves. We also find evidence of a slight radial drop of the amplified magnetic fields through the shell.

### 5.5.1. Modelling the Radio Light Curves of SN 1993J

#### Electron Cooling not Considered

Weiler et al. (2007) and other authors, fit the radio light curves of supernovae using the model

$$S(\text{mJy}) = K_1 \left( \frac{\nu}{5 \text{ GHz}} \right)^\alpha \left( \frac{t - t_0}{1 \text{ day}} \right)^\beta e^{-\tau} \frac{1 - e^{-\tau'}}{\tau'} , \quad (5.2)$$

where

$$\begin{cases} \tau &= K_2 \left( \frac{\nu}{5 \text{ GHz}} \right)^{-2.1} \left( \frac{t - t_0}{1 \text{ day}} \right)^\delta \\ \tau' &= K_2 \left( \frac{\nu}{5 \text{ GHz}} \right)^{-2.1} \left( \frac{t - t_0}{1 \text{ day}} \right)^{\delta'} \end{cases} . \quad (5.3)$$

The factors with exponential functions in equation 5.2 are related to opacity effects of the unshocked circumstellar medium:  $\tau$  is the opacity produced by the homogeneous part of the csm and the factor with  $\tau'$  models the opacity produced by a possible clumpy component in the otherwise homogeneous medium.

The exponent  $\alpha$  is the spectral index of the supernova in the optically thin regime and  $\beta$  is the exponent of a power-law time decay for the whole radio emission. If we neither consider the (small) effects of a clumpy medium nor the energy losses of electrons inside the shell, then there are simple relationships between the parameters of equation 5.2 and the physical parameters that describe the supernova expansion:

The opacity  $\tau$  is just proportional to the integral of  $n_{cs}^2$  (assuming a constant electron temperature in the csm, see equation 4.13) and  $\delta = m(1 - 2s)$ ; it can be shown (Pacholczyk 1970) that  $\alpha = (1 - p)/2$ ; finally, since the flux density emitted by a population of electrons with a power-law distribution ( $N \propto E^{-p}$ ) is (Pacholczyk 1970):  $S \propto N B^{(1+p)/2}$ , taking into account the increase in the number of relativistic electrons and the decrease of the magnetic field energy density (which scales as  $n_{cs} V_{sh}^2$ , being  $V_{sh}$  the velocity of the forward shock) the following relation can be obtained,

$$\beta = (m(2(11 + p) - (5 + p)s) - 2p - 10)/4$$

From their observed light curves, taken until  $\sim 4900$  days after explosion, Weiler et al. (2007) fit equation 5.2 obtaining  $\alpha = -0.81$ ,  $\delta = -1.88$ , and  $\beta = -0.73$ . Therefore, without considering electron cooling, from the fitted  $\alpha$  it can

be determined that  $p = 2.6$  and, from our fitted expansion index<sup>7</sup> and  $\delta$ , that  $s = 1.57$ . Then, it results  $\beta = -0.44$ , higher than the fitted value ( $-0.73$ ). However, decreasing  $m$  down to 0.82, self-consistency between the two ways of estimating  $\beta$  can be obtained. Therefore, it seems that these estimates of  $p$ ,  $m$ , and  $s$  are quite compatible with the values of  $\alpha$ ,  $\delta$ , and  $\beta$  fitted by Weiler et al. (2007). This is so in spite of electron cooling not having been considered in these computations and the temperature of the thermal csm electrons having been taken constant throughout the whole extent of the csm. As we will see in later sections, both simplifications are hard to take and may affect considerably the results.

### Electron Cooling Considered

Introducing cooling effects in the electron evolution results in a lower absolute value of  $\beta$ . This is so because cooling is less important as the supernova evolves, so  $dN/dt$  approaches the value without cooling as time goes by.  $N$  will always be smaller if we consider cooling, so the increase of the *relative* number of electrons (i.e.,  $(1/N)(dN/dt)$ ) will be *larger*. This will contribute in a lowering of  $|\beta|$ , since  $\beta = d(\ln(S))/d(\ln(t))$  and  $d(\ln(N))/d(\ln(t)) = t(1/N)(dN/dt)$ .

In order to increase the absolute value of  $\beta$  and fit the light curves (adjusting, of course, the magnetic field strength if necessary) larger csm electron densities and/or deeper csm density profiles are needed. In fact, Fransson & Björnsson (1998) fitted the early light curves of SN 1993J by considering cooling effects on the electron population and a constant pre-supernova mass-loss rate and constant stellar wind (i.e.,  $s = 2$ ). The initial behaviour of the light curves (i.e., the time range at which the factor with  $\delta$  in equation 5.2 acts) could be fitted with  $s = 2$  by using a radial drop of the thermal electron temperature (see equation 4.13). This radial drop has an effect on  $\delta$  similar to using a flatter csm density profile.

These authors used an expansion model with no deceleration until day 100 after explosion, and an expansion index of only  $m = 0.74$  for later epochs. From our VLBI results, we know that the real expansion curve of SN 1993J is described with quite a different expansion model. Therefore, it seems that, in order to obtain good fits to the radio light curves using the expansion

---

<sup>7</sup>We use here the expansion index obtained with the CPM for the 1.6 GHz data, since the lower expansion index corresponding to the other frequencies after day 390 may have been affected by structure-related biases, as we will see in later sections.

indices obtained from our VLBI analysis in a simulation with cooling effects, we would need a change in  $p$  and  $s$ , with respect to those used by Fransson & Björnsson (1998). However, the introduction of an escaping term in the electron evolution (see next section) and our assumption of a magnetic field with an energy density that scales as the thermal energy density of the shock (different from the assumption made by Fransson & Björnsson, who set a magnetic field scaling with  $R$ ) will affect the simulation of the radio light curves in such a way that the simulations will still be good for the same values of  $s$  and  $p$  used in Fransson & Björnsson (1998).

### Evolution of the Electron Population and the End of the SN 1993J Radio Emission

Weiler et al. (2007) found an enhancement of the flux density decay after day  $\sim 3100$ . These authors fitted this enhanced decay using an exponential drop with an e-folding time of  $\sim 1100$  days, but noticed that the same data can also be fitted (although worse) by a power-law decay with  $\beta = -2.7$ .

This decay seems to happen at all frequencies at the same time, leaving the spectral index of the supernova unaltered. These authors interpret this exponential decay as a steeper radial density profile of the csm, beginning on day  $\sim 3100$  after explosion. However, in our opinion, even if the csm density profile would drop to zero at day 3100, the time decay of the flux density would be too slow to explain the sharp decay observed. In fact, keeping constant the total number of relativistic electrons inside the shell since day 3100 (i.e., making zero the unshocked csm density from day 3100 onwards<sup>8</sup>), and keeping constant the ratio between particle energy density and magnetic field energy density (i.e., maintaining the level of energy equipartition between particles and fields) we obtain  $\beta = -1.86$  (using the same  $m$  and  $s$  of section 5.5.1). This value is far from the fitted one ( $-2.7$ ).

Introducing electron cooling helps, but not enough, to explain the fitted value of  $\beta$  at these late epochs. Therefore, we must introduce a new term in the electron evolution to model the sharp exponential drop in the SN 1993J flux density beginning on day  $\sim 3100$ . A natural way to model this exponential decay is to introduce a finite mean lifetime of the electrons inside the shell. In fact, if we allow the electrons to escape from the emitting region after a given mean lifetime and we introduce a sharp end of the csm after day 3100,

---

<sup>8</sup>In this case, the number density of electrons inside the shell,  $n_{cs}$ , would scale as  $R^{-3}$ .

then the flux density of the supernova will approximately decay following an exponential law, being the e-folding time related to the mean-life time of the electrons inside the shell<sup>9</sup>.

We have introduced this finite mean lifetime of the electrons inside the radiating region in order to model, with RAMSES, the exponential drop of the flux density observed in the SN 1993J radio data. The results of these simulations are shown in the next section.

### Simulating Radio Light Curves with RAMSES

Fransson & Björnsson (1998) used an index  $m = 0.74$  to describe the supernova expansion after day 100. This is a very small value, compared to the expansion indices that we have obtained from our VLBI results (0.88 for 1.6 GHz data, and 0.79 for the higher frequencies). The effect of introducing an escaping term in the electron population is equivalent to increasing the value of  $m$  in the kind of simulations performed by Fransson & Björnsson (1998). Indeed, a possible escaping term in the equation of the electron evolution can increase the simulated absolute value of  $\beta$  up towards the observed one, depending on the mean lifetimes of the electrons inside the shell (shorter mean lifetimes translate into larger  $|\beta|$ ). However, the use of too short mean lifetimes also translates into time decays of the flux density that differ from a power law for epochs when electron cooling is still important. This issue strongly affects the quality of the fits, preventing the existence of  $\chi^2$  minima with too small electron mean lifetimes.

In figure 5.15 we show best-fit RAMSES simulated light curves, together with the data published by Weiler et al. (2007) at the wavelengths of 1.2, 2, 3.6, 6, and 20 cm, which have been used in the fits. In these simulations, we have used a csm density profile with  $s = 2$  and an expansion curve with two expansion indices ( $m_1 = 0.93$  and  $m_2 = 0.87$ ) and a break time ( $t_{br} = 260$  days<sup>10</sup>). The second expansion index used is that corresponding to the 1.6 GHz shell sizes determined with the CPM. From the fit to the observed light curves,

---

<sup>9</sup>In fact, the real time evolution of the flux density will be a combination of the power-law decay defined by the evolution of the magnetic field and the exponential decay defined by the mean lifetime of the electrons inside the shell.

<sup>10</sup>The break time fitted to the expansion curve with the CPM results is at 390 days after explosion, but the light curves are better described using 260 days after explosion, which is a break time more similar to that fitted to the sizes determined from model-fitting to the visibilities. Anyway, the estimates of the break time given in section 5.4 are not so precise (30 days and 90 days using the CPM and the visibility model-fitting expansion curves, respectively).

we obtain, taking the epoch of 5.3 days after explosion as reference (epoch at which the shell radius was  $10^{15}$  cm), a mean magnetic field of  $B_0 = 65.1 \pm 1.6$  Gauss inside the shell. The post-shock electron number density at the same epoch has been fitted to  $N_0 = (4.7 \pm 0.8) \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$ , and the fraction of accelerated electrons to  $F_{rel} = (2.1 \pm 0.4) \times 10^{-4}$  for that epoch. The opacity due to the unshocked csm has been modelled using equation 4.13, obtaining  $T_{15} = (2.0 \pm 0.1) \times 10^6$  K; a possible clumpy circumstellar medium has not been considered. The values of  $N_0$  and  $F_{rel}$  appear highly correlated with  $T_{15}$ ; if the latter increases,  $N_0$  decreases and  $F_{rel}$  increases. This high correlation between some parameters was also mentioned by Fransson & Björnsson (1998), who noticed that the only observable that might be fitted by the data is the optical depth of the unshocked csm, which is given by equation 4.13, so any combination of electron temperature and electron density that leaves the opacity unchanged may fit equally well the data, provided  $F_{rel}$  is changed accordingly. The errors of the fitting parameters here reported correspond to a 10 % increase of the reduced  $\chi^2$  at the minimum.

The mean life of the electrons inside the shell has been fitted to  $1000 \pm 100$  days. Using this value, we need a change in  $s$  from 2 to 4 after day 3100 in order to explain the exponential drop of flux density reported by Weiler et al. (2007). Using a flatter csm density profile (with  $s = 1.6$ ) in the fits, results in a much poorer agreement between data and simulations, even if we use the expansion index fitted to the 5 GHz data after the break (i.e., 0.79, the lowest one compatible with our VLBI results).

We also show in figure 5.16 the evolution of the synchrotron spectral index between 8.4 and 4.9 GHz. At the beginning of the expansion, when the circumstellar and synchrotron opacity are still important, the spectrum is inverted, changing its slope at a given time (depending on the frequencies used for the spectral index computation). Then, the spectral index slowly approaches to a final value ( $\sim -0.9$ ), mainly related to the spectrum of the source function of the electrons (since the radiative losses are less important and the electron population is, therefore, less changed as the supernova evolves).

### 5.5.2. Modelling the Expansion Curve of SN 1993J

The light curves shown in the previous section were obtained using a supernova expansion index of  $m = 0.87$  after the break time; this index is the one obtained for the 1.6 GHz VLBI data. However, shell sizes measured at higher

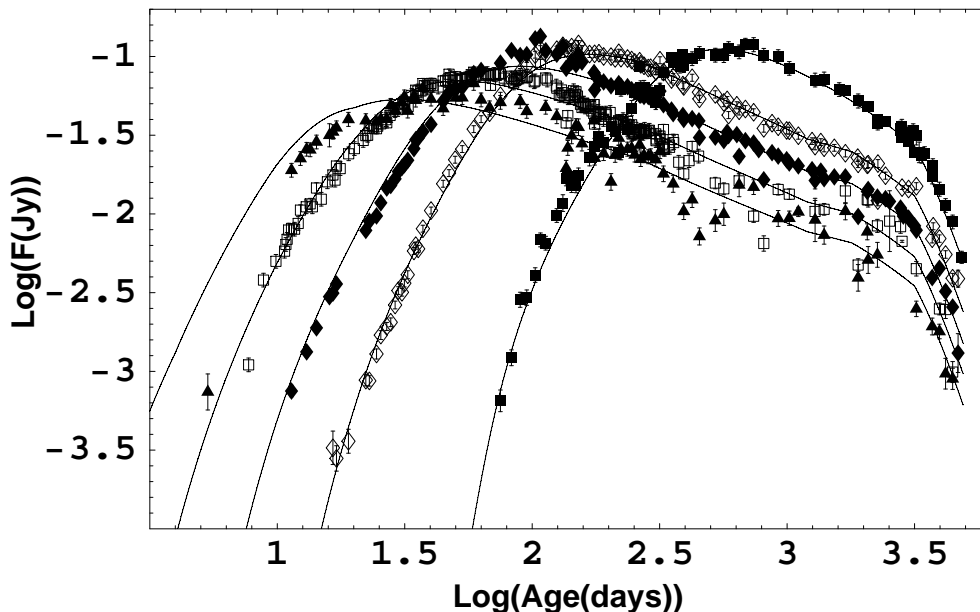


Figure 5.15: Light curves of SN 1993J taken from the best-populated data sets of Weiler et al. (2007), superimposed to simulated results from RAMSES (solid lines), using the expansion model obtained in section 5.4, a csm density distribution with  $s = 2$ , and a finite mean lifetime of the relativistic electrons inside the shell (see text). Filled triangles are data at the wavelength of 1.2 cm; empty squares, data at 2 cm; filled diamonds, data at 3.6 cm; empty diamonds, data at 6 cm; and filled boxes, data at 20 cm. A progressive lifting of the ejecta at all wavelengths but 20 cm, beginning on day 1200 and ending at day 1500, has also been used in these simulations (see section 5.5.2).

frequencies are modelled with a lower expansion index after the break. In this section, we will give some explanations for the frequency-dependent expansion indices found in our SN 1993J VLBI data (explanations also mentioned in Marcaide et al. 2008) and will compare the observed SN 1993J expansion curve with simulated curves computed by RAMSES, taking into account these possible explanations. Such explanations (radial drop of magnetic fields inside the shell and changing ejecta opacity) imply that the real expansion index of SN 1993J is close to the largest one (the one obtained at 1.6 GHz) and the lower expansion indices obtained at higher frequencies are produced by different biases, related to structure effects and to the finite sensitivity of the VLBI interferometers. In this sense, the use of  $m = 0.87$  in the previous section is completely justified, since this expansion index is able to explain both, the radio light curves and the expansion curve of SN 1993J, as we will see in this section.



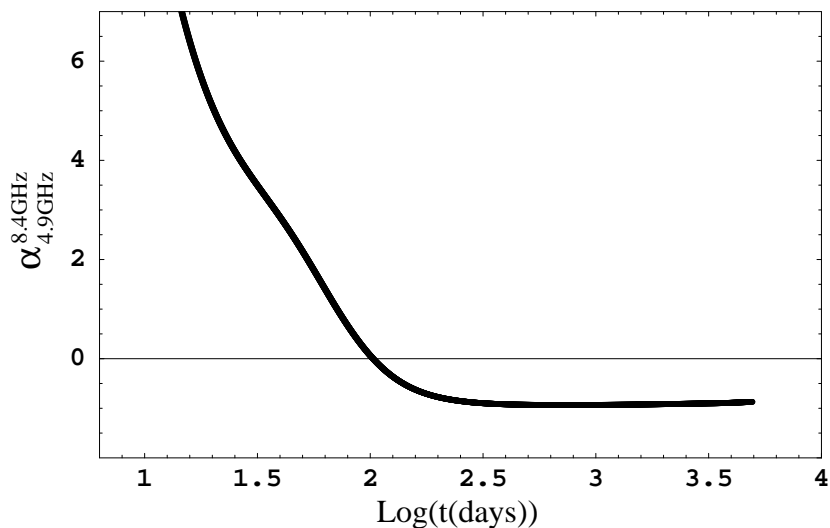


Figure 5.16: Evolution of the spectral index estimated between 8.4 and 4.9 GHz, from *RAMSES* simulations. The spectrum is inverted at the very beginning of the expansion and, around day 100 after explosion, the spectrum slope changes its sign. Later, the spectral index saturates around  $-0.9$ .

### Radial Drop of Magnetic Fields

If the amplitude of the magnetic field inside the shell decays radially, the limited sensitivity of any interferometric array will introduce a measurable difference of the source size between 1.6 GHz and higher frequencies. In figure 5.17 we show the radial emission intensity profiles at 5 GHz and 1.6 GHz, computed in the optically thin regime, both for the case of a constant magnetic field and a for a linear radial decay of the magnetic field. We also show the typical thermal noise cutoff of the VLBI interferometers at these frequencies, which have also been used in our simulations. We set the thermal noise at 0.24, 0.087, 0.19, and 0.085 mJy mas<sup>-2</sup> for 8.4, 5, 2.3, and 1.6 GHz data, respectively. This is, approximately, 3 times the typical rms of the image residuals at each frequency<sup>11</sup>.

As indicated in the upper graph, (a), for a constant magnetic field the realistic noise cut at both frequencies takes place at practically the same radial position. Hence, the measurements of the source radius in the maps corresponding to those source emission intensity profiles would be practically unaffected

<sup>11</sup>The thermal noise depends, of course, on the amount of observing antennas and the data quality, parameters that are different at each epoch. Indeed, the latest VLBI epochs were performed with a higher sensitivity, given that more antennas were involved in those observations. However, *RAMSES* uses the same sensitivity for all the epochs at a given frequency.

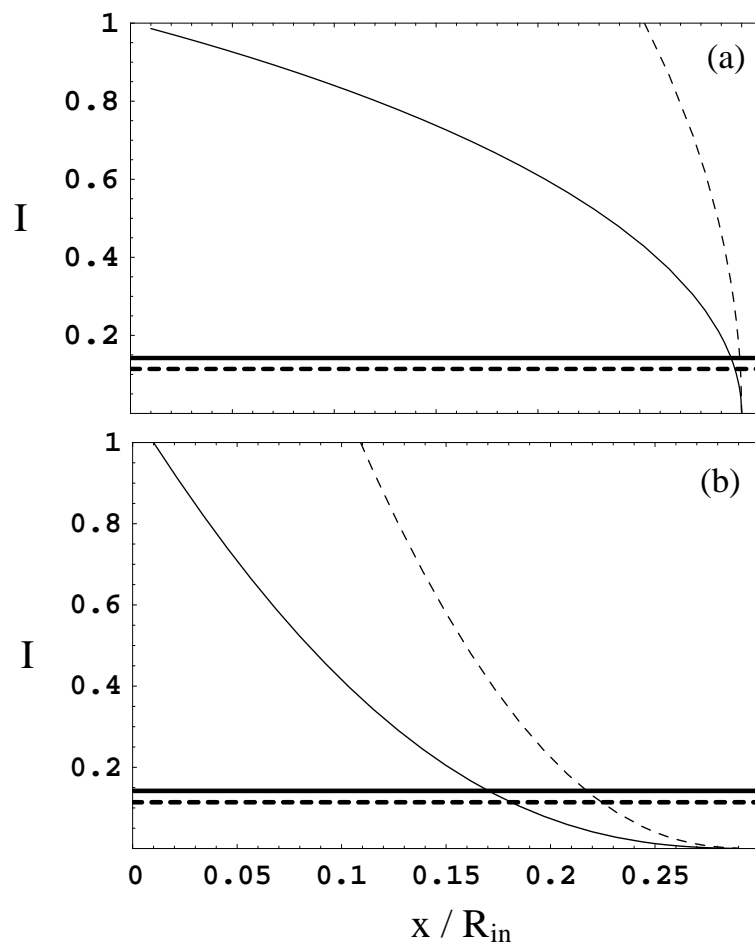


Figure 5.17: Radial emission intensity profiles at 5 GHz (continuum line) and 1.6 GHz (dashed line), from the contact discontinuity to the outer shell radius, in units of the contact discontinuity radius. The profiles are normalized to the emission at 5 GHz at the contact discontinuity. The horizontal lines (5 GHz, thick continuum line; 1.6 GHz, thick dashed line) indicate realistic noise levels. (a) For a constant magnetic field in the emitting region; (b) for a linear radial decrease of the magnetic field.

by the noise. (Notice that the profiles at 5 and 1.6 GHz shown in figure 5.17 are the same, but appear different only because the emissions have been normalized to the 5 GHz emission, and the source emits more strongly at 1.6 GHz.) For huge and unrealistic noise levels, a difference in the sizes at the two frequencies would also be in principle noticeable, but in practice at those noise levels we would not even be able to reconstruct the VLBI maps with enough dynamic range to notice a large difference.

Instead, for a magnetic field which drops radially (lower graph, (b)) the source emission above the noise extends further out at 1.6 GHz. Therefore, the

measurements of the source radius will be smaller at 5 GHz than at 1.6 GHz. This effect will also introduce differences between sizes at 5 GHz and 8.4 GHz, and also between these frequencies and 2.3 GHz, but our *RAMSES* simulations predict that such other frequency-dependent size discrepancies are smaller.

Moreover, the supernova flux density decreases with time, but the sensitivity of the VLBI interferometers remains roughly constant. Therefore, the sizes at 1.6 GHz will be progressively larger compared to those at higher frequencies. The exponential drop of flux density after day 3100 will also be translated into a progressive, and quite fast, underestimate of the shell sizes at all frequencies. This explains the extremely small shell sizes that we obtain for our latest VLBI observations, when compared to our model predictions (see figure 5.5).

If we include a radial drop of the amplified magnetic fields in *RAMSES*, we obtain synthetic expansion curves that can be directly compared with our VLBI results, given that *RAMSES* uses the CPM to determine the source sizes. In figure 5.20 we show the residuals between sizes determined with *RAMSES* and sizes determined from all our VLBI epochs. We have used a convex radial drop of the magnetic field, given by the equation

$$B(r) = B_0 (1 + ar^2 + br + c)/2$$

being  $r$  the radial position in units of the outer radius (i.e.,  $r$  goes from 0.7 to 1, for a shell width of 30% of the outer radius). We set  $a = -11.11$ ,  $b = 15.55$ , and  $c = -4.44$ . This behavior corresponds to the average of a constant  $B$  and a convex-parabolic fading of  $B$ . The use of this convex radial drop of the magnetic field improves much the residuals between observations and simulations, but a changing opacity of the ejecta (see next section) improves the residuals even more (see figure 5.20).

It must be noticed that a radial drop of the magnetic field in the emitting region has only a small effect on the electron evolution. If the magnetic field is not constant through the shell, then  $(\bar{B}_\perp^2)$  is not equal to  $(\bar{B}_\perp)^2$ . This fact slightly affects the importance of synchrotron losses relative to the source intensity, but this is a second-order effect on the electron evolution.

### Changes in the Ejecta Opacity

The effect considered in the previous section can be enhanced by a changing opacity of the ejecta. The biases of the CPM shown in table 5.5 are different for the models with and without ejecta absorption. For a shell model of width

equal to a 30 % of the outer radius, a total absorption from the ejecta gives a bias of 0.97, and no absorption gives a bias of 0.995. Therefore, the CPM gives a size  $\sim 2.5\%$  larger in the case of total absorption. Model fitting to the visibilities is also affected in a similar way, giving larger sizes when there is no absorption from the ejecta.

Thus, a transition from total absorption to no absorption would result in a decrease of the size estimated. If the lifting of the ejecta opacity takes place over a period of time, the net effect is a progressive lowering of the estimated sizes and, thus, an underestimate of the deceleration parameter. On the other hand, once the ejecta become fully transparent to the 5 GHz data, the true deceleration parameter  $m$  should again be recovered, and hence it would result momentarily in a re-acceleration, which is very difficult to detect in our late VLBI data.

This lifting in the ejecta opacity could give an explanation to a slight increase in the SN 1993J flux density observed after day  $\sim 1500$  in the 8.4 data (and to a lower degree in the 5 GHz data) published by Weiler et al. (2007) and shown in figure 5.18 (b). This increase in flux density could be due to an opacity lifting at high frequencies, but not at 1.6 GHz. This lifting in the ejecta opacity, if present, could affect the value of  $\beta$  fitted by Weiler et al. (2007), giving a result slightly lower, in absolute value, than the real one. As a consequence, residuals at 1.6 GHz would have a systematic behavior, going from positive to negative, as we can see in figure 5.18. Such an opacity lifting would also affect, although to a lower degree, the fitted value of  $\alpha$ . For comparison, we show in figure 5.19 the light-curve residuals, for the same time range as in figure 5.18, resulting from the fit with RAMSES (considering the ejecta opacity lifting). The improvement of the fit in that time region is clear.

The explanation of these small anomalies in the light curves as a decrease of the ejecta opacity puts constraints in the degree of such a decrease. From the observed light curves, we estimate that the final degree of opacity cannot be lower than  $\sim 5\%$ , for the case of a constant magnetic field through the shell (this percentage slightly increases for the case of a radially dropping magnetic field). Indeed, figure 5.10 does not show any evidence of a systematic increase of the ratio  $\rho_1$  with time at high frequencies. Therefore, this effect is not clearly seen in the VLBI images, possibly due to dynamic range limitations.

When we use RAMSES to simulate the decrease of the ejecta opacity, we estimate that such a decrease can explain  $\sim 85\%$  of the total observed size discrepancies, if we want to obtain results compatible with the SN 1993J light

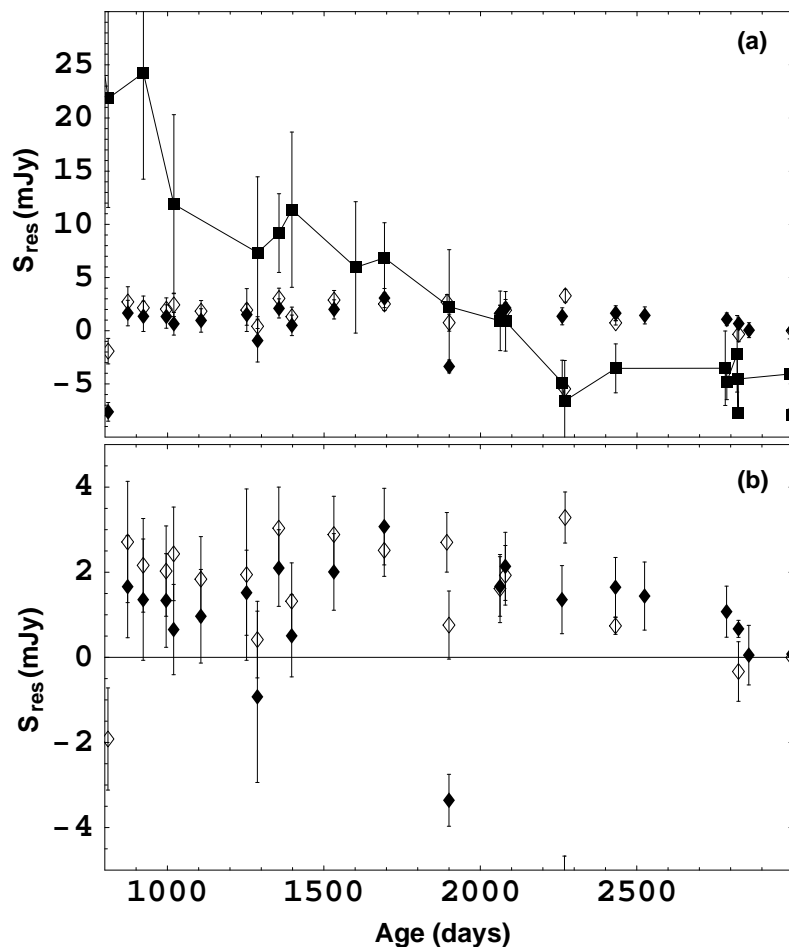


Figure 5.18: Residuals of SN 1993J flux densities between days 1000 and 3000 after explosion, using the model fitted in Weiler et al. (2007). Filled diamonds are data at the wavelength of 3.6 cm; empty diamonds, data at 6 cm; and filled squares, data at 20 cm. (a) shows the residuals corresponding to these three wavelengths (20 cm residuals have been joined with a solid line for clarity) and (b) shows a zoom to the 3.6 and 6 cm data residuals (the solid line now corresponds to zero mJy).

curves. In short, the effect of a possible changing ejecta opacity in SN 1993J goes in the right direction to explain the different shell sizes observed at different frequencies.

## 5.6. Conclusions

We have studied the expansion and structure evolution of SN 1993J, in M 81, using all the available VLBI data, ranging from 23 April 1993 (day 30 after explosion) to 6 November 2005 (day 4606 after explosion), and taken

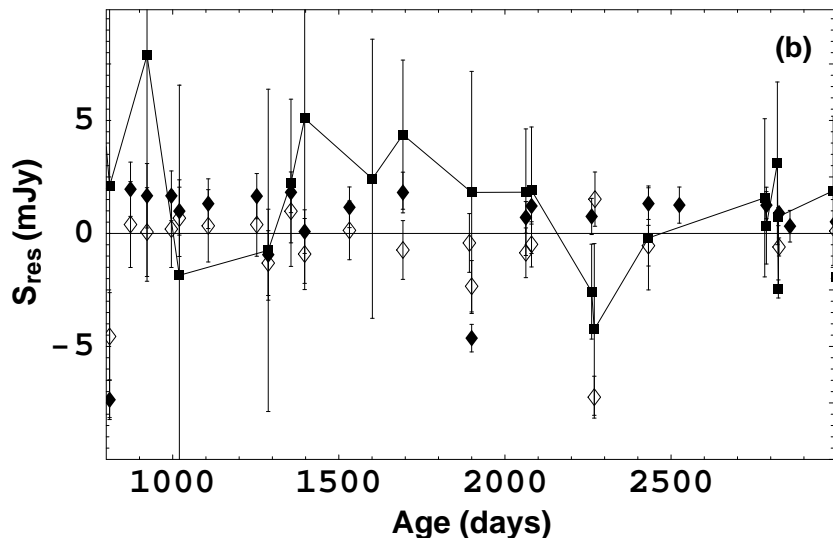


Figure 5.19: Same as in figure 5.18, but plotting the residuals resulting from the RAMSES fit.

at several frequencies (from 22.2 GHz to 1.6 GHz). To analyze these data, we have re-calibrated homogeneously all the visibilities corresponding to epochs later than 1 January 1995. We have used two different methods to estimate the source size: a new method, called Common-Point Method (CPM, described in this thesis) and modelfitting to the visibilities. The CPM allows for accurate measurements of the source size in the sky plane for any circularly symmetric structure, like the SN 1993J radio shell. The modelfitting gives results which are dependent on the structure model used in the fitting, and it is also more affected by possible structure changes of the supernova (i.e., possible departures from a self-similar expansion).

Both analysis methods, the CPM and modelfitting to the visibilities, give totally compatible results. We find that the shell sizes measured at 1.6 GHz are systematically larger than those at higher frequencies. Indeed, data at 1.6 GHz follows an expansion curve that differs from that corresponding to 4.9 GHz, 8.4 GHz, and 2.3 GHz. The SN 1993J expansion curve using all data but 1.6 GHz data can be well modelled using two expansion indices ( $m_1 = 0.928 \pm 0.010$  and  $m_2 = 0.795 \pm 0.005$ ), corresponding to two different expansion regimes separated by a break time ( $t_{br} = 390 \pm 30$  days after explosion). The expansion curve at 1.6 GHz can be well modelled using one single expansion index,  $m = 0.87 \pm 0.02$  (we do not have 1.6 GHz data at epochs earlier than the break time at day 390). These expansion results are different from those published by Bartel et al. (2002) and similar to those to be published in

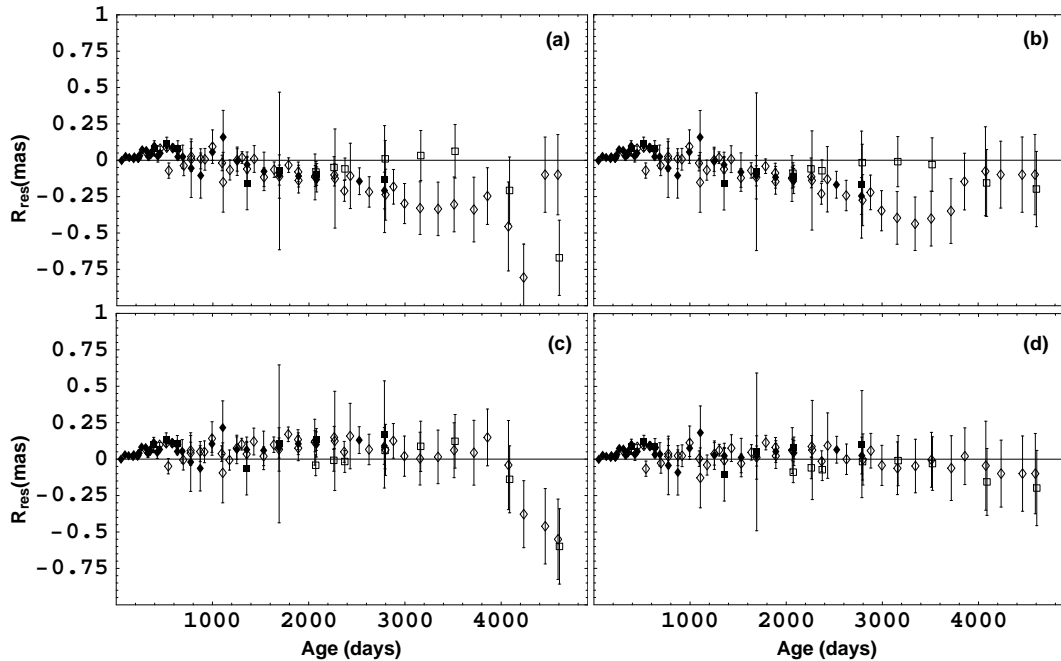


Figure 5.20: Differences between the SN 1993J expansion curve and RAMSES simulations (generated using the expansion model described in section 5.5.1). Filled diamonds are data at 8.4 GHz; empty diamonds, data at 5 GHz; filled squares, data at 2.3 GHz; and empty squares, data at 1.6 GHz. (a) shows the residuals with no changes in ejecta opacity and assuming an infinite sensitivity interferometer; (b) shows the residuals with no ejecta opacity changes and a finite, realistic, interferometer sensitivity; (c) shows the residuals considering ejecta opacity changes at all frequencies, but 1.6 GHz, and an infinite interferometer sensitivity; (d) shows the residuals considering both, ejecta opacity changes and finite interferometer sensitivity.

Marcaide et al. (2008).

The source structure remains circularly symmetric (with deviations from circularity of the order of 2–4%) during practically the whole expansion. The supernova radio shell shows azimuthal flux density fluctuations of the order of 20% of the maximum flux density per beam at each epoch. These fluctuations consist of several hot spots that appear, are shifted azimuthally around the shell, and disappear. These hot spots persist in the shell structure during times of the order of 1000 days. The evolution of such inhomogeneities can be interpreted as an anisotropic distribution of the csm material (i.e., wind anisotropies of the progenitor star).

We have created a new code, RAMSES (*Radiation-Absorption Modelling of the Synchrotron Emission from Supernovae*), capable of simulating the radio light curves and expansion curve of a supernova, fitting a given set of physical

parameters to the observational data. This code takes into account cooling effects of the electron population, as well as synchrotron self-absorption and a possible finite electron mean lifetime inside the shell. The light curves published by Weiler et al. (2007) are fitted together with the expansion curve obtained from our VLBI analysis using a circumstellar density profile with a structure index  $s = 2$  (i.e. a constant mass-loss rate and a constant stellar wind during the whole pre-supernova stage). This result is different from those reported in previous analyses (e.g., Fransson et al. 1996; Van Dyk et al. 1994), who find a flatter csm density profile with  $s \sim 1.6$ , but equivalent to the results published by Fransson & Björnsson (1998). The main reason for the discrepancies between our results and those that obtain  $s < 2$  is the consideration of self-absorption effects in the light curves (and in the electron population), a non-constant thermal electron temperature in the early stages of the expansion, and radiative losses on the electron population inside the shell. In fact, the estimate of the ejecta density profile reported in Fransson et al. (1996), combined with the expansion index reported here for 1.6 GHz data, gives  $s \sim 2$ .

RAMSES scales the magnetic field energy density as the energy density of the shock (i.e., we assume that a rough equipartition exists between particles and fields). From that assumption, we obtain a mean magnetic field of 65 Gauss inside the radiating shell at 5.3 days after explosion, a post-shock circumstellar electron number density of  $6 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$  at the same epoch, and an acceleration efficiency (i.e., fraction of electrons that are accelerated to relativistic energies) of only  $5 \times 10^{-5}$  at the same epoch. All these results are comparable to those obtained by Fransson & Björnsson (1998) in spite of they using a different supernova expansion curve in their simulations.

The observed discrepancies between shell sizes at different frequencies can be modelled by RAMSES using a radial drop of the amplified magnetic fields in the radiating region, combined with the finite sensitivity of the VLBI arrays used in the observations, and a progressive ejecta opacity decrease at 5 GHz, 8.4 GHz, and 2.3 GHz, but not at 1.6 GHz. Such an opacity decrease might also explain the small unmodelled increase of flux density observed in the Weiler et al. (2007) data.

In short, combining the radio light curves and the expansion curve of SN 1993J with RAMSES, we obtain that the supernova expansion scenario can be well modelled using two expansion regimes (up to four regimes were used by Bartel et al. 2002, to model the expansion curve), without the necessity of introducing any time evolution of the pre-supernova stellar wind (or



mass-loss rate), nor any clumpy medium added to the homogeneous circumstellar medium. Instead of these assumptions, we can model all the observed data (light curves and expansion curve) by taking into account the radiative losses of the electron population inside the shell, a radial dependence of the thermal electron temperature, which would decrease as the distance to the explosion center increases, and a radial drop of the amplified magnetic fields inside the shell. This last assumption (together with the finite sensitivity of the interferometers) in the model would explain the different shell sizes obtained from our VLBI data at different frequencies.



## Capítulo 6

# Astrometría con VLBI. El programa *UVPAP*

La técnica de VLBI ha supuesto un drástico avance en el estudio de las radiofuentes en el Universo, pero también de la dinámica terrestre. Como ya se mencionó en la sección 2.1.1, la enorme precisión y resolución que obtenemos en el cartografiado de radioestructuras de diminuta extensión angular (hasta por debajo del milisegundo de arco) se traduce también en una enorme precisión en la determinación de la geometría del interferómetro (permitiéndonos estimar las posiciones relativas de los radiotelescopios con precisiones del orden de una fracción de centímetro). Esto ha devenido en seguimientos exhaustivos y precisos del movimiento de las placas tectónicas y de la rotación terrestre, lo que ha llevado al refinamiento y perfeccionamiento de los modelos de estructura dinámica de la Tierra.

Una vez conocidos y modelados con precisión los efectos que alteran la geometría del interferómetro (es decir, las posiciones de los radiotelescopios y su evolución), así como las características del medio de propagación de las señales, podemos usar esta información para mejorar el estimado de las posiciones de las radiofuentes observadas, empujando así la precisión astrométrica del interferómetro hasta su límite técnico.

Esa es la filosofía que hemos seguido en los análisis astrométricos que vamos a describir en esta parte de la tesis. Los cuatro grandes pasos seguidos pueden resumirse en: (i) obtención de los observables astrométricos (retraso de grupo, retraso de fase y ritmo de franja), (ii) modelado de la geometría del interferómetro, (iii) corrección (conexión) de los retrasos de fase en base al modelo geométrico y (iv) estimado de las posiciones de las fuentes observa-

das mediante análisis de mínimos cuadrados, usando los retrasos de fase como información.

En el presente capítulo, describiremos algunas características del paquete de programas *UVPAP*, software que hemos puesto a punto para realizar estos cuatro pasos en los análisis astrométricos que detallamos en el capítulo 7.

## 6.1. El programa *UVPAP*

Las siglas *UVPAP* refieren a *University of Valencia Precision Astrometry Package* (Paquete de Astrometría de Alta Precisión de la Universidad de Valencia). Este nombre abarca a todo el conjunto de programas que hemos corregido, ampliado y desarrollado para llevar a cabo ajustes astrométricos globales de retraso de fase.

El corazón de *UVPAP* es una adaptación del antiguo programa *VLBI3*, escrito por D. S. Robertson (Robertson 1975). *UVPAP* calcula las posiciones de los radiotelescopios en base a un modelo sencillo de mareas terrestres y calcula los efectos que el medio de propagación (atmósfera) y las correcciones relativistas producen en los retrasos de las señales. El programa calcula, entonces, los correspondientes valores teóricos de los observables de VLBI. Seguidamente, compara los valores teóricos con los observados, siendo capaz de ajustar un gran número de parámetros del modelo (derivadas de reloj de las estaciones, retrasos troposféricos, posiciones de las fuentes, etc.) mediante análisis de mínimos cuadrados. En las siguientes secciones, hablaremos más en detalle de los distintos tipos de ajuste de *UVPAP*.

Para crear *UVPAP* hemos tenido que actualizar exhaustivamente el código de *VLBI3*. Este programa estaba estructurado para calcular los observables teóricos de VLBI utilizando las tablas PEP de efemérides del *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), mediante un código ya obsoleto, así como el modelo de Relatividad General del Sistema Solar propuesto por Shapiro (1964), cuyas predicciones son sensiblemente menos exactas que las de modelos más elaborados, como el *Consensus Model*, del que ya hablaremos. Además, *VLBI3* estaba bastante limitado en memoria, siendo incapaz de ajustar simultáneamente las posiciones de todas las fuentes de la muestra polar S5. Adicionalmente, su código tampoco estaba preparado para trabajar con datos posteriores al 31 de diciembre de 1999.

Además de la actualización de *VLBI3*, el paquete *UVPAP* también cuenta

con toda una batería de nuevos programas basados en algoritmos que hemos tenido que desarrollar desde cero para resolver la conexión de fases con interferómetros formados por un gran número de antenas y con observaciones de un gran número de fuentes. Destaca entre estos algoritmos, nuestro conector automático de fases, que describimos en el apéndice B.

### 6.1.1. Modelo geométrico del interferómetro

En esta sección describiremos las características del modelo que usa *UVPAP* para calcular las posiciones de los radiotelescopios en la Tierra, la propagación de las señales en la atmósfera y la deformación de los frentes de onda (vistos por cada estación) debida a la velocidad de la Tierra y a la presencia del Sistema Solar (correcciones relativistas).

#### Tectónica de placas

Las posiciones de los radiotelescopios están cambiando continuamente a medida que evoluciona la corteza terrestre. Para el nivel de precisión en la posición relativa de las antenas que requerimos en nuestros ajustes (del orden de unos pocos milímetros para las líneas de base más cortas y del orden del centímetro para las más largas) nos es suficiente modelar la deriva continental suponiendo una velocidad de deriva constante para todos los radiotelescopios. Es decir, conociendo las posiciones de los radiotelescopios en una época de referencia, y conociendo sus velocidades relativas en esa misma época, sencillamente extrapolamos de forma lineal las posiciones de éstos hasta la época de nuestras observaciones. Las posiciones y velocidades que hemos usado en nuestros análisis han sido tomadas para la época de referencia del 1 de enero de 1997, de acuerdo a las soluciones publicadas por el *International Earth Rotation Service* (IERS 1998).

#### Mareas terrestres

Los efectos gravitatorios de la Luna y el Sol sobre la corteza terrestre (mareas terrestres) pueden producir variaciones en las posiciones de las antenas del orden de 0.5 m. Para modelar estas variaciones, debemos conocer cómo responde la forma de la Tierra a la presencia de fuerzas gravitatorias que dependen de la posición. *UVPAP* caracteriza el efecto de las mareas en cada estación, descomponiéndolo en dirección radial (vertical, en el sentido topocéntrico) y

tangencial (direcciones Norte y Oeste). Las deformaciones en estas tres direcciones pueden descomponerse, a su vez, en desarrollos en serie, función de la latitud y la longitud, así como de los términos de la expansión del potencial perturbador en armónicos esféricos. Para calcular la deformación terrestre, las componentes de estos armónicos se multiplican por factores que dan cuenta de la inercia de nuestro planeta a las deformaciones en cada armónico. Estos factores reciben el nombre de *números de Love* (para la dirección vertical) y *números de Shida* (para las direcciones tangenciales). A primer orden, es decir, en la aproximación bipolar de las mareas (que es el nivel de precisión en el que trabaja *UVPAP*), los números de Love y Shida valen  $h = 0.60967$  y  $l = 0.085$ , respectivamente (e.g., Dahlen 1976). Mejoras posteriores de este modelo<sup>1</sup> tienen efectos equivalentes a variar  $h$  y  $l$  en torno al 13% y el 35%, respectivamente, además de introducir efectos de retardo en las mareas (componentes imaginarias para  $h$  y  $l$ ).

En la figura 6.1 mostramos la diferencia entre el modelo de *UVPAP* de mareas terrestres y un modelo más elaborado (vid. IERS 2004), usado por el programa de modelado geodésico *CALC*, mantenido por el *Goddard Space Flight Center* de NASA. Hemos calculado estas diferencias a partir del modelado correspondiente a unas observaciones de VLBI de las fuentes B0454+844, B0615+820 y B0716+714, realizadas el 13 de enero de 2001 a 8.4 GHz. Como vemos, los retrasos relativos predichos por los distintos modelos de mareas difieren hasta en 0.03 ns (es decir,  $\sim 1$  cm) para los retrasos máximos (que coinciden normalmente con las líneas de base más largas). Para el caso del *fringe rate*, en la figura 6.1 vemos que la diferencia máxima entre ambos modelos es del orden de 0.2 ps/s, con lo que el uso de un modelo u otro no va a repercutir en el proceso de conexión de fases, del que ya hablaremos.

### **Paso al sistema de referencia celeste instantáneo**

El sistema de referencia en el que se dan las coordenadas de los radiotelescopios es el denominado *ITRF* (*International Terrestrial Reference Frame*). Este es un sistema geocéntrico orientado a derechas, con sus tres ejes dispuestos de la siguiente forma: el eje  $x$ , en intersección con el meridiano de Greenwich; el eje  $y$ , en dirección 90° Oeste; el eje  $z$ , en la dirección del Polo

---

<sup>1</sup>Básicamente, adición de términos correctivos a los números de Love y Shida que dan cuenta de los efectos causados por la inelasticidad de la Tierra, resonancias de las mareas con el movimiento del núcleo y redistribución de materia en el interior terrestre (e.g., IERS 2004)

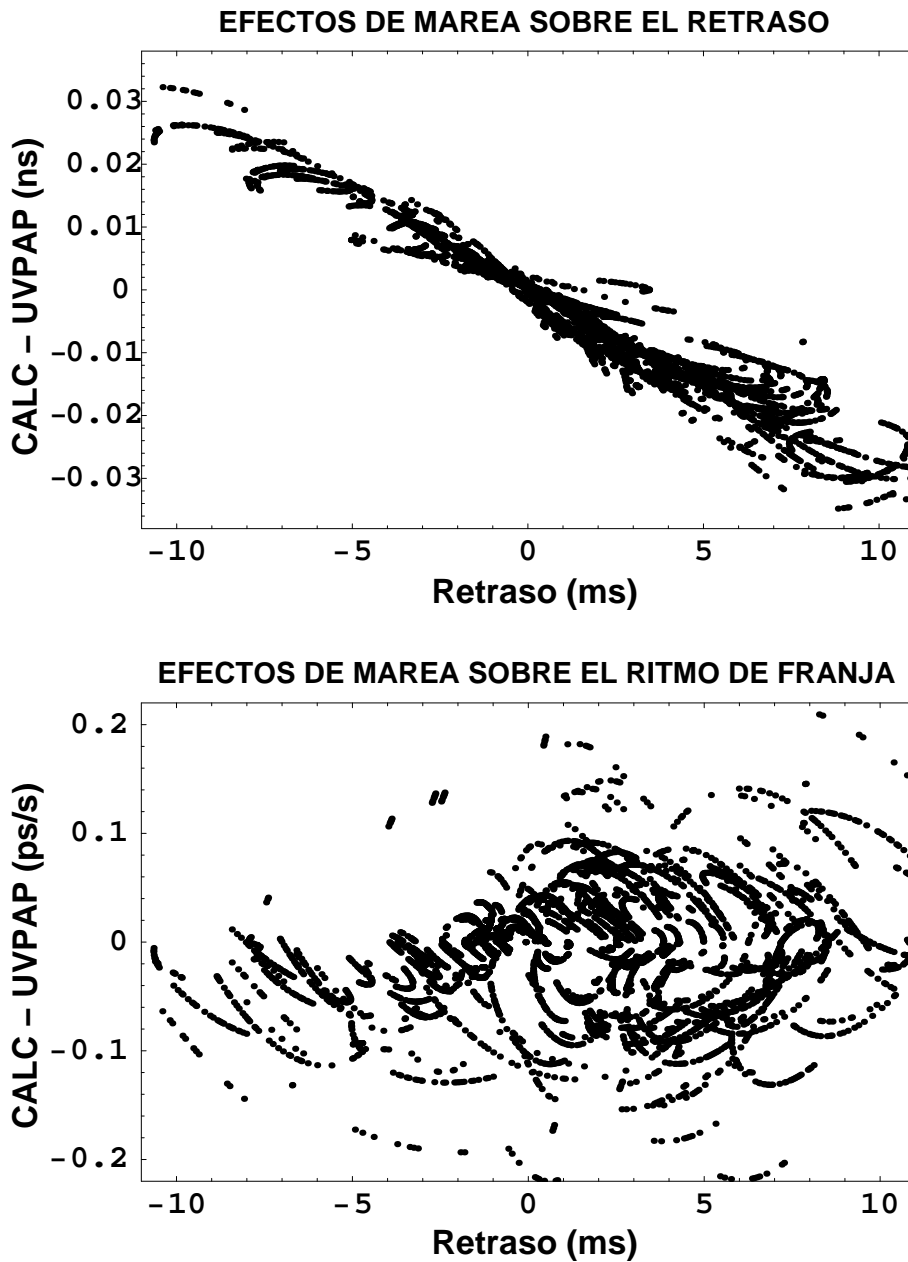


Figura 6.1: Diferencia entre los retrasos teóricos (arriba) y los ritmos de franja (abajo) calculados por el programa *CALC* y los calculados por *UVPAP*, para unas observaciones del año 2001 (ver texto), en función de dichos retrasos. Las diferencias provienen de los distintos modelos de mareas terrestres empleados por ambos programas.

Norte geográfico medio correspondiente al año 1900 (este es el denominado *Conventional International Origin*). Por otra parte, el sistema de referencia en el que se dan las coordenadas de las radiofuentes es el denominado *ICRF* (*International Celestial Reference Frame*). Este sistema es también geocéntrico,

viniedo caracterizado por las dos bien conocidas coordenadas de ascensión recta y declinación. El origen de ascensión recta es el punto de Aries<sup>2</sup> el 1 de enero de 2000 a las 00:00h (sistema J2000.0), y el punto con declinación 90° se hace coincidir con el Polo Norte celeste de la misma fecha. Cabe decir, a modo de paréntesis, que este sistema de referencia está definido a partir de las posiciones de 504 radiofuentes extragalácticas, de las cuales son miembros la muestra polar S5. Así pues, los análisis astrométricos presentados en el capítulo 7 pueden repercutir en un estudio sobre la estabilidad en las posiciones de las fuentes que definen el ICRF.

Dado que el complicado movimiento de la Tierra (y del ITRF con ella) tiene componentes en todas las direcciones del ICRF, es necesario corregir todos esos movimientos y definir un sistema de coordenadas común para fuentes y radiotelescopios, de forma que podamos calcular correctamente los valores teóricos de los observables de VLBI de acuerdo a la ecuación 1.1. El sistema de coordenadas en el que *UVPAP* calcula las posiciones de antenas y fuentes es el denominado *sistema de referencia celeste instantáneo*. En este sistema, situamos el origen de ascensión recta y el punto de declinación máxima en el punto Aries y el Polo Norte celeste *instantáneos*, es decir, calculados en el momento preciso de cada observación de VLBI (con una duración aproximada de un minuto, en nuestro caso), teniendo en cuenta la precesión y nutación terrestres definidas por las convenciones de IAU 1976 (Lieske et al. 1976) y de IAU 1980 (e.g., Wahr 1981), respectivamente.

El cambio de coordenadas de los radiotelescopios desde el ITRF al sistema celeste instantáneo es laborioso y delicado. Primero, tenemos que rotar el Polo Norte geográfico hasta alinearlo con el Polo Norte celeste instantáneo. En principio, cabría esperar que ambos polos estuviesen ya alineados, pero además de la precesión y la nutación terrestres (que varían la dirección en la que apunta el Polo Norte geográfico) hay otro movimiento denominado *wobble*, que hace variar la localización geográfica del Polo mismo. Este movimiento puede descomponerse en varias partes. Una de ellas corresponde al giro del Polo Norte geográfico con respecto al eje de simetría de la Tierra (es la llamada componente de Chandler y tiene una amplitud de unos 0.5 asec y un período de 14 meses); otra componente se debe a la redistribución anual de los océanos y la atmósfera (de amplitud parecida a la de la componente de Chandler y período de 12 meses).

---

<sup>2</sup>El punto de la eclíptica correspondiente al Equinoccio de Primavera.



Una vez hemos alineado el Polo Norte geográfico con el celeste, aún hemos de realizar una última corrección; una rotación en torno al Polo Norte que dé cuenta de la diferencia entre el Tiempo Universal Coordinado (UTC) y el Tiempo Universal (UT1) definido a partir del movimiento sidéreo (e.g., Aoki et al. 1982). El UTC se define a partir del Tiempo Atómico Internacional, el cual viene determinado por estándares atómicos de frecuencia. Así pues, el UTC es una forma constante y estable de medir el tiempo, completamente independiente del (cambiante) movimiento sidéreo. Por contra, el tiempo UT1 incluye todas las variaciones de rotación de la Tierra, como las originadas por efectos geofísicos (por ejemplo, los intercambios de momento angular entre la Tierra y los océanos) y las debidas a la continua desaceleración terrestre producida por la interacción gravitatoria con la Luna. Dado que las fuentes observadas rotan en el cielo al ritmo determinado por el UT1, y los relojes de los radiotelescopios (los que se usaron para grabar las señales) se rigen por el UTC, hemos de conocer en todo momento la diferencia UT1–UTC, para poder atrasar y adelantar continuamente el tiempo que marcan los observables de VLBI, de suerte que podamos situar en todo momento a las antenas en el sistema de referencia celeste instantáneo.

La diferencia UT1–UTC está acotada a valores inferiores a 1 segundo, en valor absoluto. Para que esta condición se cumpla, IERS introduce saltos de 1 segundo (*leap seconds*) en el UTC, para mantenerlo sincronizado con el UT1. También hemos de tener en cuenta estos segundos extra en el cálculo de los valores teóricos de los observables de VLBI.

Todos los datos sobre el *wobble* y todos los valores de UT1–UTC que hemos utilizado en nuestros análisis astrométricos han sido extraídos de las soluciones publicadas anualmente por IERS (e.g., IERS 1998), en sus tablas EOP. Nuestro software interpola los valores reportados en estas tablas al tiempo correspondiente a cada observable de VLBI, de forma que para cada observación podemos situar antenas y fuentes en el mismo sistema de coordenadas.

### **Efectos relativistas causados por el Sistema Solar**

Para el nivel de precisión requerido en nuestro modelado de los retrasos de fase (del orden de pocos picosegundos para los retrasos diferenciales, como veremos en el capítulo 7) necesitamos tener en cuenta los efectos de la curvatura espacio-temporal generada por el Sistema Solar, así como la relatividad en la medida del tiempo de cada estación originada por las velocidades de

los radiotelescopios correspondientes al movimiento rotacional y orbital de la Tierra. Si integramos estos efectos relativistas durante 60–120 segundos (duraciones típicas de una observación de VLBI), podemos obtener alteraciones de los retrasos de incluso centenares de picosegundos.

El modelo que hemos implementado en *UVPAP* para el cálculo de estos efectos es el *Consensus model* (vid. IERS 2004), que determina los retrasos relativos entre dos antenas sustituyendo la ecuación 1.1 por la fórmula

$$\tau_{ij}^{BC} = -\frac{1}{c}\vec{S}(\vec{X}_j(T_j) - \vec{X}_i(T_i)) + \Delta T_{\text{grav}}^{ij} \quad , \quad (6.1)$$

expresión dada respecto al sistema de referencia solidario con el baricentro de masas del Sistema Solar (*BC*), que se supone en reposo.  $\tau_{ij}^{BC}$  es el retraso entre la antena *i* y la *j*,  $\vec{X}_m(T_m)$  es la posición de la antena *m* en el instante  $T_m$  (momento en el que recibe la señal de la radiofuente),  $\vec{S}$  es un vector unitario que apunta en la dirección de la fuente observada (en ausencia de curvatura espacial) y donde  $\Delta T_{\text{grav}}^{ij}$  da cuenta de la ralentización del tiempo debida a curvatura espacio-temporal del Sistema Solar. Este término puede escribirse, en el mismo sistema de referencia, como

$$\Delta T_{\text{grav}}^{ij} = \frac{2G}{c^3} \sum_k^{N_c} M_k \log \left( \frac{|\vec{R}_{ik}| + \vec{K} \vec{R}_{ik}}{|\vec{R}_{jk}| + \vec{K} \vec{R}_{jk}} \right) \quad , \quad (6.2)$$

donde  $G$  es la constante de Gravitación Universal,  $k$  es un índice que corre sobre los distintos cuerpos del Sistema Solar (de número  $N_c$ ),  $M_k$  y  $\vec{K}$  son la masa y el vector de posición del cuerpo  $k$ -ésimo y  $\vec{R}_{mk}$  es el vector distancia entre el cuerpo  $k$ -ésimo y la antena  $m$  en el momento  $T_m$  (para el caso de la Tierra,  $\vec{R}_{km}$  se toma como el vector distancia desde su centro hasta la antena  $m$ ). En la ecuación 6.2 se considera al Sol, a los ocho planetas del Sistema Solar, e incluso a la Luna (cuyos efectos pueden ser de varios picosegundos). Cálculos más precisos tienen también en cuenta el momento angular de cada planeta (efectos gravitomagnéticos). Cuando pasamos esta sencilla ecuación al sistema de referencia celeste instantáneo, la longitud de la fórmula resultante es formidable (vid. IERS 2004, página 113; ecuación 9) y no vale la pena reproducirla en esta tesis. Lo que sí cabe decir es que tanto para calcular  $\Delta T_{\text{grav}}^{ij}$  como para realizar el cambio de coordenadas que nos lleve del Centro de Masas del Sistema Solar al sistema de referencia celeste instantáneo, hemos de conocer, lógicamente, las posiciones de todos los planetas del Sistema Solar en cada instante, así como sus masas y la del Sol. Por consiguiente, para poder

implementar el *Consensus Model* en *UVPAP* hemos tenido que implementar también la lectura de las tablas de efemérides DE405 del *Jet Propulsion Laboratory*, más exactas que las ya obsoletas tablas PEP de MIT que utilizaba *VLBI3*.

Este modelo de consenso es capaz de determinar las correcciones relativistas de los retrasos con una precisión de escasos picosegundos (IERS 2004). El modelo de correcciones relativistas que usaba *VLBI3* era el conocido modelo de Shapiro (1964), deducido a partir de ciertas aproximaciones que no resultaron ser del todo correctas en la práctica<sup>3</sup>. En la figura 6.2 mostramos la diferencia entre las predicciones del modelo de Shapiro, usando *VLBI3*, y el *Consensus Model*, usando *UVPAP*, para unas observaciones de las fuentes B1928+738 y B2007+777 realizadas el 28 de octubre de 1988 a 8.4 GHz. Como vemos, las diferencias máximas en retraso son de algunas decenas de picosegundos, siendo las diferencias en fringe rate verdaderamente pequeñas (milésimas de ps/s).

### Relojes atómicos de las estaciones y monturas de las antenas

Puesto que en VLBI cada antena graba su señal en base a un reloj atómico independiente de los del resto de antenas, es posible que pequeños efectos de desincronización entre los distintos relojes atómicos de las estaciones afecten a la determinación de los retrasos. En *UVPAP* modelamos estas derivas de reloj (*clock drifts*), ajustándolas a polinomios de grado 3, cuyo término independiente da cuenta de la desincronización inicial (que puede ser de hasta varios microsegundos) y los términos de orden superior dan cuenta de la deriva de los relojes (del orden de la decena de femtosegundos por segundo).

El término de orden cero de las derivas de reloj también absorbe el efecto del (constante) camino óptico que va desde el punto reflejo del foco de la antena respecto de su superficie (punto de referencia del frente de ondas) hasta el punto de intersección entre los ejes de la montura (punto de referencia de la antena). No obstante, cuando los ejes de la montura de una antena no intersectan (como suele ser el caso a veces) hay que añadir un término adicional al modelo geométrico, función de la elevación de la antena en cuestión, que dé cuenta de la variación de camino óptico de la señal respecto del punto de referencia de la antena. Esta variación no puede ser absorbida por las derivas de reloj.

---

<sup>3</sup>Principalmente, expresiones que vienen de la definición de las coordenadas en el sistema del baricentro de masas inmerso en el espacio-tiempo curvado.

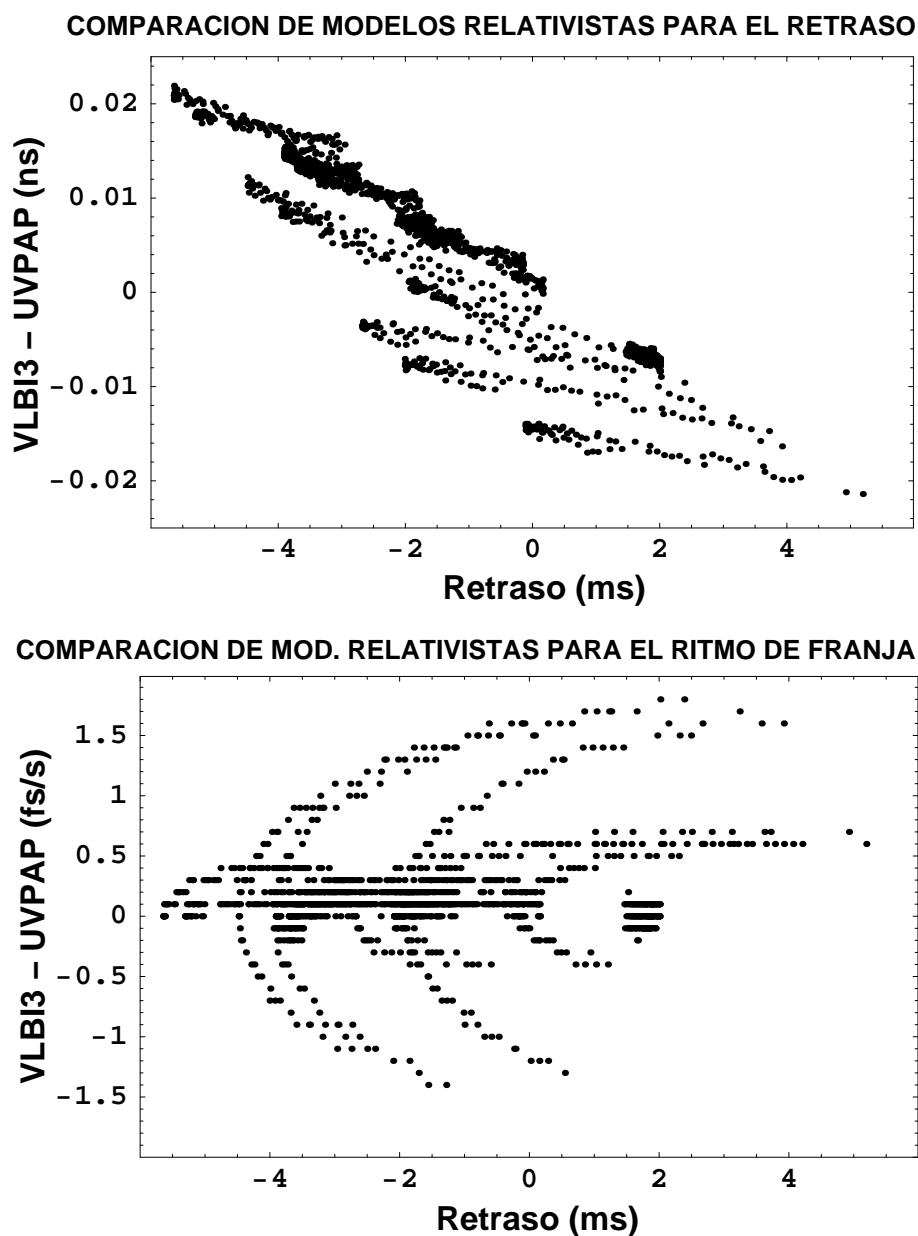


Figura 6.2: Diferencia entre los retrasos teóricos (arriba) y los ritmos de franja (abajo) calculados por *VLBI3* y los calculados por *UVPAP*, para unas observaciones del año 2001 (ver texto), en función de dichos retrasos.

### 6.1.2. Medio de propagación de las señales

Cuando las señales de las radiofuentes entran en la atmósfera terrestre, sufren procesos dispersivos que afectan al camino óptico que las lleva hasta los radiotelescopios. Esto se traduce en importantes variaciones (del orden de la decena de nanosegundos) en los retrasos observados. Además, las enormes distancias entre las estaciones de VLBI implican que las condiciones atmosféricas

sean muy distintas en unos radiotelescopios y otros, por lo que los retrasos debidos a la presencia de atmósfera no cancelan entre las distintas estaciones. Seguidamente, describiremos cómo *UVPAP* modela los retrasos dispersivos inducidos por la atmósfera. Cabe decir que estos retrasos atmosféricos son la principal fuente de incertidumbre en los análisis astrométricos que presentamos en el capítulo 7, siendo también el principal factor limitador de la técnica de referencia de fase.

### Retraso dispersivo ionosférico

El efecto de la ionosfera en el retraso de grupo es el opuesto al del retraso de fase. Si durante su trayectoria hacia el radiotelescopio, la señal se encuentra con una región de electrones libres, cuya densidad (integrada en la dirección de propagación de la señal) es  $E_e$  (en unidades de  $e^-/\text{m}^2$ ), entonces el retraso introducido en la señal es

$$\Delta\tau_{ion} = \pm \frac{kE_e}{c\nu^2} , \quad (6.3)$$

donde  $k = 40.3 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ,  $\nu$  es la frecuencia de la señal y  $c$  es la velocidad de la luz. El signo  $+$  corresponde al retraso de grupo (es decir, la señal se retrasa), mientras que el signo  $-$  corresponde al retraso de fase (la señal se adelanta). De este modo, conociendo el contenido de electrones  $E_e$  para cada instante y cada punto de la ionosfera, se pueden modelar las contribuciones ionosféricas a los retrasos de grupo y fase. Actualmente, y gracias a la red de satélites GPS, pueden obtenerse mapas del apantallamiento de electrones en la ionosfera en función del tiempo para una gran región de la Tierra. Nosotros hemos utilizado los mapas IONEX generados por el *Center for Orbit Determination in Europe* (CODE), a partir de datos GPS, que dan el contenido total de electrones de la ionosfera como función de las coordenadas terrestres y del tiempo. A partir de estos mapas, y usando la ecuación 6.3, la rutina *TECOR* (e.g., Walker & Chatterjee 1999) del programa *Astronomical Image Processing System* (*AIPS*), de NRAO, es capaz de convertir los mapas IONEX en retrasos sobre cada estación y cada instante de tiempo, para una longitud de onda de 1 metro. Posteriormente, exportamos los resultados de *TECOR* a uno de los nuevos programas de *UVPAP*, que calcula las contribuciones ionosféricas en los retrasos de grupo y fase (y también en los ritmos de franja) para sustraerlas de los datos antes del análisis de mínimos cuadrados.

**Retraso dispersivo troposférico**

En *UVPAP*, el modelado de la contribución de la troposfera es esencialmente distinto al de la ionosfera. Así como *UVPAP* resta el retraso ionosférico de los datos antes del ajuste, el retraso troposférico es modelado en el análisis de mínimos cuadrados, de forma que los parámetros que definen el retraso troposférico son ajustados junto con las posiciones de las fuentes y el resto de parámetros necesarios.

El retraso troposférico en cada estación puede dividirse en dos partes. Una es debida a la componente seca de la atmósfera, que genera un retraso en la dirección del cénit dado por la expresión

$$\tau_{\text{cénit}}^{\text{seca}} = \frac{0.00228P}{c} \quad (6.4)$$

donde  $P$  es la presión atmosférica en la zona del radiotelescopio (en milibares) y  $c$  es la velocidad de la luz (en  $\text{m s}^{-1}$ ). La otra parte es debida a la componente húmeda de la atmósfera, y su modelado en función de los datos meteorológicos puede tener errores incluso de un 20 % (Davis et al. 1985), dado que los datos locales de humedad relativa pueden diferir notablemente de la humedad relativa a grandes distancias de la superficie<sup>4</sup>. La contribución de la componente húmeda de la atmósfera al retraso en la dirección del cénit se puede caracterizar, según Thomson et al. (1986), en la forma

$$\tau_{\text{cénit}}^{\text{hum}} = \frac{4643.6h_r}{cT^2} \left( \frac{T}{273} \right)^{-5.3} \exp(25.2(T - 273)/T) \quad (6.5)$$

donde  $h_r$  es la humedad relativa en la zona del radiotelescopio y  $T$  es la temperatura en Kelvin. El retraso en el cénit de la componente seca suele estar típicamente entre 4 y 10 ns, mientras que el de la componente húmeda no suele llegar a 1 ns.

Para calcular el retraso troposférico a elevaciones distintas de  $90^\circ$  (el cénit) multiplicamos el retraso en el cénit por la llamada *función de mapeo*, que es distinta para las componentes seca y húmeda. Actualmente, existen multitud de funciones de mapeo que describen el retraso troposférico, unas más elaboradas que otras, aunque todas ellas tienden a converger a elevaciones altas (diferencias de  $\sim 0.03$  ns en el retraso para elevaciones mayores de  $\sim 20^\circ$ ; Davis et al. 1985). Puesto que nuestros análisis astrométricos están basados en

---

<sup>4</sup>El vapor de agua no está mezclado homogéneamente en la atmósfera y los cambios locales de concentración de vapor de agua varían de forma impredecible.

observaciones en las que se optimizaron al alza las elevaciones de las antenas, el uso de cualquier función de mapeo no va a afectar demasiado a los resultados. De hecho, en *UVPAP* hemos introducido una nueva función de mapeo, la *Global Mapping Function* (Boehm et al. 2006, que tiene en cuenta las distintas latitudes y longitudes de las antenas) para comparar resultados con la función de mapeo de Chao (Chao 1974), que es la programada en *VLBI3*, obteniendo resultados totalmente compatibles entre una y otra, tal y como describimos en el capítulo 7.

La función de mapeo que hemos utilizado en nuestros análisis finales es la de Chao, que modela el retraso troposférico en la forma

$$\tau(\epsilon) = \tau_{\text{cenit}} \frac{1}{\sin(\epsilon) + \frac{A}{\tan(\epsilon) + B}} \quad (6.6)$$

donde  $\epsilon$  es la elevación a la que se calcula el retraso, y  $A$  y  $B$  son constantes que difieren entre las componentes seca y húmeda de la atmósfera. Para la componente seca,  $A = 1.43 \times 10^{-3}$  y  $B = 4.45 \times 10^{-2}$ , mientras que para la componente húmeda,  $A = 3.5 \times 10^{-4}$  y  $B = 1.7 \times 10^{-2}$ . Para elevaciones superiores a  $20^\circ$ , la función de mapeo difiere un  $0.7\%$  entre las componentes seca y húmeda. Esto, unido al hecho de que la componente húmeda siempre suele ser unas 10 veces más pequeña que la seca, nos permite aproximar el retraso troposférico, para el nivel de precisión requerido, usando una única función de mapeo (la de la componente seca), poniendo como retraso en el cénit la suma de retrasos  $\tau_{\text{cenit}}^{\text{seca}} + \tau_{\text{cenit}}^{\text{hum}}$ .

Con todo esto, lo que modelamos en *UVPAP* es la evolución del retraso troposférico en el cénit, que el programa convierte posteriormente en retraso total aplicando la fórmula 6.6. La evolución del retraso troposférico en el cénit la modelamos como una función lineal a trozos, es decir, interpolando linealmente los retrasos estimados en tiempos concretos (es decir, en los nodos de la función lineal a trozos). Para la duración de las observaciones que describimos en el capítulo 7 ( $\sim 24$  horas), hemos usado 5 nodos (es decir, un nodo cada 6 horas). Los parámetros de ajuste de este modelo son los valores del retraso troposférico en los nodos, cuyos valores a priori se obtienen a partir de las fórmulas 6.4 y 6.5 y de los datos meteorológicos medidos en todas las estaciones durante las observaciones.





# Chapter 7

## High-Precision Astrometry of the S5 Polar Cap Sample at 15 GHz

### 7.1. Introduction

Over the last years, we have carried out a series of VLBI observations using the Very Long Baseline Array (VLBA) at 8.4, 15.4, and 43 GHz, aimed at studying the absolute kinematics of a complete sample of extragalactic radio sources using astrometric techniques. The target of our programme is the “complete S5 polar cap sample”, consisting on 13 radio sources from the S5 survey (Eckart et al. 1986; Kuehr et al. 1981). We show the list of all S5 polar cap sample sources in table 7.1. All sources in this sample have well defined *International Celestial Reference Frame* (ICRF-Ext.2) positions (see Fey et al. 2004) and flux densities larger than 0.2 Jy, at 15 GHz, at the epochs of our observations. The source separations, less than about  $15^\circ$  for neighbouring sources, should allow for typical astrometric precisions in the range of 20 to  $100 \mu\text{as}$ , depending of the observing frequency (lower frequencies translate into lower precisions). In this chapter, we report on the first global astrometric analysis of this project. We have obtained relative positions of all sources of the sample at 15 GHz for two epochs separated by one year. Finally, we analyze the differences between the results from these epochs.

Source	Alias	ICRF-Ext.2 position (J2000.0)	
		$\alpha$	$\delta$
0016+731	00	00 <sup>h</sup> 19 <sup>m</sup> 45.786421 <sup>s</sup>	73° 27' 30.01750"
0153+744	01	01 <sup>h</sup> 57 <sup>m</sup> 34.964908 <sup>s</sup>	74° 42' 43.22998"
0212+735	02	02 <sup>h</sup> 17 <sup>m</sup> 30.813373 <sup>s</sup>	73° 49' 32.62179"
0454+844	04	05 <sup>h</sup> 08 <sup>m</sup> 42.363503 <sup>s</sup>	84° 32' 04.54402"
0615+820	06	06 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup> 03.006188 <sup>s</sup>	82° 02' 25.56764"
0716+714	07	07 <sup>h</sup> 21 <sup>m</sup> 53.448459 <sup>s</sup>	71° 20' 36.36339"
0836+710	08	08 <sup>h</sup> 41 <sup>m</sup> 24.365262 <sup>s</sup>	70° 53' 42.17301"
1039+811	10	10 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup> 23.062554 <sup>s</sup>	80° 54' 39.44303"
1150+812	11	11 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup> 12.499130 <sup>s</sup>	80° 58' 29.15451"
1749+701	17	17 <sup>h</sup> 48 <sup>m</sup> 32.840231 <sup>s</sup>	70° 05' 50.76882"
1803+784	18	18 <sup>h</sup> 00 <sup>m</sup> 45.683914 <sup>s</sup>	78° 28' 04.01849"
1928+738	19	19 <sup>h</sup> 27 <sup>m</sup> 48.495167 <sup>s</sup>	73° 58' 01.57010"
2007+777	20	20 <sup>h</sup> 05 <sup>m</sup> 30.998511 <sup>s</sup>	77° 52' 43.24763"

Table 7.1: List of the S5 polar cap sample sources. Column 2 are the source name aliases we use throughout this thesis. Columns 3 and 4 are the ICRF-Ext.2 positions (right ascension and declination in J2000.0, respectively).

## 7.2. Observations

The whole set of observations of our project consists of 12 epochs (4 at each observing frequency) between years 1997 and 2004. The structures of the S5 polar cap sources for two of these epochs (years 1999.57 and 2000.46) at 15.4 GHz and two epochs (years 1997.93 and 1999.41) at 8.4 GHz, were discussed by Pérez-Torres et al. (2004) and Ros et al. (2001), respectively. The astrometric analysis reported in this thesis corresponds to the two 15 GHz epochs discussed in Pérez-Torres et al. (2004).

The observations of all the epochs took place in subsets of 3 or 4 radio sources. The sources of each subset were cyclically observed for over 2 hr. On-source scans were 60 sec long, with a small time gap (10-20 sec) to slew the VLBA antennas. Thus, one complete observing cycle was about 5 min long. This observing mode resulted in a total observation time for each radio source of about 4 hr (see figure 7.1). Data were cross-correlated at the Array Operation Center of NRAO in Socorro (NM, USA). We used *AIPS* for the calibration of the visibilities. We aligned the visibility phases through the whole frequency band (for all sources and times) by first fringe fitting the single-band delays of one scan of the source 1803+784 and then applying the estimated correc-

tions to all the visibilities. Thus, another fringe fitting using the multi-band delays provided the new phase corrections for all the observations. The visibility amplitude calibration was performed using the system temperatures and gain curves from each antenna. For imaging, we transferred the data into the program *DIFMAP* (Shepherd et al. 1995) and made several iterations of phase and gain self-calibration until obtaining high-quality images (with residuals close to the thermal noise). The images of all the sources corresponding to this epoch have been analyzed and published in Pérez-Torres et al. (2004).

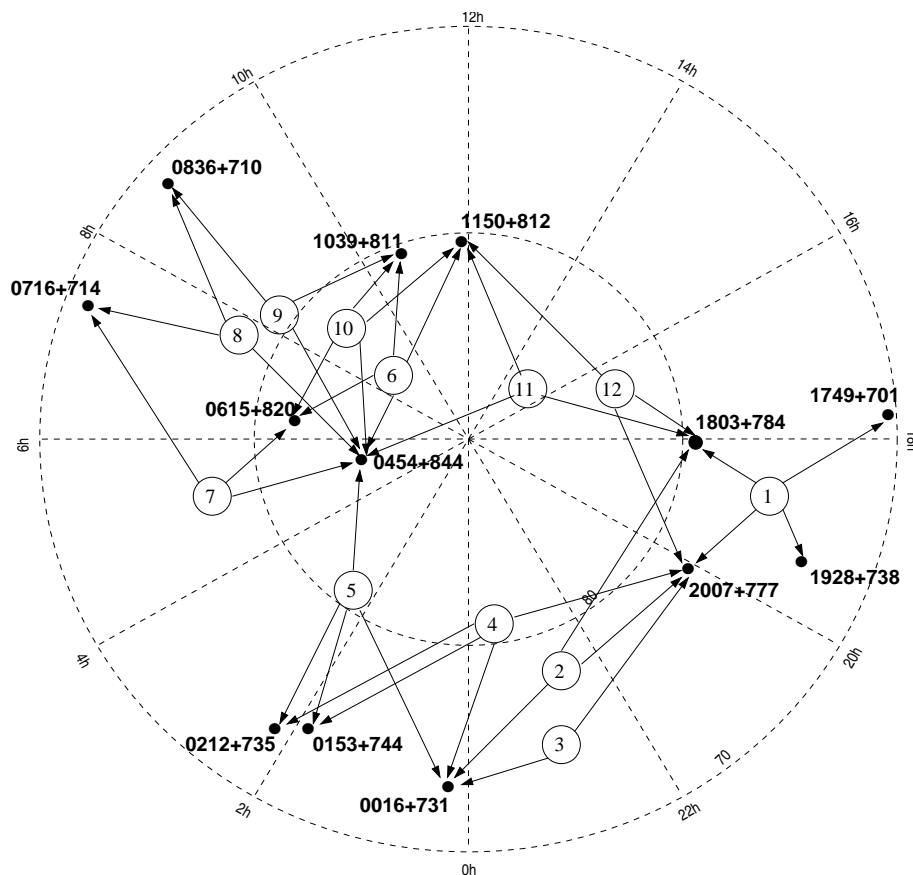


Figure 7.1: Sky distribution of the sources in the polar cap sample and schematic representation of the schedule of our observations. Arrows connected to each circle point to the sources included in the same observing block, typically lasting 2–4 hours with a source observation duty cycle of about 5 minutes. The numbers associated to the circles represent the chronological order of the observation blocks.

### 7.3. Astrometric Analysis of Epoch 2000.46

In this section, we describe all the steps followed to perform the global astrometric analysis of epoch BM123, observed on 15 June 2000, with *UVPAP* using the phase-delay observable. The main results of this analysis have been published in Martí-Vidal et al. (2008)

#### 7.3.1. The Process of Phase Connection

The main issue that must be solved when working with phase-delays is the ambiguity problem. There are different approaches to solve such a problem (e.g., Beasley & Conway 1995; Shapiro et al. 1979), but none of them has been ever used in observations involving more than 3 sources.

For the analysis reported in this chapter, we have solved the ambiguity problem performing a phase-connection of the phase delays, in a similar way than earlier analyses (e.g., Guirado et al. 1995; Pérez-Torres et al. 2000; Ros et al. 1999; Shapiro et al. 1979), but with some substantial differences. We outline the main steps followed in our global phase-delay astrometric analysis:

1. We use *AIPS* to obtain the group delay, phase delay, and rate from each observation of each of the thirteen sources of the polar cap sample, after accounting for all the contributions from the structure of the sources, thus referring the phase-delays to the phase image centers.
2. We predict the number of cycles of phase between consecutive observations of each of the thirteen sources to permit us to “connect” the phase delays (e.g., Shapiro et al. 1979); the computation of the number of phase cycles is performed by comparing the phase delays with the modelled delays obtained from *UVPAP*, using a fit of the clock drifts of the VLBA antennas and the tropospheric zenith delays to the group delay and rate data.
3. We refine this phase-delay connection using an algorithm that imposes the nullity of all the closure phases (see appendix B for details).
4. We compute the differenced phase delays among the sources observed close in time. These differenced delays are largely free from unmodelled effects of the troposphere, ionosphere, and antenna electronics (e.g., Marcaide et al. 1994).

5. We estimate the positions of the 13 sources of the S5 polar cap sample via a global weighted-least-squares analysis to the undifferenced and differenced data.

By *differenced phase-delays*, we mean the difference of the delay corresponding to one source and the delay corresponding to another source, which is observed at a time very close to the observation of the first one. It can be shown that the differenced phase-delays between pairs of sources are almost free of antenna-based effects and, thus, their use allows higher precision of the estimates of source positions (Marcaide et al. 1994). Most of the difficulty in the use of the phase-delay astrometry is concentrated in Step 2. The group-delays and delay rates are not precise enough for a correct prediction of the  $2\pi$  cycles that must be added to the phase-delays of each baseline and time. Nevertheless, if the modelling of the delay rate is good enough for a correct prediction of the number of  $2\pi$  cycles to be added between two consecutive scans of the same source, then the connection of the phase delays will be successful, regardless of possible overall ambiguities that could remain in the data (related to the ambiguities of the observations corresponding to the first scan of each source). In practice, the phase connection resulting from Step 2 will work as long as the residual delay rates obtained in Step 1 are lower than the delay corresponding to one phase cycle, divided by the time between two consecutive scans of the same source. In the case of the observations here reported, the residual rates should be smaller than  $\sim 0.36$  ps/s. We show in figure 7.2 the distribution of rate residuals resulting from the fit of Step 1. As we can see, most of the rate residuals of our observations fulfil this condition, but there is a small subset of relatively large residuals, which correspond to observations for which unmodelled phase-delay cycles will surely remain after applying Step 2. In previous analyses (e.g., Guirado et al. 1995; Shapiro et al. 1979) these uncorrected phase cycles could be found by visual inspection, but with the amount of sources and antennas of our observations, such procedure is not practical. We had to develop an algorithm that automatically corrects the unmodelled phase-delay cycles that remain in the data after Step 2, allowing for a correct and definitive phase connection of the phase delays. Such algorithm is described in appendix B.

In Step 5, we fit the positions of all the sources with respect to the phase center of 0454+844 (whose coordinates are fixed parameters in our fits) along with the tropospheric zenith delays and clock drifts for each antenna. We choo-

se the source 0454+844 as the reference source, not only because of its position (roughly in the geometrical center of the sky distribution of the sample, minimizing the sum of distances to the other sources), but also because it is the most observed source in the schedules of the observations here reported (see figure 7.1). Taking this source as reference, thus, provides more stability to the astrometric fit.

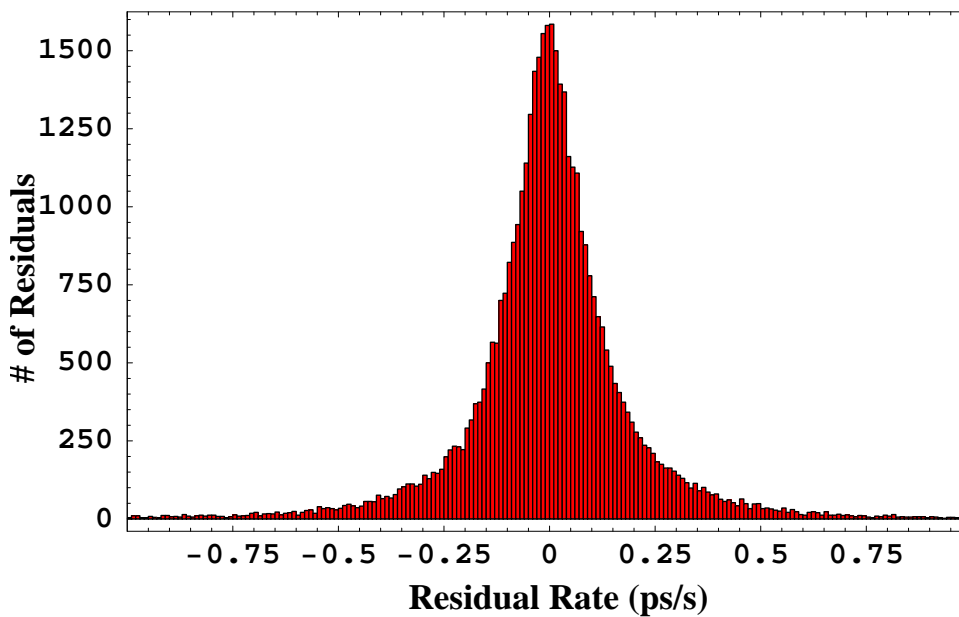


Figure 7.2: Distribution of the residual delay rates for all the baselines, sources, and scans of our observations.

### 7.3.2. Antenna-Based Ambiguities

The antenna-based ambiguities are offsets of the phase-delay, consisting of a given integer number of phase-delay cycles, that depend on each antenna and source. These ambiguities do not affect the phase closures and, thus, are completely transparent to the automatic connection algorithm described in appendix B. These antenna-based cycles appear very clearly in the residuals of the differenced-delay observables, but can also be detected in the residuals of the undifferenced delays. To correct these antenna-based ambiguities, we apply another algorithm based on a *smoothness criterion*, that analyzes variations between differenced (and also undifferenced) phase-delay residuals of neighboring scans that are, in modulus, close to, or larger than, a phase cycle.

For each scan, the algorithm:

1. Finds such variations.
2. Analyzes whether these jumps have an antenna-based structure.
3. Corrects the antenna-based phase cycle in the observations.

This algorithm is applied in a “bootstrapping” manner, i. e., beginning with a subset of 3 close-by antennas (Kitt Peak, Pie Town, and Los Alamos) and adding more antennas (one at a time) when all the residuals of the subset of antennas are finally smoothed. We show an example of one iteration of this *smoothness criterion* algorithm in figure 7.3.

#### 7.3.3. Overall (Source-Based) Ambiguities

Since we phase connect the data for each source independently, we still have to determine, for each antenna, the overall source-based ambiguity, that is, the integer number of phase cycles by which the phase delay of one source is offset from the others. This offset cannot be totally absorbed by either atmospheric, clock, or astrometric corrections, and it can affect notably the astrometric results at our precision level.

We determine the overall ambiguities following again an iterative process: first, we estimate the overall ambiguities in our weighted least-squares fit. The overall ambiguities closest to an integer number of cycles of phase delay are set to be exactly equal to that integer number of cycles of phase delay. Then, we repeat the astrometric fit to obtain new estimates of the remaining overall ambiguities. Progressively, all the ambiguities are fixed to integer numbers of cycles of phase delay. For the complete set of overall ambiguities, the maximum deviation with respect to an integer number of cycles turns out to be less than one fourth of a cycle of phase delay (in fact, 40% of all the overall ambiguities deviate less than one tenth from their closest phase cycle integers).

#### 7.3.4. Differenced Observables in the Global Fit

The use of differenced observables corresponding to a given pair of sources will increase the precision in the determination of the *relative* positions of such pair (i. e., the position of one of the sources with respect to the position of the other; see appendix C). For the observations here reported, differenced

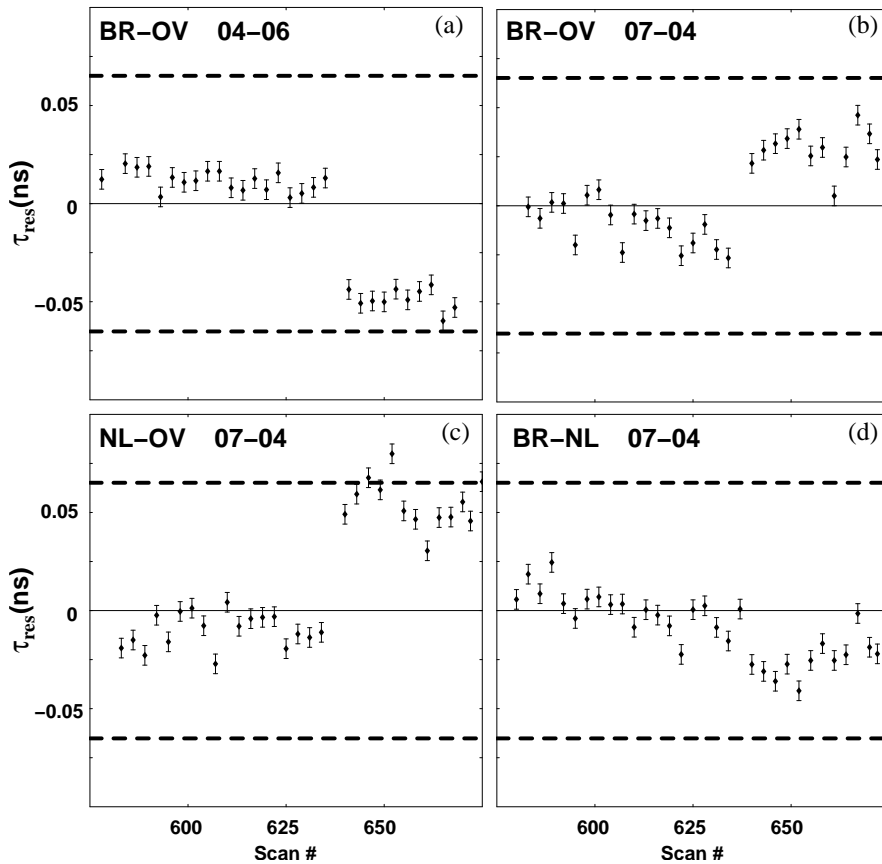


Figure 7.3: Example of the effect of an antenna-dependent unmodelled phase cycle in the differenced observables associated to some baselines and source pairs (see source codes in table 7.1). The baseline and source pair corresponding to each figure are indicated in the upper-left corner (BR refers to Brewster, OV to Owens Valley, and NL to North Liberty). The dashed lines represent the delays  $\pm 0.06515$  ns, corresponding to  $+1$  and  $-1$  cycle of phase at the observing frequency. The *smoothness criterion* algorithm infers, from (a) and (b), that source 04 is the one affected by the unmodelled phase cycle and, from (c), that the affected antenna is OV; (d) corroborates the deductions extracted from the other figures.

observables for a total of 24 source pairs can be computed. This “network” of differenced observations introduces redundancies for sources that appear in more than one pair. These constraints in the degrees of freedom for the positions allow for an increase in the precision, not only of the relative source positions, but also, although to a lower degree, of their absolute coordinates. The advantage of the redundancy introduced by the network of differenced observations can only be used when more than one pair of sources is available.



Thus, the use of all our data in a unique fit provides more robust results than the sub-division of the observations in individual sets of source pairs fitted separately.

We use both differenced and undifferenced observations in the same (global) fit; the latter are included for the fit to remain sensitive to antenna-dependent parameters (i. e., clock drifts and zenith delays). We scale separately the standard deviations of the differenced and undifferenced phase delays in such a way that for each type of data, and for each baseline and source, the rms of the postfit residuals is unity. The ratio between standard deviations of the differenced and undifferenced observations is  $\sim 0.67$ .

### 7.3.5. Error Analysis

To estimate the astrometric uncertainties, we allow for variations of the site coordinates, the coordinates of the Earth's pole, and UT1–UTC in an auxiliary fit, but with their adjustments constrained by their *a priori* values and their standard deviations (see Table 7.2) through the use of an *a priori* covariance matrix. We then use the final covariance matrix of this auxiliary fit to estimate the final astrometric uncertainties, which include now all the contributions and correlations between the parameters of the geometry of the interferometer and the propagation medium. We also scale the uncertainties of all the fitted parameters to make the reduced  $\chi^2$  equal to unity.

Regarding the tropospheric zenith delays, the standard deviations of the fitted nodes of the piece-wise linear functions of our model are  $\sim 0.01$  ns for our observations. These are smaller than the expected uncertainties due to random variations of the wet component of the tropospheric delay at each site ( $\sim 0.1$  ns between the nodes; Treuhaft & Lanyi 1987). These, *a priori*, extra random variations are not contemplated in the computation of our astrometric uncertainties<sup>1</sup>, because such unmodelled variations constitute a large fraction of the final rms, which affects, indirectly, the astrometric uncertainties after their scaling to obtain a reduced  $\chi^2$  equal to unity.

As a check of the sensitivity of our results to the troposphere modelling, a change of the mapping function or an increase of the number of tropospheric nodes has been made, which does not alter our results much; for instance, the astrometric corrections of the relative source positions obtained with the use

---

<sup>1</sup>If we fix the uncertainties of the nodes of the tropospheric delay models to 0.1 ns, it results in an increase of the astrometric uncertainties by a factor  $\sim 2$

of the Global Mapping Function (Boehm et al. 2006) differs less than  $8\ \mu\text{as}$  with respect to those obtained using the Chao mapping function for all the pairs of sources.

Fixed parameter	A-priori uncertainty
0454+844 position	0.3 mas (in $\alpha$ and $\delta$ )
Earth Pole	0.7 mas (in $\alpha$ and $\delta$ )
Site Coordinates	2 cm in each coordinate (x,y,z)
UT1 – UTC	0.04 ms

Table 7.2: Fixed parameters and their uncertainties according to IERS.

### 7.3.6. Results

We present the results of the astrometric analysis of epoch 2000.46 in tables 7.3 and 7.4. Table 7.3 shows the astrometric corrections, and corresponding uncertainties, to the absolute source positions given by ICRF-Ext.2. Table 7.4 shows: i) the changes in the relative coordinates of the 24 source pairs, computed using equation C.9; ii) the angular separations of the source pairs, computed from their ICRF-Ext.2 coordinates; and iii) our estimated corrections to those pair angular separations. In figure 7.4, we show the images of the S5 polar cap sample sources at this epoch, marking with crosses our astrometric corrections to their absolute positions.

As an example of the quality of our fit, we show in figure 7.5 the residuals of the undifferenced and differenced phase delays corresponding to all the observed sources and one of the longest baselines (Hancock – Kitt Peak). Note the cancellation of systematic effects in the differenced data, effects which are still noticeable in the undifferenced data (probably unmodelled atmospheric effects). The rms of the undifferenced delays for all sources and baselines range between 55 ps (baseline Fort Davis – North Liberty observing the source 0212+735) and 6 ps (baseline Kitt Peak – Pie Town observing the source 0016+731). The rms of the differenced delays range from 35 ps (baseline Hancock – Owens Valley observing source the pair 11–04; see table 7.1 for source aliases) to 2.2 ps (baseline Brewster – Los Alamos observing the pair 18-17). This latter rms is somewhat smaller.

We emphasize that the relative coordinates of each pair in Table 7.4 are not simple subtractions of the absolute coordinates of the sources forming such

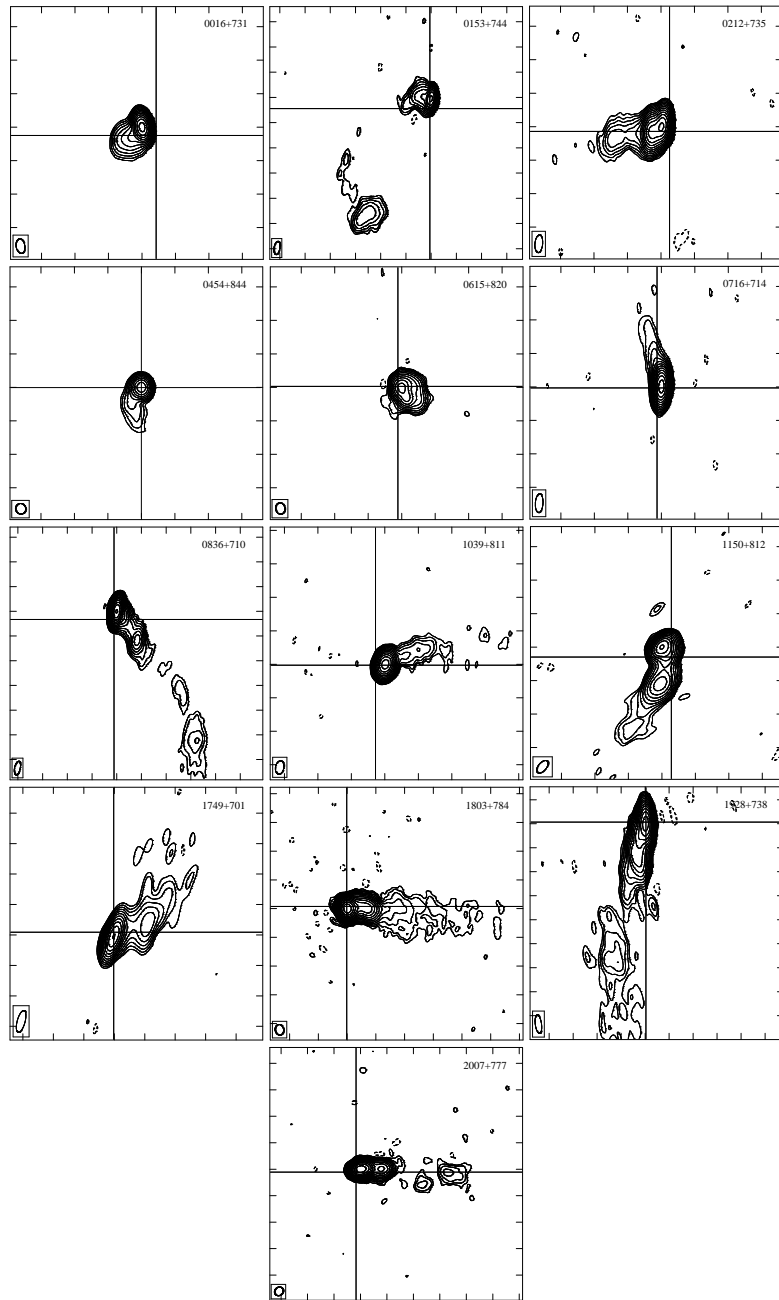


Figure 7.4: Images of the S5 polar cap sample sources obtained from our 15.4 GHz observations. The phase center of each map corresponds to the peak of brightness of each source (which is located at the nominal source position, i.e. that one corresponding to the IERS-Ext.2 solution). The crossing lines mark our astrometric corrections to the IERS-Ext.2 positions. Tick marks are separated by 2 mas. Horizontal and vertical axes are relative  $\alpha$  and  $\delta$ , respectively. FWHM of convolving beams are shown at bottom-left of each map. Contours are at  $-3, 3, 3\sqrt{3}, 9, \dots$  times the rms of the map residuals.

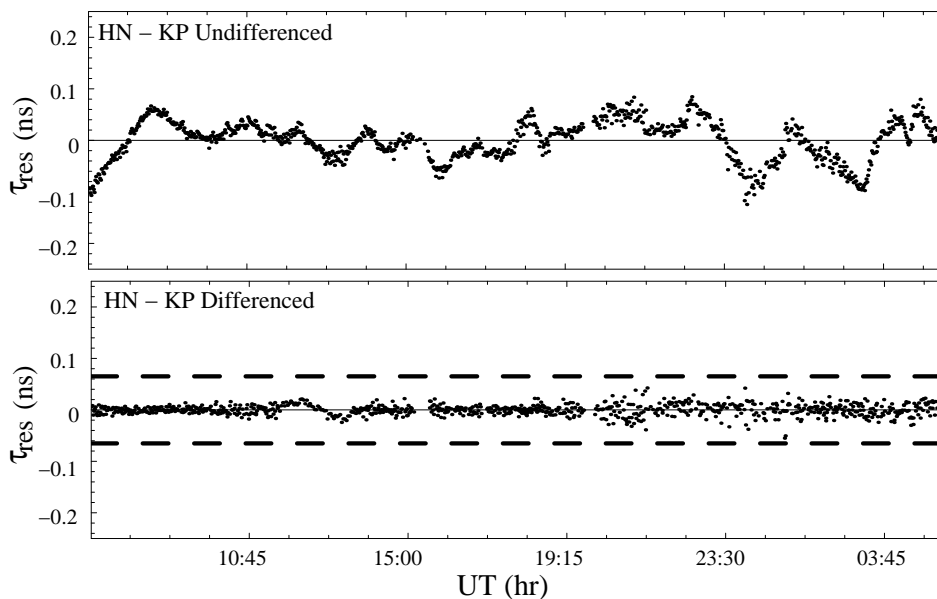


Figure 7.5: Postfit residuals of the undifferenced (above) and differenced (below) phase delays of all the pairs of sources for the baseline Hancock – Kitt Peak. The dashed lines in the lower figure represent the delays  $\pm 0.06515$  ns, corresponding to +1 and  $-1$  cycle of phase.

pair in Table 7.3 (except for those pairs with reference source 04; see equation C.9). Also, the uncertainties in the relative coordinates are much smaller than those of the absolute coordinates. This is a consequence of, first, the natural cancellation of systematic errors in the differenced observables, and, second, the correlations between the absolute positions estimated in the fit, that account for all possible global shifts of the sources of each pair.

As it could be expected, the standard deviations of the absolute positions are roughly the same for all sources; however, since we are using differenced observables in our fit, the standard deviations of the relative positions of the 24 pairs are strongly dependent on the separation of the sources that form the pairs. This effect can be clearly seen in figures 7.6 and 7.7. Figure 7.6 shows the uncertainties in the relative  $\alpha$  and  $\delta$  for the 24 pairs as a function of their separations. The behavior is roughly linear, as predicted by the empirical formulae given by Shapiro et al. (1979) and corroborated by simulations of astrometric VLBA observations performed by Pradel et al. (2006). This linearity is more clearly seen in figure 7.7, which shows the uncertainties of the estimates of the separations as a function of such separations. It is to be noticed, however,

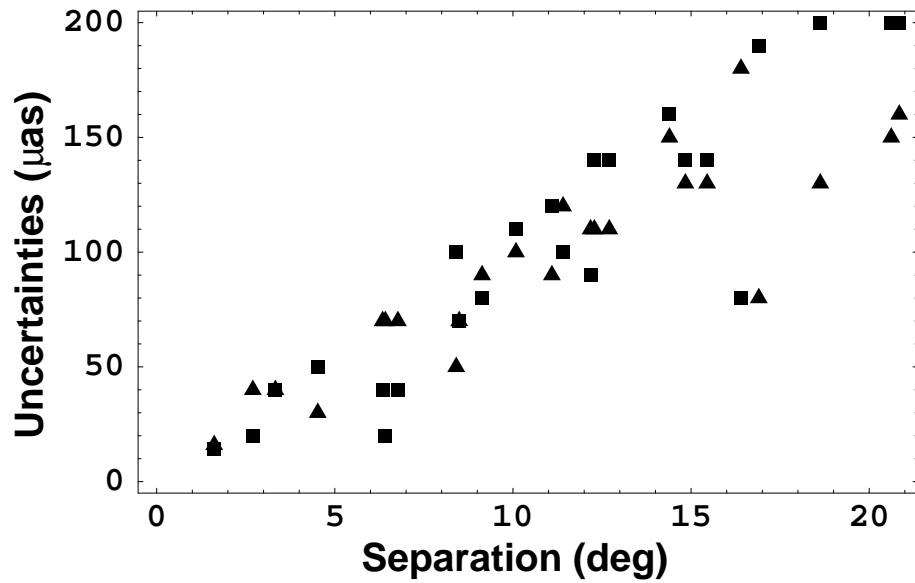


Figure 7.6: Uncertainties in the relative coordinates  $\alpha$  (triangles) and  $\delta$  (squares) of all the pairs of sources as a function of their separations.

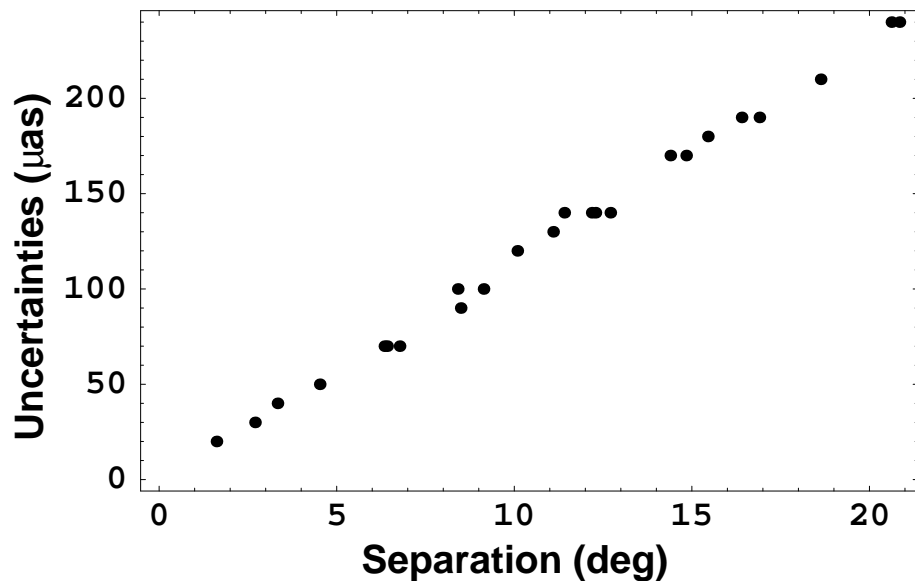


Figure 7.7: Uncertainties in the separations of all the pairs of sources as a function of such separations. Since the behavior of the uncertainties is roughly linear, the relative errors of the separations of the sources are similar,  $\sim 3 \times 10^{-9}$ .

that our astrometric uncertainties are  $\sim 10$  times smaller than those predicted by Shapiro et al. (1979) and given by the simulation estimated by Pradel et al. (2006) for the typical declinations of the S5 polar cap sample sources. This improvement in precision is probably due to the fact that we have simul-

taneously analyzed all the 13 sources, instead of using the usual two-source (target/reference) scheme. Therefore, our global analysis brings more constraints on the position of the sources, that produce an immediate benefit in the precision of the astrometry particularly for high-declination sources. Moreover, unlike the phase-reference mapping technique, the tropospheric delay model is re-estimated along with the source positions in our least-squares fit, which also contributes to minimize the  $\chi^2$ .

Source	Astrometric corrections	
	$\Delta\alpha$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\delta$ ( $\mu\text{as}$ )
0016+731	$-820 \pm 320$	$-560 \pm 200$
0153+744	$-150 \pm 300$	$-810 \pm 180$
0212+735	$-620 \pm 310$	$-280 \pm 190$
0454+844	$0 \pm 300$	$0 \pm 300$
0615+820	$110 \pm 160$	$200 \pm 100$
0716+714	$220 \pm 360$	$-100 \pm 210$
0836+710	$280 \pm 360$	$-400 \pm 220$
1039+811	$660 \pm 190$	$-30 \pm 110$
1150+812	$-450 \pm 180$	$-640 \pm 120$
1749+701	$460 \pm 380$	$140 \pm 230$
1803+784	$70 \pm 230$	$130 \pm 140$
1928+738	$90 \pm 310$	$0 \pm 190$
2007+777	$400 \pm 240$	$-250 \pm 150$

Table 7.3: List of our corrections to the absolute positions of all sources, keeping fixed the position of source 0454+844 in to that given in ICRF-Ext.2 (see text).

### 7.3.7. Phase Delay vs. Group Delay for Astrometry

The standard deviation of the (undifferenced) group-delay residuals of all data, after performing the Step 1 described in section 7.3.1, is 0.74 ns. Once all the phase-connection process is performed, the standard deviation of the undifferenced phase-delay residuals, using all data, is only 0.03 ns. Thus, using phase-delays instead of group-delays decreases by a factor  $\sim 25$  the standard deviation of the residuals. This decrease directly translates into an important improvement of the  $\chi^2$  at the minimum and, accordingly, into a decrease of the statistical uncertainties of the adjusted source positions. In principle, the increase in astrometric precision should be roughly equal to the improvement of the value of the  $\chi^2$  at the minimum, but the real increase of the astrometric precisions can be even larger. The use of *differenced* phase delays in the fit

Sources	Astrometric corrections		$\lambda$ (ICRF-Ext.2) (deg)	$\Delta\lambda$ $\mu\text{as}$
	$\Delta\alpha^{rel}$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\delta^{rel}$ ( $\mu\text{as}$ )		
01-00	$-990 \pm 70$	$180 \pm 40$	6.770731378	$850 \pm 70$
01-02	$-390 \pm 16$	$520 \pm 14$	1.614936659	$-620 \pm 20$
04-01	$-150 \pm 110$	$-810 \pm 140$	12.284604495	$810 \pm 140$
04-02	$-620 \pm 110$	$-280 \pm 140$	12.703755162	$450 \pm 140$
04-06	$110 \pm 40$	$200 \pm 40$	3.332785200	$-110 \pm 40$
04-07	$220 \pm 150$	$-100 \pm 160$	14.393224831	$150 \pm 170$
04-10	$660 \pm 100$	$-30 \pm 110$	10.085113231	$390 \pm 120$
06-07	$-80 \pm 90$	$-300 \pm 120$	11.093608166	$280 \pm 130$
06-10	$350 \pm 90$	$-120 \pm 80$	9.134095175	$350 \pm 100$
08-04	$-400 \pm 180$	$240 \pm 80$	16.400909237	$460 \pm 190$
08-07	$-180 \pm 70$	$270 \pm 20$	6.419140221	$150 \pm 70$
08-10	$730 \pm 110$	$310 \pm 90$	12.179115583	$760 \pm 140$
11-04	$-350 \pm 120$	$-120 \pm 100$	11.407147545	$350 \pm 140$
11-10	$930 \pm 40$	$580 \pm 20$	2.699376639	$-1020 \pm 30$
11-18	$1280 \pm 130$	$110 \pm 140$	14.839207812	$700 \pm 170$
11-20	$1530 \pm 130$	$-600 \pm 200$	18.626089045	$1180 \pm 210$
18-00	$-1050 \pm 160$	$-550 \pm 200$	20.844902015	$-140 \pm 240$
18-04	$-60 \pm 80$	$130 \pm 190$	16.901504141	$-140 \pm 190$
18-17	$340 \pm 50$	$10 \pm 100$	8.408293010	$-30 \pm 100$
18-20	$260 \pm 70$	$-360 \pm 40$	6.342305345	$370 \pm 70$
19-17	$350 \pm 70$	$140 \pm 70$	8.491093690	$-360 \pm 90$
19-20	$330 \pm 30$	$-250 \pm 50$	4.521891420	$-15 \pm 50$
20-00	$-1150 \pm 130$	$-450 \pm 140$	15.450912042	$-500 \pm 180$
20-02	$-910 \pm 150$	$-300 \pm 200$	20.618479511	$-300 \pm 240$

Table 7.4: Astrometric results for all the observed source pairs. In column 1 the sources of each pair, using the aliases defined in Table 7.1. In columns 2 and 3 the change in the relative coordinates of the second source of the pair with respect to the first one (according to equation C.9. The uncertainties are estimated using equations C.10.) In column 4 the angular separations of the sources, according to the ICRF-Ext.2. In column 5 our corrections to the angular separations. The uncertainties have also been estimated taking into account the covariance matrix of the fit.

further improves the astrometric precision, as it has been shown in the previous section.

## 7.4. Astrometric Analysis of Epoch 1999.57

The 15 GHz data corresponding to our second epoch analysis were taken on 27 July 1999, using the same antennas and duty cycles as that one observed on year 2000. Therefore, we performed an astrometric analysis similar to that one described in the previous section. Thus, we will not dwell again on the details of the astrometric analysis of these observations. The resulting residual rate distribution after applying Step 1 (see section 7.3.1) is shown in figure 7.8.

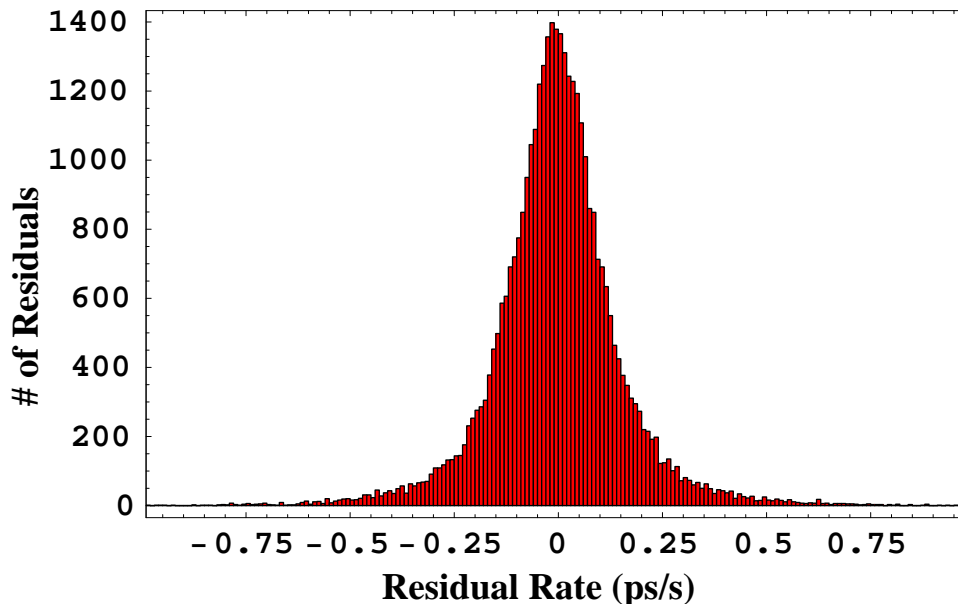


Figure 7.8: Distribution of the residual delay rates for all the baselines, sources, and scans of our observations at epoch 1999.57.

Like in the analysis of epoch 2000.46, there were unmodelled phase-delay cycles in the data after applying Step 2, which affected, in most cases, the closure phases. After applying Step 3, there were still antenna-dependent cycles, which were corrected following the same procedure as in epoch 2000.46. In fact, the only practical difference between both epochs is the quality of the data. During the observations at epoch 1999.56, there were transient intervals of bad weather that affected the tropospheric delays at all the antennas of



the interferometer. Fortunately, the bad weather was not critical during all the observations and did not affect too much the process of phase connection. However, we had to discard data from Mauna Kea and St. Croix, because of extremely bad quality of the observations. Moreover, given that source 0454+844 was observed mainly under bad weather conditions, we were forced to select another reference source (1803+784) in order to improve the fit. Actually, with 1803+784 as reference, the  $\chi^2$  decreases at the minimum by  $\sim 10\%$ .

The rms of the final undifferenced delay residuals range between  $\sim 100$  ps (all the baselines with Fort Davis, observing source 1150+812) and 10 ps (baseline Pie Town – Los Alamos observing source 0212+735). For the differenced delays, the residuals range between  $\sim 50$  ps (all the baselines with Fort Davis, observing the pair 04–11; see table 7.1 for source aliases) and 2.1 ps (baseline Pie Town – Los Alamos observing the pair 11–17). The rms of the postfit residuals in these observations are, in general, larger than those obtained for epoch 2000.46.

We show the residuals corresponding to the noisiest baseline (Fort Davis – Hancock) in figure 7.9, and the residuals of the longest baseline (Hancock – Kitt Peak) in figure 7.10. As it can be clearly seen, from 15:30 h to 03:15 UT, the data of FD–HN baseline is affected by bad weather, thus introducing relatively large residuals into the differenced delays. The effects of bad weather, for the same time interval, can also be seen in figure 7.10, although to a lower degree.

We show the final results of this analysis in table 7.5 (astrometric corrections of the absolute source positions) and table 7.6 (corrections of the relative positions). Notice that these astrometric corrections are taken *with respect to the source positions reported in the previous section, i.e., these corrections give direct deviations with respect to the positions reported for epoch 2000.46*. Thus, the corrections in tables 7.5 and 7.6 could be directly interpreted as negatives of the proper motions of the source peaks between epochs 1999.57 and 2000.46. The uncertainties are computed the same way as for epoch 2000.46. Given that the rms of the residuals is higher for this epoch, this translates into lower astrometric precisions.

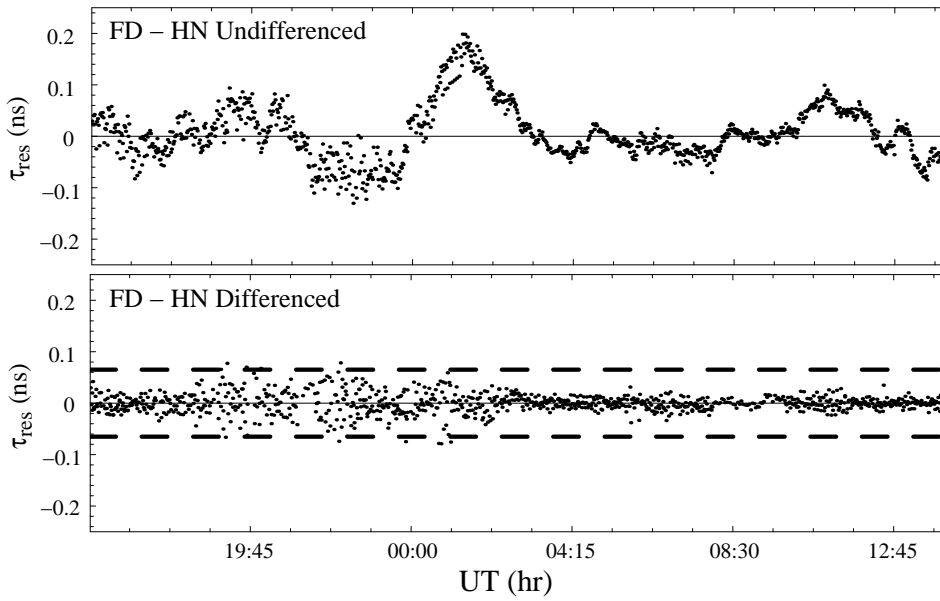


Figure 7.9: Postfit residuals of the undifferenced (above) and differenced (below) phase delays of all the pairs of sources for the baseline Fort Davis – Hancock. The dashed lines in the lower figure represent the delays  $\pm 0.06515$  ns, corresponding to +1 and  $-1$  cycle of phase.

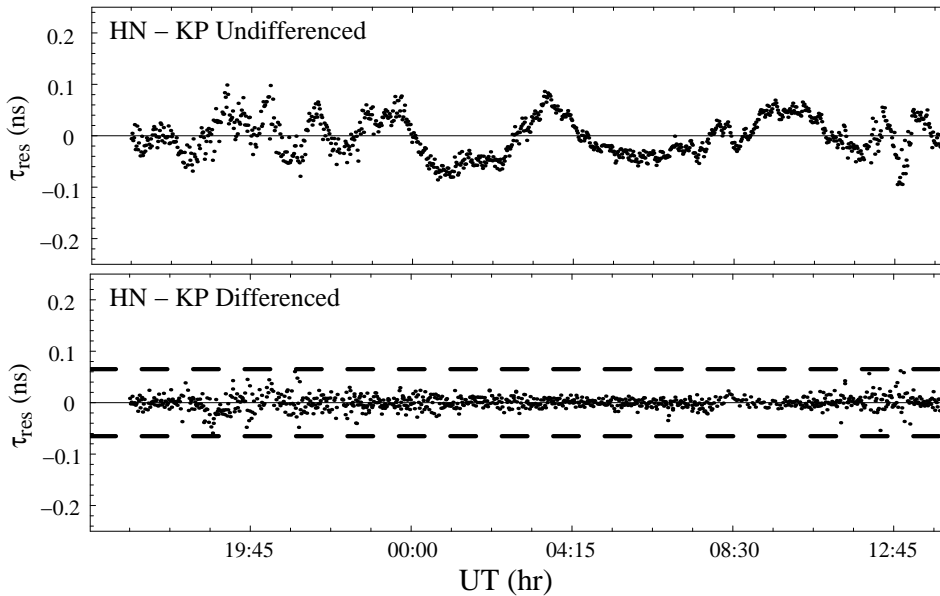


Figure 7.10: Postfit residuals of the undifferenced (above) and differenced (below) phase delays of all the pairs of sources for the baseline Hancock – Hancock. The dashed lines below represent the delays  $\pm 0.06515$  ns, corresponding to +1 and  $-1$  cycle of phase.

Source	Astrometric corrections	
	$\Delta\alpha$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\delta$ ( $\mu\text{as}$ )
0016+731	$-240 \pm 600$	$-190 \pm 400$
0153+744	$150 \pm 560$	$-700 \pm 370$
0212+735	$-20 \pm 600$	$-620 \pm 390$
0454+844	$-650 \pm 300$	$-400 \pm 300$
0615+820	$-300 \pm 360$	$-10 \pm 230$
0716+714	$-800 \pm 680$	$-600 \pm 430$
0836+710	$-1800 \pm 690$	$-300 \pm 440$
1039+811	$-870 \pm 390$	$540 \pm 250$
1150+812	$-420 \pm 390$	$400 \pm 250$
1749+701	$-60 \pm 720$	$-140 \pm 460$
1803+784	$0 \pm 230$	$0 \pm 140$
1928+738	$-180 \pm 590$	$180 \pm 380$
2007+777	$-50 \pm 470$	$100 \pm 300$

Table 7.5: List of our new corrections to the absolute positions of all sources at epoch 1999.57, with respect to the positions obtained at epoch 2000.46 (see table 7.3), keeping this time fixed the position of source 1803+784; the uncertainties in its coordinates are the errors obtained for epoch 2000.57.

## 7.5. Comparison of Results

As we show in table 7.5, all the astrometric corrections (absolute source positions at epoch 1999.57 with respect to those at epoch 2000.46) are compatible with zero at a  $2.6\sigma$  level. Again, the correlations among all source positions in the fit allow us to achieve more precision in the estimate of the relative positions of the sources observed in the same duty cycles. As we show in table 7.6, there is a subset of source pairs that were observed under bad weather conditions. The rms of the differenced (and undifferenced) residuals corresponding to these pairs was too large for the correct determination of possible antenna-based corrections and for the estimate of the corresponding overall source-based ambiguities. Thus, the estimates of the relative positions between these sources may be biased due to couplings between antenna-based ambiguities and tropospheric delays.

From the 11 remaining source pairs, observed under better weather conditions, 4 of them have corrections larger, or equal, than  $3\sigma$  (i.e., 3 times their corresponding uncertainties): 2 pairs (04-01 and 04-02) have corrections in the relative  $\alpha$ , 1 pair (01-00) has corrections in the relative  $\delta$ , and 1 pair (01-02) has corrections in the relative  $\alpha$ ,  $\delta$ , and  $\lambda$ .

Sources	Astrometric corrections		$\Delta\lambda$
	$\Delta\alpha^{rel}$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\delta^{rel}$ ( $\mu\text{as}$ )	$\mu\text{as}$
01-00	$-190 \pm 150$	$440 \pm 60$	$10 \pm 160$
01-02	$-110 \pm 30$	$76 \pm 20$	$-140 \pm 30$
04-01	$1670 \pm 390$	$-430 \pm 310$	$-150 \pm 400$
04-02	$1630 \pm 420$	$-330 \pm 320$	$-170 \pm 400$
04-06 <sup>1</sup>	$780 \pm 100$	$360 \pm 70$	$120 \pm 100$
04-07 <sup>1</sup>	$1600 \pm 390$	$-270 \pm 400$	$600 \pm 390$
04-10 <sup>1</sup>	$600 \pm 260$	$580 \pm 340$	$-160 \pm 420$
06-07 <sup>1</sup>	$-100 \pm 220$	$-600 \pm 310$	$560 \pm 300$
06-10 <sup>1</sup>	$-520 \pm 300$	$550 \pm 230$	$-750 \pm 380$
08-04 <sup>1</sup>	$-370 \pm 480$	$-220 \pm 110$	$260 \pm 490$
08-07 <sup>1</sup>	$880 \pm 210$	$-320 \pm 30$	$-840 \pm 210$
08-10 <sup>1</sup>	$160 \pm 380$	$800 \pm 200$	$610 \pm 420$
11-04 <sup>1</sup>	$-10 \pm 350$	$-320 \pm 360$	$210 \pm 500$
11-10 <sup>1</sup>	$-330 \pm 110$	$160 \pm 10$	$300 \pm 120$
11-18 <sup>1</sup>	$150 \pm 360$	$10 \pm 450$	$80 \pm 570$
11-20 <sup>1</sup>	$190 \pm 250$	$320 \pm 570$	$-210 \pm 620$
18-00	$240 \pm 420$	$-190 \pm 550$	$290 \pm 640$
18-04 <sup>1</sup>	$-650 \pm 170$	$-400 \pm 710$	$290 \pm 730$
18-17	$-60 \pm 100$	$-140 \pm 220$	$150 \pm 220$
18-20	$-50 \pm 180$	$100 \pm 70$	$-80 \pm 200$
19-17	$220 \pm 170$	$-300 \pm 120$	$12 \pm 190$
19-20	$50 \pm 70$	$-80 \pm 70$	$-30 \pm 100$
20-00	$230 \pm 250$	$-230 \pm 260$	$330 \pm 360$
20-02	$-50 \pm 280$	$-610 \pm 400$	$460 \pm 490$

Table 7.6: Astrometric corrections of all the observed source pairs for epoch 1999.57, with respect to the positions obtained at epoch 2000.46 (see table 7.3). The meaning of each column is the same as the corresponding column of table 7.4.

<sup>1</sup> Source pairs observed under bad weather conditions.

Even though results from two epochs may not be enough to reach any robust conclusions on the absolute kinematics of the source components, we will analyze all these shifts of the relative source positions between epochs 1999.57 and 2000.46.

### Sources 01, 02, and 04:

The two cases of source pairs observed under relatively good weather conditions, having shifts above the  $3\sigma$  level (between our two epochs) only in relative right ascension, have to do with source 04. The shifts in  $\alpha$  of source 01 and 02 with respect to 04 are both  $\sim 1650 \mu\text{as}$ . Moreover, other pairs (04-07 and 04-06, observed under critical weather conditions) also show large shifts in relative  $\alpha$ . All these shifts could be explained as a large shift of source 04 in right ascension towards the East direction at epoch 1999.57 (see figure 7.11). Nevertheless, it must be noticed that, as we see in table 7.6, only 2 from the 8 source pairs in which source 04 is involved were observed under relatively good weather conditions. Thus, strong systematic effects, due to correlations between antenna-based ambiguities and (noisy) tropospheric delays, could be present in the estimates of the relative positions of 01 and 02 with respect to 04, even though these pairs were observed under better weather conditions. As a consequence of it, we cannot robustly conclude about any absolute motion of source 04 between epochs 1999.57 and 2000.46.

### Sources 00 and 01:

Pair 01-00 has an angular separation of  $6.8^\circ$  and the right ascensions of the sources differ less than  $2^h$ . The similar right ascensions of these sources minimize the couplings between  $\alpha$  and  $\delta$  when we compute the relative position between one source and the other (see equation C.9). Thus, the shift of 00 with respect to 01 in  $\delta$  will also appear as a shift of 01 with respect to 00 in  $\delta$ . If we change the reference source in the pair 01-00 (from 01 to 00), the shift of source 01 with respect to 00 is  $-3 \pm 160 \mu\text{as}$  in  $\alpha$  and  $-520 \pm 40 \mu\text{as}$  in  $\delta$ . Thus, as expected, the change in declination of 01 with respect to 00 can be also interpreted as a change in declination of 00 with respect to 01; the change in right ascension of 01 with respect to 00 is clearly compatible with zero at a  $1\sigma$  level.

**Sources 01 and 02:**

Sources 01 and 02 are separated by only  $1.6^\circ$ . Thus, the changes in their relative positions are well related, given that the celestial sphere can be approximated to a plane in the small region of the sky where these sources are. Actually, the shift of source 01 with respect to 02 is  $110 \pm 30 \mu\text{as}$  in  $\alpha$  and  $-80 \pm 20 \mu\text{as}$  in  $\delta$ , practically the opposite of the shift of 02 with respect to 01. Both sources have approached an amount of  $-140 \pm 30 \mu\text{as}$  between epochs 1999.46 and 2000.57. Unfortunately, given that both sources have their structures roughly in the East-West direction, we cannot assign this shift to any absolute motion of their brightness peaks.

We must notice that this is the only case in which we have detected a  $3\sigma$  shift in the separation of sources between epoch 1999.46 and 2000.57 (without taking into account the shift of 07 with respect to 08, a pair observed under critical bad weather conditions). The rest of source pairs maintain their separations unchanged at a  $3\sigma$  level between epochs 1999.46 and 2000.57. However, if we compare our fitted positions at epoch 2000.57 with the ICRF-Ext.2 positions (table 7.4), there are 12 source pairs with separation corrections larger than  $3\sigma$ . Thus, the results from epochs 1999.46 and 2000.57 are notably compatible, compared to the ICRF-Ext.2 positions.

## 7.6. Conclusions

We report on the first global high-precision wide-field astrometric results at 15.4 GHz of our multi-frequency monitoring of the S5 polar cap sample. The two datasets here analyzed were observed on years 1999.46 and 2000.57. To obtain those results we first developed the package UVPAP, an extensively improved version of the well-known VLBI3 program. The ability of UVPAP to use differenced phase delays, along with newly developed phase-connection algorithms, enables us the use of differenced phase delays in global astrometric observations. We discuss the impact of the differenced phase delays on a global astrometric analysis and show that their use increases the precision of the relative source positions by a factor of  $\sim 10$  compared with the precision achievable using the phase-reference technique with pairs of sources (Pradel et al. 2006). For epoch 2000.57, the astrometric precisions obtained linearly decrease (from 14 to  $200 \mu\text{as}$ ) as the separations between the sources increase (from  $\sim 1.6$  to  $\sim 20.8$  degrees), with the result that the fractional errors in determining of the

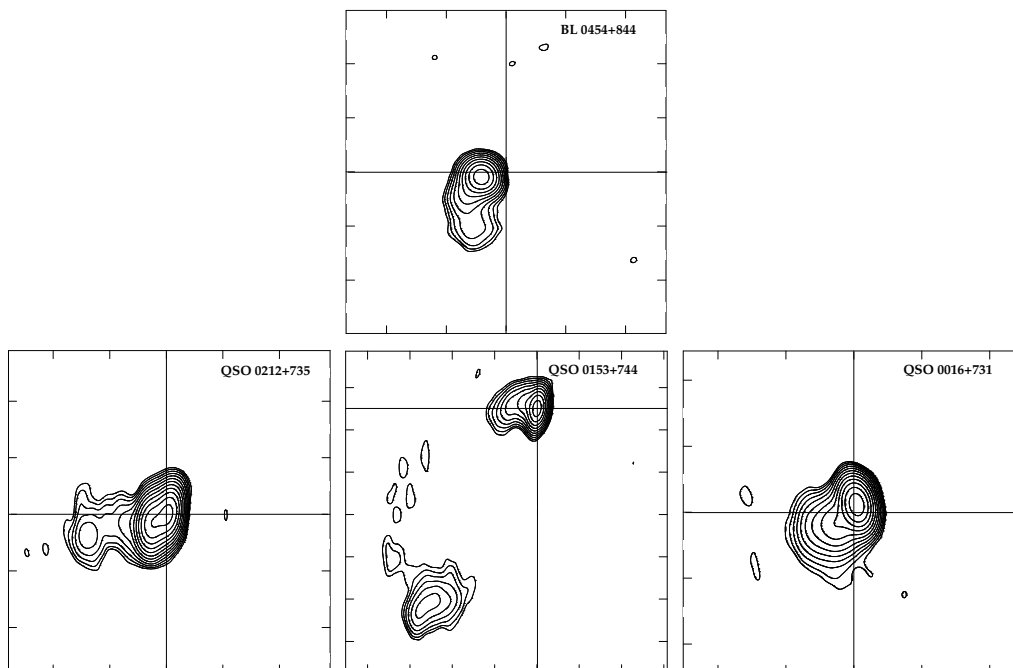


Figure 7.11: Images of sources 00, 01, 02, and 04 observed on epoch 1999.46. The peaks of brightness correspond to the structure phase centers at that epoch while the crosses mark the location of the peaks of brightness (structure phase centers) at epoch 2000.57 (fixing 01). Tick marks are separated by 2 mas. Contours are at 3,  $3\sqrt{3}$ , 9,... times the noise rms of each image (0.28, 0.46, 0.44, and 0.27 mJy/beam for sources 00, 01, 02, and 04, respectively).

separations of all the studied source pairs are similar ( $\sim 3 \times 10^{-9}$ ). For epoch 1999.46, the uncertainties obtained are larger (fractional errors of the separations of  $\sim 4 \times 10^{-9}$ ), given the bad weather conditions that affected nearly half of the observations.

We obtain some large corrections for the relative coordinates and separations of the sources, with respect to the ICRF-Ext.2 coordinates. From all the 24 pairs studied, 10 have separation corrections above  $500 \mu\text{as}$  and, of those, 4 have separation corrections above  $900 \mu\text{as}$ . Part of these corrections could be caused by opacity effects (our observations are at 15.4 GHz, and the ICRF-Ext.2 positions are based on 8.4 and 2.3 GHz observations) and by source structure effects (we are relating our astrometric positions to the phase centres of the source maps, that is, the peaks of brightness; the ICRF-Ext.2 positions are not well-defined on the source structures). However, the differen-

ces between source positions estimated at our two epochs are much smaller, indicating a large compatibility between astrometric results at both epochs.

More wide-field high-precision astrometric analyses of these sources at other frequencies and other epochs will eventually provide spectral information and the absolute kinematics for all sources in the sample. Ultimately, we expect to provide a definitive test of the stationarity of the innermost radio-source cores, associated to the massive black holes, which is a basic tenet of the standard jet interaction model (Blandford & Konigl 1979). In addition, our results will be an excellent complement to future  $\mu\text{as}$ -precise astrometry at optical wavelengths.



# Capítulo 8

## Resumen y conclusiones finales\*

En este último capítulo incluimos un resumen de la parte del cuerpo de la tesis que ha sido redactada en inglés, así como un repaso de las principales conclusiones a las que hemos llegado.

### 8.1. Expansión de SN 1993J

Hemos llevado a cabo un análisis sistemático y completo de todas las observaciones de VLBI relativas a la supernova SN 1993J. Este conjunto de observaciones consiste en un total de 69 épocas tomadas a varias frecuencias durante más de diez años (ver tabla 5.1). Tras analizar detalladamente todos estos datos de VLBI, hemos simulado con RAMSES un modelo capaz de explicar, no sólo la curva de expansión, sino las curvas de luz publicadas en Weiler et al. (2007), para lo cual hemos necesitado incorporar algunas correcciones al modelo de Chevalier, como explicamos más abajo.

#### El centro de expansión

Hemos analizado primero los datos en el plano de Fourier, ajustando, con el método de mínimos cuadrados, las visibilidades de la supernova a un modelo sencillo de emisión. Dicho modelo está basado en predicciones del *modelo de Chevalier* (Chevalier 1982*a;b*) y consiste en una corteza esférica, con emisividad uniforme, proyectada en el plano del cielo. A esta corteza le hemos añadido una componente altamente opaca que llena toda la parte interna de la misma (ver Marcaide et al. 2005). A partir de estos ajustes a las visibilidades, hemos

---

\*Resumen en castellano incluido solamente para cumplir con la normativa vigente.

estimado el centro de expansión de la supernova, así como el grosor relativo de la corteza esférica.

En la figura 5.1 mostramos los resultados de estos ajustes. Como puede verse, el centro de la expansión parece depender de la frecuencia de observación. En realidad, lo que ocurre es que el centro de fases de la fuente de referencia (el AGN de la galaxia M 81) se desplaza en función de la frecuencia, debido a efectos de opacidad sincrotrón del chorro relativista en las vecindades del agujero negro central. En todos los análisis de los que hablamos a continuación, hemos tenido en cuenta este desplazamiento del núcleo de M 81 para centrar debidamente la supernova en el mismo punto del cielo para todas las frecuencias.

### **La curva de expansión de SN 1993J**

El siguiente paso en nuestro análisis ha sido estimar el tamaño de la supernova en todas las épocas de observación. Esto lo hemos hecho de sendas formas, obteniendo resultados similares:

La primera de ellas ha sido mediante el *Método del Punto Común* (CPM), descrito en el apéndice A. Este método está basado en ciertas propiedades que tienen las medias azimutales de distribuciones de brillo circularmente simétricas convolucionadas con una gaussiana. En las figuras 5.5 y 5.6 mostramos las curvas de expansión resultantes de las medidas del tamaño de la supernova con el CPM; la figura 5.5 refiere al CPM aplicado a los mapas obtenidos autocalibrando las fases de las visibilidades de una forma especial (también mostramos los resultados en la tabla 5.2); la figura 5.6 refiere al CPM aplicado a los mapas obtenidos con el conocido método de la *referencia de fase*.

La segunda forma de medición del tamaño de la supernova ha sido mediante el ajuste, en el plano de Fourier, del modelo sencillo de emisión descrito anteriormente. En esta ocasión, se han fijado en el ajuste las coordenadas del centro de explosión y la anchura relativa de la corteza de emisión. La curva de expansión resultante se muestra en la figura 5.7.

En todas las curvas de expansión puede verse claramente un efecto de dependencia espectral en el tamaño de la supernova. A medida que la supernova envejece, su tamaño medido a 1.6 GHz se hace sistemáticamente mayor en comparación con los tamaños medidos a frecuencias más altas.

Todas las curvas de expansión obtenidas pueden ajustarse a un modelo sencillo siguiendo la ley de expansión autosimilar del modelo de Chevalier

(ecuación 3.1). Para los datos a 1.6 GHz, una expansión con un único índice  $m$ , (de valor  $0.87 \pm 0.02$  para los datos de la tabla 5.2, ver tabla 5.3) es suficiente. Para los datos a otras frecuencias, necesitamos dos índices de expansión distintos (de valores  $0.928 \pm 0.010$  y  $0.795 \pm 0.005$ ), los cuales actúan en dos intervalos disjuntos de la expansión, separados por lo que llamamos un *tiempo de rotura*,  $t_{br}$ , de valor  $390 \pm 30$  días. Esta expansión con dos regímenes distintos puede ser también modelada (aunque el ajuste es de peor calidad) usando un modelo con índice de expansión variable en el tiempo (ver figura 5.8). No obstante, dicho modelo no explica por qué los resultados a 1.6 GHz se rigen por una curva de expansión distinta. El hecho de que la expansión de un mismo objeto venga dada por distintos valores de los parámetros en función de las distintas frecuencias de observación puede explicarse en base a algunas correcciones al modelo de Chevalier, como veremos más abajo.

Además de la expansión de la supernova, también hemos analizado la evolución de su circularidad y de las inhomogeneidades en la región de emisión. Encontramos, por una parte, que la supernova mantiene un muy alto grado de circularidad a lo largo de toda su vida (sus desviaciones se reducen a un 2–4%). Por otra parte, encontramos que las inhomogeneidades en la corteza de emisión (cuya amplitud es de sólo un  $\sim 20\%$  de la densidad de flujo por haz) son muy duraderas (se mantienen durante centenares o incluso miles de días) y se encuentran angularmente distribuidas de una forma especial. En la figura 5.13 mostramos la evolución temporal de estas inhomogeneidades en la región de emisión. Estas inhomogeneidades pueden deberse a anisotropías en la distribución del medio circunestelar, lo que se traduciría en anisotropías del viento solar pre-supernova (probablemente debidas a la rotación de la estrella y/o a la presencia de una compañera).

### **Curvas de luz y simulaciones con RAMSES**

En esta tesis hemos realizado un análisis de los efectos que las pérdidas radiativas tienen sobre las curvas de luz. Mayormente, estas pérdidas afectan al ritmo de caída de densidad de flujo tras desaparecer la opacidad (en la zona de emisión y en el material circunestelar) a la radioemisión. Además, según nuestro análisis, es imposible explicar la caída exponencial encontrada por Weiler et al. (2007) a partir del día  $\sim 3100$  tras la explosión sin incluir en el modelo un escape de electrones de la región de emisión. Tomando este efecto en consideración, hemos ajustado con RAMSES las curvas de luz publicadas

en Weiler et al. (2007), a la vez que la curva de expansión mostrada en la figura 5.5. Mostramos el resultado de dicho ajuste en la figura 5.15. Los parámetros ajustados por RAMSES en el día 5.3 tras la explosión (época de referencia, cuando el radio de la supernova es  $10^{15}$  cm) son:  $65.1 \pm 1.6$  Gauss para el campo magnético en la región de emisión,  $(4.7 \pm 0.8) \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$  para la densidad de electrones en la misma región,  $(2.1 \pm 0.4) \times 10^{-4}$  para la eficiencia de aceleración de electrones en el choque frontal y  $(2.0 \pm 0.1) \times 10^6 \text{ K}$  para la temperatura de los electrones circunestelares en la época de referencia. La vida media de los electrones dentro de la región de emisión ha sido ajustada a  $1000 \pm 100$  días.

De acuerdo a esta simulación, la curva de expansión se modela de la siguiente forma: la expansión real en épocas tardías está descrita por los datos a 1.6 GHz. A frecuencias más altas, el efecto de dependencia espectral del tamaño de la región de emisión puede modelarse en base a la sensibilidad finita de los interferómetros usados en las observaciones y a un decaimiento de la intensidad de los campos magnéticos a medida que nos alejamos de la discontinuidad de contacto. También es necesario incorporar al modelado una disminución de la opacidad, a frecuencias altas, de los materiales eyectados a medida que la supernova se expande.

## 8.2. Astrometría global de alta precisión

Hemos llevado a cabo el primer análisis de astrometría global de alta precisión (es decir, usando los retrasos de fase diferenciales). En este análisis hemos ajustado, con una precisión  $\sim 10$  veces superior a la obtenida con la comúnmente usada técnica de *referencia de fase*, las posiciones de todas las fuentes de la muestra S5 del casquete polar. Hemos realizado este análisis para dos épocas de observación a 15 GHz (una tomada en el año 1999.57 y otra en el año 2000.46). Hemos realizado también una comparación entre los resultados de estas dos épocas, encontrando algunos desplazamientos relativos significativos, de los que hablaremos más abajo.

### La conexión de fases

El proceso de análisis es similar al seguido en trabajos anteriores (e.g., Shapiro et al. 1979), pero con diferencias sustanciales, debidas a la gran cantidad de antenas y fuentes involucradas en nuestras observaciones:

Primero, restamos a todos los observables de VLBI las contribuciones que vienen de la estructura de todas las fuentes, centrando dichos observables en los centros de fase de las fuentes (es decir, en los centros de todas las imágenes). Tras esto, realizamos un ajuste astrométrico preliminar, usando los retrasos de grupo y los ritmos de franja, en el que determinamos las derivas de reloj y la contribución troposférica al retraso. Seguidamente, usamos este modelo preliminar para estimar el número de ciclos enteros de fase que los retrasos de cada fuente deben haber barrido de observación a observación a causa del ritmo de franja. Utilizamos entonces tales estimados para corregir los retrasos de fase de todas las observaciones.

Los residuos del ritmo de franja de este ajuste preliminar (ver figura 7.2), indican que debe haber ciclos de fase no modelados que todavía tengan que ser añadidos a los retrasos de fase para que éstos puedan ser correctamente usados en el ajuste (es decir, para que estén debidamente *conectados*). Dado que estos ciclos de fase tendrán una distribución más o menos aleatoria a lo largo de las observaciones, es de esperar que buena parte de éstos afecten a las clausuras de fase (las cuales, en nuestro caso, deberían ser exactamente nulas). En base a esto, hemos desarrollado un algoritmo (descrito en el apéndice B) para encontrar la combinación de ciclos de fase no modelados que anula todas las clausuras, sin introducir ningún salto de fase que dependa de antena o fuente (los cuales no afectan a las clausuras).

### **Ambigüedades dependientes de antena (y fuente)**

Por casuística, también hay ciclos de fase no modelados que se distribuyen de forma dependiente de antena y fuente. Para encontrarlos, ejecutamos un algoritmo basado en un criterio de suavidad en la evolución de las fases, el cual aplicamos poco a poco, empezando con pocas antenas y añadiendo más antenas a medida que vamos completando la conexión de fases. Tras este refinamiento en la conexión, debemos todavía encontrar los saltos de fase globales de cada fuente (llamados “saltos constantes de reloj”, o *Constant Clock Offsets*) para que la conexión sea 100 % fidedigna. Este paso lo realizamos de forma iterativa, fijando paulatinamente los saltos de reloj ajustados que más se acercan a ciclos completos de fase.

## **Papel de los retrasos de fase en la astrometría**

Una vez completada la conexión de fases, el ajuste astrométrico nos da residuos como los mostrados en la figura 7.5, los cuales son unas 25 veces menores que los residuos correspondientes al ajuste con el retraso de grupo. También podemos comparar la precisión astrométrica obtenida al incluir los retrasos de fase en el ajuste (y los retrasos diferenciales entre pares de fuentes) con respecto a la referencia de fase. En ese caso, el incremento de precisión que obtenemos con nuestro análisis es de un orden de magnitud.

## **Análisis de errores**

Incluir observables diferenciales en el ajuste incrementa la precisión en la determinación de las posiciones relativas entre dos fuentes. No obstante, en nuestro ajuste global, las posiciones de todas las fuentes (salvo la de referencia) se dejan libres, por lo que debemos tener en cuenta el efecto que un desplazamiento global de cada par de fuentes pudiera tener sobre sus coordenadas relativas. Esto nos ha llevado a una nueva definición de movimiento relativo entre dos fuentes en el cielo (ver apéndice C). Usando esta nueva definición, podemos calcular con precisión los desplazamientos relativos entre todas las fuentes observadas próximamente en el tiempo, midiendo las discrepancias entre nuestros resultados y las posiciones correspondientes a la solución ICRF-Ext.2 de IERS (Fey et al. 2004). Mostramos estas discrepancias, para las observaciones del año 2000.46, en las tablas 7.3 (posiciones absolutas) y 7.4 (posiciones relativas). Si graficamos las incertidumbres astrométricas en las posiciones relativas de cada par de fuentes como función de sus separaciones angulares (ver figuras 7.6 y 7.7) nos encontramos con una muy buena correlación lineal entre incertidumbres y separación. Este es el primer resultado observacional que confirma de forma robusta la ley dada por Shapiro et al. (1979) y los resultados de las simulaciones astrométricas realizadas por Pradel et al. (2006), basadas en la técnica de referencia de fase. No obstante, en nuestro caso, las incertidumbres son unas 10 veces menores que las predichas por Shapiro et al. (1979) y las simuladas por Pradel et al. (2006). Esta notable mejora en la precisión puede deberse a la naturaleza global de nuestro ajuste, en el que utilizamos observables tan precisos como el retraso de fase diferencial en un modelo con una gran cantidad de ligaduras. No hemos de olvidar que tenemos varios observables diferenciales para cada fuente, ya que disponemos de observaciones cercanas en el tiempo que involucran, cada vez, a 3 ó 4 fuen-

tes. Esto aporta gran cantidad de redundancias que mejoran la precisión de los parámetros ajustados.

### Comparación de resultados

La época del año 2000.46 aportó observaciones de alta calidad y la conexión de fases descrita previamente funcionó sin problemas. No obstante, durante las observaciones del año 1999.57, hubo varios problemas de índole meteorológica que afectaron a buena parte del interferómetro. Aún así, hemos podido extraer información astrométrica de estas observaciones, si bien algunos de los resultados obtenidos (ver tablas 7.5 y 7.6) pueden estar fuertemente afectados por retrasos de antena no modelados correctamente (retrasos troposféricos). Comparando los resultados entre una época y la otra, no encontramos ningún cambio en las posiciones absolutas por encima de  $2.6\sigma$ . En cuanto a las posiciones relativas, sólo 4 de entre los 11 pares de fuentes observados bajo buenas condiciones meteorológicas tiene cambios en sus posiciones por encima de  $3\sigma$ . Dichos pares corresponden a las fuentes 0016+731, 0153+744, 0212+735 y 0454+844. En la figura 7.11 mostramos los desplazamientos de estas fuentes (tomando como referencia la fuente 0153+744) entre las dos épocas de observación analizadas en esta tesis. Teniendo en cuenta las discrepancias entre estas dos épocas y las discrepancias con las soluciones de ICRF-Ext.2, concluimos que nuestras dos épocas son mucho más compatibles entre ellas que con el ICRF-Ext.2. Las grandes diferencias con esta última solución de IERS (10 pares tienen discrepancias por encima de  $500\mu as$  y, entre ellos, 4 pares discrepan incluso más de  $900\mu as$ ) pueden deberse a efectos de la estructura de las fuentes y de opacidad a distintas frecuencias.





# Bibliografía

- Aoki, S., Guinot, B., Kaplan, G. K., Kinoshita, H., McCarthy, D. D. & Seidelmann, P. K. (1982), “The new definition of Universal Time”, *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 105, p. 359.
- Arnett, W. D., Bahcall, J. N., Kirshner, R. P. & Woosley, S. E. (1989), “Supernova 1987a”, *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, Vol. 27, p. 269.
- Baron, E., Hauschildt, P. H., Branch, D., Austin, S., Garnavich, P., Ann, H. B., Wagner, R. M., Filippenko, A. V., Matheson, T. & Liebert, J. (1995), “Non-LTE spectral analysis and model constraints on SN 1993J”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 441, p. 170.
- Bartel, N., Bietenholz, M. F., Rupen, M., Beasley, A. J., Graham, D. A., Altunin, V. I., Venturi, T., Umana, G., Cannon, W. H. & Conway, J. E. (2002), “SN 1993J VLBI II. Related Changes of the Deceleration, Flux Density Decay and Spectrum”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 581, p. 404.
- Bartel, N., Bietenholz, M. F., Rupen, M. P., Beasley, A. J., Graham, D. A., Altunin, V. I., Venturi, T., Umana, G., Cannon, W. H. & Conway, J. E. (2000), “The Changing Morphology and Increasing Deceleration of Supernova 1993J in M81”, *Science*, Vol. 287, p. 112.
- Bartel, N., Bietenholz, M. F., Rupen, M. P., Conway, J. E., Beasley, A. J., Sramek, R. A., Romney, J. D., Titus, M. A., Graham, D. A., Altunin, V. I., Jones, D. L., Rius, A., Venturi, T., Umana, G., Francis, R. L., McCall, M. L., Richer, M. G., Stevenson, C. C., Weiler, K. W., van Dyk, S. D., Panagia, N., Cannon, W. H., Popelar, J. & Davis, R. J. (1994), “The Shape Expansion Rate and Distance of Supernova 1993J from VLBI Measurements”, *Nature*, Vol. 368, p. 610.
- Beasley, A. J. & Conway, J. E. (1995), “VLBI Phase-Referencing”, in J. A. Zensus, P. J. Diamond & P. J. Napier, eds, ‘Very Long Baseline Interferome-

- try and the VLBA', *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 82, p. 328.
- Bethe, H. A. & Wilson, J. R. (1985), "Revival of a stalled supernova shock by neutrino heating", *The Astrophysical Journal*, Vol. 295, p. 14.
- Bietenholz, M. F., Bartel, N. & Rupen, M. P. (2001), "SN 1993J VLBI. I. The Center of the Explosion and a Limit on Anisotropic Expansion", *The Astrophysical Journal*, Vol. 557, p. 770.
- Bietenholz, M. F., Bartel, N. & Rupen, M. P. (2003), "SN 1993J VLBI. III. The Evolution of the Radio Shell", *The Astrophysical Journal*, Vol. 597, p. 374.
- Bietenholz, M. F., Bartel, N. & Rupen, M. P. (2004), "The Location of the Core in M81", *The Astrophysical Journal*, Vol. 615, p. 173.
- Blandford, R. D. & Konigl, A. (1979), "Relativistic jets as compact radio sources", *The Astrophysical Journal*, Vol. 232, p. 34.
- Boehm, J., Niell, A., Tregoning, P. & Schuh, H. (2006), "Global Mapping Function (GMF): A new empirical mapping function based on numerical weather model data", *Geophysical Research Letters*, Vol. 33, p. 7304.
- Burke, B. F. & Graham-Smith, F. (1986), *An Introduction to Radio Astronomy*, Cambridge University Press, UK.
- Chao, C. C. (1974), "The troposphere calibration model for Mariner Mars 1971", *JPL/NASA Tech. Rep.*, Vol. No. 32-1587, p. 61.
- Chevalier, R. A. (1982a), "The radio and X-ray emission from type II supernovae", *The Astrophysical Journal*, Vol. 259, p. 302.
- Chevalier, R. A. (1982b), "Self-similar solutions for the interaction of stellar ejecta with an external medium", *The Astrophysical Journal*, Vol. 258, p. 790.
- Dahlen, F. A. (1976), "The passive influence of the oceans upon the rotation of the earth", *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, Vol. 46, p. 363.
- Davis, J. L., Herring, T. A., Shapiro, I. I., Rogers, A. E. E. & Elgered, G. (1985), "Geodesy by radio interferometry: effects of atmospheric modelling errors on estimated baseline length", *Radio Science*, Vol. 20, p. 1593.

- Eckart, A., Witzel, A., Biermann, P., Johnston, K. J., Simon, R., Schalinski, C. & Kuhr, H. (1986), “Investigation of a complete sample of flat spectrum radio sources from the S5 survey”, *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 168, p. 17.
- Fey, A. L., Ma, C., Arias, E. F., Charlot, P., Feissel-Vernier, M., Gontier, A.-M., Jacobs, C. S., Li, J. & MacMillan, D. S. (2004), “The Second Extension of the International Celestial Reference Frame: ICRF-EXT.2”, *The Astronomical Journal*, Vol. 127, p. 3587.
- Filippenko, A. V. (1997), “Optical Spectra of Supernovae”, *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, Vol. 35, p. 309.
- Filippenko, A. V., Matheson, T. & Ho, L. C. (1988), “Supernova 1987K: type II in youth, type Ib in old age”, *The Astronomical Journal*, Vol. 96, p. 1941.
- Filippenko, A. V., Matheson, T. & Ho, L. C. (1993), “The Type IIb Supernova 1993J in M81: A Close Relative of Type Ib Supernovae”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 415, p. L103.
- Fransson, C. & Björnsson, C.-I. (1998), “Radio Emission and Particle Acceleration in SN 1993J”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 509, p. 861.
- Fransson, C., Challis, P. M., Chevalier, R. A., Filippenko, A. V., Kirshner, R. P., Kozma, C., Leonard, D. C., Matheson, T., Baron, E., Garnavich, P., Jha, S., Leibundgut, B., Lundqvist, P., Pun, C. S. J., Wang, L. & Wheeler, J. C. (2005), “Hubble Space Telescope and Ground-based Observations of SN 1993J and SN 1998S: CNO Processing in the Progenitors”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 622, p. 991.
- Fransson, C., Lundqvist, P. & Chevalier, R. A. (1996), “Circumstellar Interaction in SN 1993J”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 461, p. 993.
- Freedman, W. L., Hughes, S. M., Madore, B. F., Mould, J. R., Lee, M. G., Stetson, P., Kennicutt, R. C., Turner, A., Ferrarese, L., Ford, H., Graham, J. A., Hill, R., Hoessel, J. G., Huchra, J. & Illingworth, G. D. (1994), “The Hubble Space Telescope Extragalactic Distance Scale Key Project. 1: The discovery of Cepheids and a new distance to M81”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 427, p. 628.

- Garnavich, P. M. & Ann, H. B. (1994), “Early spectra of supernova 1993J in M81”, *The Astronomical Journal*, Vol. 108, p. 1002.
- Gill, P. E. & Murray, W. (1978), “Algorithms for the solution of the nonlinear least-squares problem”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 15, p. 977.
- Guardiola, R., Higón, E. & Ros, J. (1997), *Mètodes Numèrics per a la física*, Universitat de València, València.
- Guirado, J. C., Marcaide, J. M., Elósegui, P., Ratner, M. I., Shapiro, I. I., Eckart, A., Quirrenbach, A., Schalinski, C. J. & Witzel, A. (1995), “VLBI differential astrometry of the radio sources 1928+738 and 2007+777 at 5GHz”, *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 293, p. 613.
- IERS (1998), *1997 IERS Annual Report*, Observatoire de Paris, France.
- IERS (2004), *IERS Conventions (2003)*, D. D. McCarthy and Gérard Petit (eds.).
- Kovalev, Y. Y., Lobanov, A. P., Pushkarev, A. B. & Zensus, J. A. (2008), “Opacity in compact extragalactic radio sources and its effect on astrophysical and astrometric studies”, *ArXiv e-prints*, Vol. 802.
- Kraus, J. D. (1986), *Radio Astronomy*, Cygnus-Quasar Books.
- Kuehr, H., Witzel, A., Pauliny-Toth, I. I. K. & Nauber, U. (1981), “A catalogue of extragalactic radio sources having flux densities greater than 1 Jy at 5 GHz”, *Astronomy & Astrophysics Suppl. Ser.*, Vol. 45, p. 367.
- Lieske, J. H., Lederle, T. & Fricke, W. (1976), “Expression for the precession quantities based upon the IAU (1976) system of astronomical constants”, *The Astronomical Journal*, Vol. 58, p. 1.
- Marcaide, J. M. & Shapiro, I. I. (1984), “VLBI study of 1038+528 A and B: discovery of wavelength dependence of peak brightness location”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 276, p. 59.
- Marcaide, J. M., Alberdi, A., Elósegui, P., Guirado, J. C., Mantovani, F., Pérez, E., Ratner, M. I., Rius, A., Rogers, A. E. E., Schmidt, B. P., Shapiro, I. I. & Whitney, A. R. (1994), “Radio-size estimates of SN 1993J”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 424, p. L25.

- Marcaide, J. M., Alberdi, A., Ros, E., Diamond, P., Schmidt, B., Shapiro, I. I., Baath, L., Davis, R. J., de Bruyn, A. G., Elósegui, P., Guirado, J. C., Jones, D. L., Krichbaum, T. P., Mantovani, F., Preston, R. A., Ratner, M. I., Ruis, A., Rogers, A. E. E., Schilizzi, R. T., Trigilio, C., Whitney, A. R., Witzel, A. & Zensus, A. (1995a), “Discovery of shell-like radio-structure in supernova 1993J”, *Nature*, Vol. 373, p. 44.
- Marcaide, J. M., Alberdi, A., Ros, E., Diamond, P., Shapiro, I. I., Guirado, J. C., Jones, D. L., Krichbaum, T. P., Mantovani, F., Preston, R. A., Rius, A., Schilizzi, R. T., Trigilio, C., Whitney, A. R. & Witzel, A. (1995b), “Expansion of supernova 1993J”, *Science*, Vol. 270, p. 1475.
- Marcaide, J. M., Alberdi, A., Ros, E., Diamond, P., Shapiro, I. I., Guirado, J. C., Jones, D. L., Mantovani, F., Perez-Torres, M. A., Preston, R. A., Schilizzi, R. T., Sramek, R. A., Trigilio, C., van Dyk, S. D., Weiler, K. W. & Whitney, A. R. (1997), “Deceleration in the expansion of SN 1993J”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 486, p. 31.
- Marcaide, J. M., Martí-Vidal, I., Alberdi, A., Pérez-Torres, M. A., Ros, E., Diamond, P. J., Guirado, J. C., Lara, L., Shapiro, I. I., Stockdale, C. J., Weiler, K. W., Mantovani, F., Preston, R. A., Schilizzi, R. T., Sramek, R. A., Trigilio, C., Van Dyk, S. D. & Whitney, A. R. (2008), “A decade of SN 1993J: discovery of wavelength effects in the expansion rate”, *in preparation*.
- Marcaide, J. M., Martí-Vidal, I., Ros, E., Alberdi, A., Guirado, J. C., Lara, L., Pérez-Torres, M. A. & Weiler, K. W. (2005), “On the SN 1993J Radio Shell Structure”, *in* J.-M. Marcaide & K. W. Weiler, eds, ‘IAU Colloq. 192: Cosmic Explosions, On the 10th Anniversary of SN1993J’, p. 29.
- Martí-Vidal, I. & Marcaide, J. M. (2008a), “Lab astrometry with an acoustic VLBI-like interferometer”, *in* ‘A Giant Step: from milli- to micro-arcsecond astrometry’, Cambridge University Press, ISBN-10: 052187470X.
- Martí-Vidal, I. & Marcaide, J. M. (2008b), “Spurious source generation in mapping from noisy phase-self-calibrated data”, *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 480, p. 289.
- Martí-Vidal, I., Marcaide, J. M., Guirado, J. C., Pérez-Torres, M. A. & Ros, E. (2008), “Absolute kinematics of radio source components in the com-

- plete S5 polar cap sample. III-First wide-field high-precision astrometry at 15.4 GHz”, *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 478, p. 267.
- Matheson, T., Filippenko, A. V., Barth, A. J., Ho, L. C., Leonard, D. C., Bershad, M. A., Davis, M., Finley, D. S., Fisher, D., González, R. A., Hawley, S. L., Koo, D. C., Li, W., Lonsdale, C. J., Schlegel, D., Smith, H. E., Spinrad, H. & Wirth, G. D. (2000), “Optical Spectroscopy of Supernova 1993J During Its First 2500 Days”, *The Astronomical Journal*, Vol. 120, p. 1487.
- Maund, J. R., Smartt, S. J., Kudritzki, R. P., Podsiadlowski, P. & Gilmore, G. F. (2004), “The massive binary companion star to the progenitor of supernova 1993J”, *Nature*, Vol. 427, p. 129.
- McCray, R. (1969), “Synchrotron Radiation Losses in Self-Absorbed radio sources”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 156, p. 329.
- Mioduszewski, A. J., Dwarkadas, V. V. & Ball, L. (2001), “Simulated Radio Images and Light Curves of Young Supernovae”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 562, p. 869.
- Myra, E. S. & Burrows, A. (1990), “Neutrinos from type II supernovae - the first 100 milliseconds”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 364, p. 222.
- Pacholczyk, A. G. (1970), *Radio Astrophysics*, Freeman, San Francisco.
- Pérez-Torres, M. (1999), “Radio Emission from supernovae and high precision astrometry”, PhD thesis, Universitat de València - Estudi General.
- Pérez-Torres, M. A., Alberdi, A. & Marcaide, J. M. (2001), “The role of synchrotron self-absorption in the late radio emission from SN 1993J”, *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 374, p. 997.
- Pérez-Torres, M. A., Marcaide, J. M., Guirado, J. C. & Ros, E. (2004), “Absolute kinematics of radio source components in the complete S5 polar cap sample. II. First and second epoch maps at 15 GHz”, *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 428, p. 847.
- Pérez-Torres, M. A., Marcaide, J. M., Guirado, J. C., Ros, E., Shapiro, I. I., Ratner, M. I. & Sardón, E. (2000), “Towards global phase-delay VLBI astrometry: observations of QSO 1150+812 and BL 1803+784”, *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 360, p. 161.

- Pooley, G. G. & Green, D. A. (1993), “Ryle Telescope Observations of Supernova 1993J at 15-GHZ - the First 115 Days”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 264, p. L17.
- Pradel, N., Charlot, P. & Lestrade, J.-F. (2006), “Astrometric accuracy of phase-referenced observations with the VLBA and EVN”, *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 452, p. 1099.
- Ray, A., Singh, K. P. & Sutaria, F. K. (1993), “The bolometric light curve of SN1993J and the nature of its progenitor”, *Journal of Astrophysics and Astronomy*, Vol. 14, p. 53.
- Ripero, J., García, F., Rodríguez, D., Pujol, P., Filippenko, A. V., Treffers, R. R., Paik, Y., Davis, M., Schlegel, D., Hartwick, F. D. A., Balam, D. D., Zurek, D., Robb, R. M., Garnavich, P. & Hong, B. A. (1993), “Supernova 1993J in NGC 3031”, *IAU Circular*, Vol. 5731, p. 1.
- Robertson, D. S. (1975), “Geodetic and Astrometric Measurements with Very Long Baseline Interferometry”, PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Rohlfs, K. & Wilson, T. L. (1991), *Tools of Radio Astronomy*, Springer, Berlin.
- Ros, E., Marcaide, J. M., Guirado, J. C. & Pérez-Torres, M. A. (2001), “Absolute kinematics of radio source components in the complete S5 polar cap sample. I. First and second epoch maps at 8.4 GHz”, *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 376, p. 1090.
- Ros, E., Marcaide, J. M., Guirado, J. C., Ratner, M. I., Shapiro, I. I., Krichbaum, T. P., Witzel, A. & Preston, R. A. (1999), “High precision difference astrometry applied to the triplet of S5 radio sources B1803+784/Q1928+738/B2007+777”, *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 348, p. 381.
- Schaeffer, R. (2003), “Supernovae”, in C. Motch & J.-M. Hameury, eds, ‘EAS Publications Series’, Vol. 7 of *EAS Publications Series*, p. 155.
- Shapiro, I. I. (1964), “Fourth Test of General Relativity”, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 13, p. 789.

- Shapiro, I. I., Wittels, J. J., Counselman, C. C. I., Robertson, D. S., Whitney, A. R., Hinteregger, H. F., Knight, C. A., Clark, T. A., Hutton, L. K. & Niell, A. E. (1979), “Submilliarcsecond astrometry via VLBI. I - relative position of the radio sources 3C 345 and NRAO 512”, *The Astronomical Journal*, Vol. 84, p. 1459.
- Shepherd, M. C., Pearson, T. J. & Taylor, G. B. (1995), “Difmap: an interactive program for synthesis imaging”, *Bulletin of the American Astronomical Society*, Vol. 26, p. 987.
- Suzuki, A. (1994), “Supernova Neutrinos”, in ‘Physics and Astrophysics of Neutrinos’, Springer-Verlag, New York.
- Thomson, A. R., Moran, J. M. & Swenson, G. W. (1986), *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*, Wiley, New York.
- Treuhaft, R. N. & Lanyi, G. E. (1987), “The effect of the dynamic wet troposphere on radio interferometric measurements”, *Radio Science*, Vol. 22, p. 251.
- Van Dyk, S., Weiler, K. W., Sramek, R. A., Rupen, M. & Panagia, N. (1994), “SN 1993J: the early radio emission and evidence for a changing presupernova mass-loss rate”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 432, p. 115.
- Vassiliki, K. & Gordon, B. (1996), “The maximum mass of a neutron star”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 470, p. 61.
- Wahr, J. M. (1981), “The forced nutations of an elliptical rotating, elastic, and oceanless earth”, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, Vol. 64, p. 705.
- Walker, C. & Chatterjee, S. (1999), *Ionospheric corrections using GPS based models*, VLBA Scientific Memo 23 (NRAO; Socorro, NM).
- Weiler, K. W., Panagia, N., Montes, M. J. & Sramek, R. A. (2002), “Radio Emission from Supernovae and Gamma-Ray Bursters”, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Vol. 40, p. 387.
- Weiler, K. W., Williams, C. L., Panagia, N., Stockdale, C. J., Kelley, M. T., Sramek, R. A., Van Dyk, S. D. & Marcaide, J. M. (2007), “Long Term Radio Monitoring of SN 1993J”, *The Astrophysical Journal*, Vol. 671.
- Wolfram, S. (2003), *The Mathematica Book, 5th Ed.*, Wolfram Media.



## BIBLIOGRAFÍA

---

Yahil, A. (1983), "Self-similar stellar collapse", *The Astrophysical Journal*, Vol. 265, p. 1047.



# Appendix A

## The Common Point Method (CPM)

### A.1. Derivation

Let us consider a circularly symmetric brightness distribution,  $M$ , convolved by a gaussian,  $G$ , of width  $\sigma$ . Let  $I(\sigma, x, y)$  be the resulting intensity distribution, where  $(x, y)$  are the arclengths of the relative right ascension and declination. Then,

$$I(\sigma, x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x', y') G(x - x', y - y') dx' dy' \quad , \quad (\text{A.1})$$

where

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad . \quad (\text{A.2})$$

If we express  $I(\sigma, x, y)$  in polar coordinates and perform the azimuthal average we have

$$Av(\sigma, r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \int_0^{\infty} \frac{M(r')}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma^2}\right) \text{BesselI}_0\left(-\frac{rr'}{\sigma^2}\right) r' dr' \quad , \quad (\text{A.3})$$

where  $Av(\sigma, r)$  is the azimuthal average and  $\text{BesselI}_0$  is the modified Bessel function of the first kind. We can consider the expression A.3 as the integral transform of the brightness distribution,  $M(r)$

$$Av(\sigma, r) = \int_0^\infty M(r')K(\sigma, r, r')$$

with the following kernel function:

$$K(\sigma, r, r') = \frac{r'}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + r'^2}{2\sigma^2}\right) \text{BesselI}_0\left(-\frac{rr'}{\sigma^2}\right) dr' . \quad (\text{A.4})$$

We can compute now the change in  $Av(\sigma, r)$  for a small change in  $\sigma$ . Performing a first-order Taylor expansion with respect to  $\delta\sigma$  (i. e., the change in  $\sigma$ ) we obtain

$$\delta [Av(\sigma, r)] = \frac{\delta\sigma}{\sigma} \int_0^\infty M(r')K'(\sigma, r, r') , \quad (\text{A.5})$$

with

$$K'(\sigma, r, r') = 2 \frac{\exp\left(-\frac{r^2+r'^2}{2\sigma^2}\right) r' dr'}{\sigma^2} \times \\ \times \left( \left( \frac{r^2+r'^2}{2\sigma^2} - 1 \right) \text{BesselI}_0\left(\frac{rr'}{\sigma^2}\right) - \frac{rr'}{\sigma^2} \text{BesselI}_1\left(\frac{rr'}{\sigma^2}\right) \right) . \quad (\text{A.6})$$

Thus, from A.5 we obtain that if there is a value of  $r$  (that we call  $r_c$ ), directly related to  $M$  and  $\sigma$ , such that

$$\int_0^\infty M(r')K'(\sigma, r_c, r') = 0 \quad (\text{A.7})$$

then the angular average  $Av(\sigma, r_c)$  will not change its value for small changes in the width of the convolving gaussian. We call *Common Point(s)*<sup>1</sup> those points of  $Av(\sigma, r_c)$  corresponding to such value(s) of  $r_c$ .

For the purpose of discussion only, we assume that the profile given by  $M(r)$  has a well defined radius  $R$ . Then, the integral in A.5 will extend from  $r' = 0$  to  $r' = R$ , and  $r_c$ , multiplied by a factor  $C$  that depends only on  $\sigma$  and  $M(r)$ , will equal  $R$ :

$$r_c C(\sigma, M) = R . \quad (\text{A.8})$$

If we expand the brightness distribution,  $M(r)$ , self-similarly by a factor  $P$ , then

---

<sup>1</sup>For SN 1993J, these values of  $r_c$  correspond to the abscissas  $R_{ICP}$  and  $R_{OCP}$  shown in figure 5.9 for observations from day 1889 after explosion.

$$R \rightarrow PR \Rightarrow M(r) \rightarrow M\left(\frac{r}{P}\right) \quad (\text{A.9})$$

and we arrive to a new expression for A.7

$$\int_0^{PR} M\left(\frac{r'}{P}\right) K\left(\sigma, \frac{r_c}{P}, \frac{r'}{P}\right) = 0 \quad . \quad (\text{A.10})$$

Given that both  $r$  and  $r'$  are scaled by  $\sigma$  wherever they appear in the kernel A.6, the radial positions of the Common Points associated with  $M\left(\frac{r}{P}\right)$  and the beam  $P\sigma$  will be equal to  $P$  times the radial positions of the Common Points associated with  $M(r)$  and the beam  $\sigma$ . In other words, given a self-similar expansion of a brightness distribution, the Common Points will expand at the same rate as the brightness distribution, provided that the gaussians used in the convolutions are also scaled with the source size. In such cases, the relationship between  $r_c$  and  $R$  would be given by A.8, where  $C$  would only depend, for the whole expansion, on the profile of the brightness distribution,  $M(r)$  and the (constant) ratio between the source radius and the convolving beam. We have computed, using  $\sigma = 0.5R$ , the values of  $C$  for a set of possible source distributions, always finding values of  $C$  near unity. See table 5.5 for six examples of  $C$  (which we call *bias* and label as  $R/R_{OCP}$ ).

Thus, the only condition that must be satisfied for using the Common Point to determine the expansion of SN 1993J is that, for each epoch, the convolving gaussian beam must be equal to the supernova size multiplied by a given factor, which must be the same for all epochs. The gaussian beam for each epoch can be found in an iterative way, given that the Common Points are very stable under changes in the convolving beam. We give the details of this iterative process in what follows.

## A.2. Application

Let us convolve a map corresponding to a shell-like source of unknown outer radius  $R$  with a gaussian of width  $\sigma$ . Let us also convolve the same map with gaussians of different widths given by  $\sigma_i = H_i\sigma$ , where the constants  $H_i$  are all around unity (we use 0.8, 0.9, 1.1, and 1.2).

If we now compute the azimuthal average of each of these maps and superimpose the results, we will find that the profiles cross in narrow regions of

radial values<sup>2</sup>. The mean value of the radial positions of the crossing points of the profiles related to widths  $\sigma_i$  with the profile related to width  $\sigma$  will be an estimate of the radial position of the Common Point described above. Let this estimate be  $r_{c,1}$ .

Now we convolve the initial map with a new set of gaussians, starting with a new  $\sigma = Fr_{c,1}$ , where  $F$  is a chosen constant (in practice, we choose  $F = 0.5$ ) and with  $\sigma_i = H_i\sigma$ , where the constants  $H_i$  are the same as in the previous iteration. We now find a new value for the radial position of the Common Point:  $r_{c,2}$ . We can further iterate this procedure to obtain  $r_{c,3}, r_{c,4}, \dots$ . The procedure will soon converge to a value  $r_{c,f}$ . By construction, this value is the common point associated to the brightness profile of the shell and a convolving beam of width equal to  $F$  times the (unknown) source radius. Thus, this iterative process gives the radial position of the Common Point associated to a gaussian beam that scales always by the same factor  $F$  with respect to the source radius, regardless of the size of the source.

The Common Point Method works very well with synthetic data. Due to the practical insensitivity of the computed Common Point to the sizes of the gaussian widths (within reasonable limits, of course), virtually independent of the radial profile of the source structure, the restriction of using  $H_i$  close to unity can be lifted. Azimuthal averages of VLBI maps of SN 1993J, constructed using gaussian beamwidths ranging from  $\sigma$  to  $1.5\sigma$ , will, when superimposed, cross at radial positions which differ by a very small amount (typically,  $\sim 1\mu\text{as}$ ). See figure 5.9.

This makes the Common Point Method a robust way to measure the outer radius of a circularly symmetric, and self-similarly expanding, source. It converges in only a few iterations, largely independent of the starting value of  $\sigma$ .

For a real map, we determine  $r_{c,f}$ . Since we know from our testing that  $C$  is close to unity, we can very reliably assign the value  $r_{c,f}$  to  $R$ . If the expansion is exactly self-similar, the bias  $C$  remains constant for all epochs. The accuracy of the source size determination for all epochs is thus translated to an enhanced accuracy in the determination of the expansion curve of the source. Even, for departures from self-similar expansion, the method is still more accurate than modelfitting, according to our testing. If the expansion

---

<sup>2</sup>As can be seen in figure 5.9, there are two crossing regions, one at the inner edge and the other at the outer edge of the profile. For determining source sizes we are primarily interested in the outer crossing region

departs from self-similar, the bias  $C$  will slightly change, but it will change by much less than the change in the bias of the model fitting, which is usually a factor of  $\sim 2$  larger (depending on how the evolution of the brightness profile  $M(r)$  differs from self-similarity).

### **Error Analysis**

A good estimate of the quality of the Common Point determination is the degree of circularity of the source: the more circular the source is, the more robust the relationship between the Common Point and the source radius will be. Following this idea, we estimate the error of the Common Point determination in the following way:

1. We convolve the source model with a gaussian of beam  $\sigma = Fr_{c,f}$ .
2. We convolve the same model with another gaussian, a 10% wider (this value can be changed if desired).
3. We subtract one image from the other and determine the zero contour level of the resulting image.
4. We compute the scattering of the distances of the zero contour level to the shell center, dividing the contour level in 800 directions equally distributed in azimuth.

The resulting scattering (i.e., standard deviation of the zero contour level from circularity) will be our estimate of the Common Point uncertainty.





# Appendix B

## Automatic Phase Connector

After the subtraction of the source structures from the data (Step 1 in section 7.3.1), the closure phases of our observations should be exactly zero. However, due to unmodelled phase-delay cycles introduced in Step 2, there will appear non-zero closure phases in the data, and those will even change in time. We will need to apply baseline-dependent corrections to the data in order to correct (i.e. make zero) all the closure phases, but maintaining the antenna-dependent phase cycles as stable as possible (i.e. avoiding accidental introductions of antenna-dependent phase cycles). The algorithm that we have developed for the automation of this procedure works as follows:

1. For each source and observing time, we compute the closure phases corresponding to all triplets of antennas. From the baselines involved in the *non-zero* closure phases, we determine that one most frequently involved.
2. We perform an *ambiguity check* on such baseline. By *ambiguity check*, we mean shifting the phase-delays of that baseline by adding or subtracting one phase-delay cycle. We perform a *positive* (i. e., addition of a cycle) and a *negative* (i. e., subtraction of a cycle) *shift*. We then compute the *scores* corresponding to each *shift*. By *score*, we mean the number of closure phases approaching zero minus the number of closure phases distancing from zero after the *shift*.
3. We select the *shift* with highest *score* and modify the data with such a shift.
4. We iterate this procedure (1 to 3). We keep checking on the ambiguities, until all the phase closures (i. e., phase-delay closures) are made zero for the source and time selected.

We apply this algorithm to all scans in our observations. Actually, to ease the work, for consecutive scans of the same source we apply the corrections found in the previous scan before performing the *ambiguity check*. We have tested this “automatic connector” with synthetic data for different scenarios and found excellent results. An example scenario, with a remarkably high noise level, consists of delays equal to a random number of cycles (up to 5) added to randomly selected baselines every random number of scans (with an average of 50 scans between random cycles) in a dataset of 1000 scans and 10 antennas (see figure B.1 for some example baselines). Under such unrealistically high noise circumstances, the automatic connector finds all the random baseline-dependent cycles without introducing changes in the antenna-based overall constant cycles. We have repeated this test several times (with a different number of antennas and even worse noise conditions) and the connector *never* introduced changes in the antenna-based overall cycles.

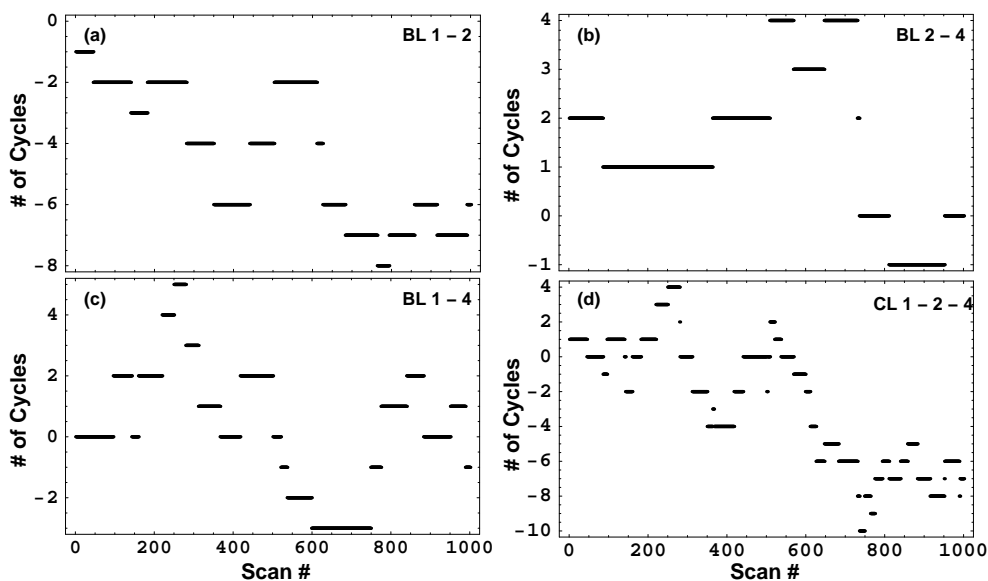


Figure B.1: Examples of baseline-dependent cycles for 3 of the 10 antennas used in a test of the automatic connector. The only information used by the connector are the closure phases (120 figures like (d)). From such closures, the algorithm must find out all the baseline-dependent cycles (45 figures like (a), (b), and (c)), without producing any antenna-dependent combination of cycles (combination that will not affect the closure phases).

# Appendix C

## Relative Source Position Determination

Unlike other differenced analyses, in which one of the sources of the pair was always fixed in the fit, in our global scheme we have differenced observables constructed with pairs of sources whose coordinates are being simultaneously estimated in the astrometric fit (except the coordinates of source 0454+844, which are kept fixed). This situation led us to reconsider the concept of “changes in the relative position” of a pair of sources  $(a, b)$ . In this section, we will derive new equations for the computation of relative source positions when the coordinates of both sources are set as free parameters.

Let  $\alpha_a$  and  $\delta_a$  be the right ascension and declination of source  $a$ , and  $\alpha_b$  and  $\delta_b$  the right ascension and declination of source  $b$ . Then, the position of source  $b$ , relative to that of source  $a$ , is:

$$\begin{cases} \alpha_a^{rel} = \alpha_b - \alpha_a \\ \delta_a^{rel} = \delta_b - \delta_a \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

In the simple case that one of the two sources (e.g., the reference source  $a$ ) is kept fixed in the sky, the change in the relative position between this pair of sources can be well defined from equations C.1

$$\begin{cases} \Delta\alpha_a^{rel} = \Delta\alpha_b \\ \Delta\delta_a^{rel} = \Delta\delta_b \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

where  $a$  is the fixed reference source and  $b$  is the free target source;  $\Delta\alpha_b$  and  $\Delta\delta_b$  are the corrections to the position of source  $b$ , maintaining the source  $a$  fixed in the fit. However, equations C.2 are not appropriate when the two

sources are free to change their positions in the fit, since the curvature of the celestial coordinate system affects the robustness of equations C.2 under a global shift of the source pair. To illustrate the situation let us consider a simple example. For two sources separated by 12 hours in right ascension, a global shift,  $\epsilon$ , in declination, while keeping the source separation, would originate a change of  $2\epsilon$  in the relative declination of these sources, according to C.2 (the declinations of these sources will change with opposite signs). The relative coordinates between such pair of sources would, then, appear to change dramatically under a global shift of the pair (i.e. keeping constant the source separation). In other words, the need to define a reference point in the sky to measure the shift of  $b$  with respect to  $a$  is clear.

In our analysis, for each pair of sources, we select the nominal position of the reference source as the reference point for the study of that particular pair. In practice, such selection is equivalent to applying a global rotation  $\mathfrak{R}$ , in such a way that the source  $a$  is rotated back to its initial (i. e. nominal) position. According to this rotation, the change in the coordinates of source  $a$  is

$$\mathfrak{R} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_a + \Delta\alpha_a \rightarrow \alpha_a \\ \delta_a + \Delta\delta_a \rightarrow \delta_a \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

where  $\Delta\alpha_a$  and  $\Delta\delta_a$  are the corrections to the right ascension and declination of source  $a$ . This rotation,  $\mathfrak{R}$ , will modify the coordinates of source  $b$  as follows

$$\mathfrak{R} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_b + \Delta\alpha_b \rightarrow \alpha_b + \Delta\alpha_{ab}^m + \Delta\alpha_b \\ \delta_b + \Delta\delta_b \rightarrow \delta_b + \Delta\delta_{ab}^m + \Delta\delta_b \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

where  $\Delta\alpha_{ab}^m$  and  $\Delta\delta_{ab}^m$  are the changes in right ascension and declination that the rotation  $\mathfrak{R}$  causes on the position of source  $b$ . Thus, the change in the coordinates of  $b$ , relative to  $a$ , will be

$$\begin{cases} \Delta\alpha_a^{rel} = \Delta\alpha_b + \Delta\alpha_{ab}^m \\ \Delta\delta_a^{rel} = \Delta\delta_b + \Delta\delta_{ab}^m \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

When the coordinates of both sources,  $a$  and  $b$ , are corrected from the nominal positions in the astrometric fit, we must use Eq. C.5 instead of Eq. C.2.

From all possible rotations  $\mathfrak{R}$  in the sky that move the source  $a$  back to its nominal position, we choose that one that makes the direction of the arc between  $a$  and  $b$  (i. e., the position angle of  $b$  with respect to  $a$ ) to remain

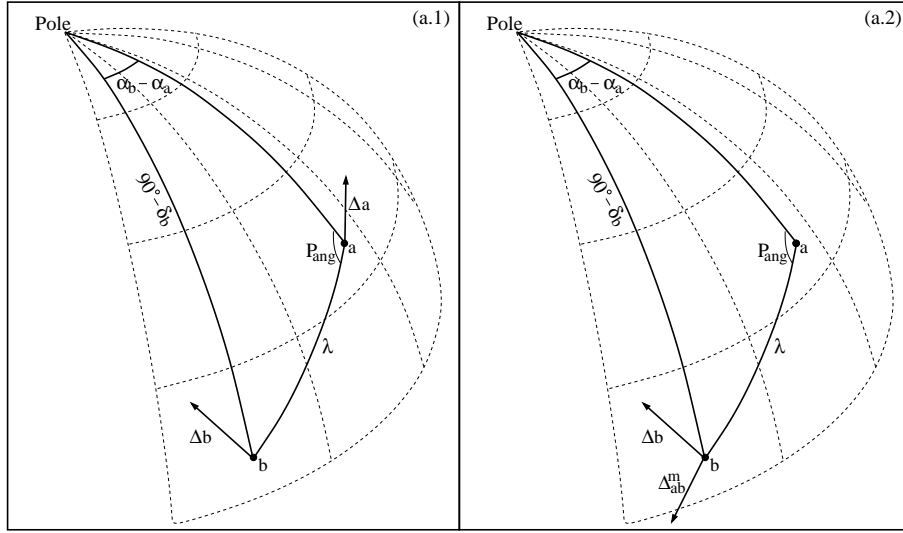


Figure C.1: Graphical representation of the rotation  $\mathfrak{R}$  that we apply to sources  $a$  and  $b$ . On the left, the coordinates of both sources,  $a$  and  $b$ , have been corrected an amount  $\vec{\Delta}a = (\Delta\alpha_a, \Delta\delta_a)$  and  $\vec{\Delta}b = (\Delta\alpha_b, \Delta\delta_b)$ , respectively. On the right, we apply a rotation  $\mathfrak{R}$ , that brings source  $a$  back to its ICRF position (maintaining  $P_{ang}$  constant) and causes the shift  $\vec{\Delta}_{ab}^m = (\Delta\alpha_{ab}^m, \Delta\delta_{ab}^m)$  on source  $b$ . The total shift of  $b$  will be, thus, the addition of the corrections  $\vec{\Delta}b$  and  $\vec{\Delta}_{ab}^m$ .

unchanged, taking the direction between source  $a$  and the Celestial North Pole as reference. According to the sine theorem (see figure C.1)

$$\cos \delta_b \sin (\alpha_b - \alpha_a) = \sin \lambda \sin P_{ang} \quad (\text{C.6})$$

where  $\lambda$  is the arclength between  $a$  and  $b$ , and  $P_{ang}$  is the position angle of  $b$  with respect to  $a$ . Remaining that, in our case, the right hand side is kept constant, the left hand side can be re-written as

$$\begin{aligned} & \cos (\delta_b + \Delta\delta_b) \sin (\alpha_b - \alpha_a + \Delta\alpha_b - \Delta\alpha_a) = \\ & \cos (\delta_b + \Delta\delta_{ab}^m + \Delta\delta_b) \sin (\alpha_b - \alpha_a + \Delta\alpha_{ab}^m + \Delta\alpha_b) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

This approach can be understood in another way: we write any global rotation of the source pair as a combination of three rotations over three perpendicular axes, crossing one of them (the  $z$  axis) the nominal position of source  $a$ . Source  $a$  is then brought back to its nominal position by applying the two rotations with axes perpendicular to  $z$ . Given that it is impossible to distinguish between a global rotation of the pair in the  $z$  axis and a real motion

of source  $b$  around  $a$ , we take all the motion of source  $b$  around  $a$  as a real shift of  $b$  with respect to  $a$ . In fact, any rotation of  $b$  around  $a$  would translate into a rotation between the respective source structures of  $a$  and  $b$ , so it could be considered as a real shift of one source with respect to the other.

For a first-order approximation of the astrometric corrections (which are of the order of  $\sim 1$  mas), the condition C.7, together with the constancy of the arclength between  $a$  and  $b$  under the rotation  $\mathfrak{R}$ , is satisfied if, and only if

$$\begin{cases} \Delta\alpha_{ab}^m = -\Delta\alpha_a - \Delta\delta_a \sin(\alpha_b - \alpha_a) \tan(\delta_b) \\ \Delta\delta_{ab}^m = -\Delta\delta_a \cos(\alpha_b - \alpha_a) \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

When we apply these relationships to Eq. C.5, we obtain directly

$$\begin{cases} \Delta\alpha_a^{rel} = \Delta\alpha_b - \Delta\alpha_a - \Delta\delta_a \sin(\alpha_b - \alpha_a) \tan(\delta_b) \\ \Delta\delta_a^{rel} = \Delta\delta_b - \Delta\delta_a \cos(\alpha_b - \alpha_a) \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

These are the equations that give us the relative position change between sources  $a$  and  $b$  when the coordinates of both sources are simultaneously fit. We will use these equations for the estimates of the relative source positions. The corresponding standard deviations for such positions are given by the following expressions

$$\begin{cases} \sigma(\Delta\alpha_a^{rel}) = \sqrt{\sum_{i,j}^4 \frac{\partial\Delta\alpha_a^{rel}}{\partial x_i} \frac{\partial\Delta\alpha_a^{rel}}{\partial x_j} C(x_i, x_j)} \\ \sigma(\Delta\delta_a^{rel}) = \sqrt{\sum_{i,j}^4 \frac{\partial\Delta\delta_a^{rel}}{\partial x_i} \frac{\partial\Delta\delta_a^{rel}}{\partial x_j} C(x_i, x_j)} \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

where  $x_i$  is the set of corrections  $(\Delta\alpha_b, \Delta\delta_b, \Delta\alpha_a, \Delta\delta_a)$ , and  $C(x_i, x_j)$  is the element  $(i, j)$  of the covariance matrix.