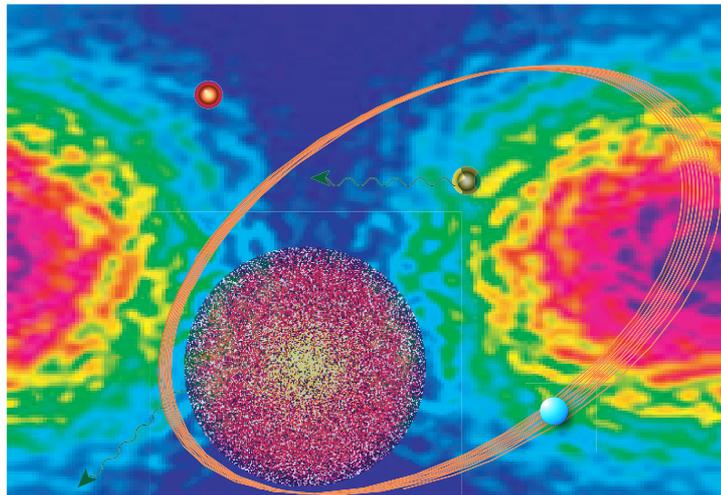




UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA  
FACULDADE DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA  
Área de Astronomia e Astrofísica  
Observatório Astronómico R.M. Aller

---

# O Problema de Gylden–Meščerskij em Cenários Perturbados. Métodos e Aplicações.



Manuel Andrade Baliño

— Tese de doutoramento —





UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FACULDADE DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Área de Astronomia e Astrofísica

Observatório Astronómico R.M. Aller

---

O PROBLEMA DE GYLDÉN–MEŠČERSKIJ  
EM CENÁRIOS PERTURBADOS.  
MÉTODOS E APLICAÇÕES

*Tese apresentada por Manuel Andrade Baliño para a obtenção do grau de Doutor em Matemáticas (Astronomia e Astrofísica) pela Universidade de Santiago de Compostela.*

*11 de Dezembro de 2006*

*O Problema de Gylden–Meščerskij em Cenários Perturbados.  
Métodos e Aplicações.*

Manuel Andrade Baliño  
oandrade@usc.es  
<http://web.usc.es/~oandrade/mavpag.html>

Tese apresentada para a obtenção do grau de Doutor em  
Matemáticas (Astronomia e Astrofísica) na Universidade  
de Santiago de Compostela (Galiza, Espanha).  
Faculdade de Matemáticas, Santiago de Compostela.  
<http://usc.es>  
(Versão revisada)

Este documento foi elaborado utilizando  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$  em 1 de  
Dezembro de 2007.

ISBN 978-84-9750-851-3

Capa: Montagem artística sobre a perda de massa  
elaborada pelo autor a partir de imagens e gráficos  
obtidos nas investigações desenvolvidas na tese.

---

**José Ángel Docobo Duránte**,  
Professor Titular da Faculdade de Matemáticas  
da Universidade de Santiago de Compostela,

**CERTIFICA** que a tese intitulada “O Problema de Gylden–Meščerskij em Cenários Perturbados. Métodos e Aplicações” foi realizada por Manuel Andrade Baliño sob a sua orientação no Departamento de Matemática Aplicada desta Universidade, e que constitui a tese que apresenta para a obtenção do grau de:

DOUTOR EM MATEMÁTICAS  
(Astronomia e Astrofísica)

Santiago de Compostela, 11 de Dezembro de 2006

Manuel Andrade Baliño  
DOUTORANDO

José Ángel Docobo Duránte  
ORIENTADOR

---



UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

### **Tese de doutoramento**

AUTOR: Manuel Andrade Baliño  
ORIENTADOR: José Ángel Docobo Duránte  
TÍTULO: “O Problema de Gylden–Meščerskij em  
Cenários Perturbados. Métodos e Aplicações”

### **Júri**

PRESIDENTE: **Dr. Antonio Elipe Sánchez**  
Catedrático de Universidade  
*Grupo de Mecánica Espacial*  
*Universidad de Zaragoza*

VOGAIS: **Dr. Xavier Barcons Jáuregui**  
Professor Titular de Universidade  
*Instituto de Física de Cantabria*  
*Centro Superior de Investigaciones Científicas – Universidad de Cantabria*

**Dr. Luis Floría Gimeno**  
Professor Titular de Universidade  
*Grupo de Mecánica Espacial*  
*Universidad de Zaragoza*

**Dr. Martín Lara Coira**  
Investigador Científico  
*Real Instituto y Observatorio de la Armada (San Fernando, Espanha)*

SECRETÁRIA: **Dra. Peregrina Quintela Estévez**  
Catedrática de Universidade  
*Departamento de Matemática Aplicada*  
*Universidad de Santiago de Compostela*

Data da defesa pública: 2 de Março de 2007

Qualificação: **Sobressaliente *cum Laude***



*Antes d'Isto,  
ou talvez  
sempre*

*Muito longe,  
estrelas de cores como  
úberes carregados de pó  
sonharam os vossos corpos  
...*



# Agradecimentos

Antes de tudo, desejo agradecer ao meu orientador, José Ángel Docobo, a quem devo a proposta inicial do tema, os seus ensinamentos e apoio além das suas obrigações meramente académicas. As suas valiosas sugestões supuseram sempre um estímulo necessário na realização desta investigação.

Agradeço a Vakhtang Tamazian alguns conselhos e conversas que contribuíram a melhorar diversos aspectos ligados a este trabalho. Quero agradecer também a Luis Floría, Alberto Abad e Jesús Palacián os seus comentários sobre diversos temas tratados nesta tese, particularmente aqueles referidos à teoria de transformações canónicas.

Embora neste capítulo de agradecimentos me limite exclusivamente ao âmbito académico, quero expressar também a minha gratidão a todas as pessoas que durante estes anos contribuíram, de uma maneira ou outra, à consecução deste trabalho.

A investigação que aqui se apresenta foi parcialmente financiada pelos projectos de investigação e infra-estrutura *Sistemas estelares múltiplos com componentes variáveis de tipos tardios: interferometria speckle, fotometria e espectroscopia* do MINISTERIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA (AYA-2001-3073) e da JUNTA DA GALIZA (PGIDIT02-PXIC24301-PN) e *Estudo astrométrico, fotométrico e espectroscópico de sistemas estelares múltiplos com componentes variáveis de tipos tardios* do MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (AYA-2004-07003).

*Manuel Andrade*

*Lugo, Dezembro de 2006*



# Conteúdo

Agradecimentos	iii
Classificação científica	xi
Resumo	xiii
Abstract	xv
Lista de Tabelas	xix
Lista de Figuras	xxix
Lista de símbolos	xxxi
Motivação e organização da tese	xxxv
<b>1 O problema de massa variável e o fenómeno de perda de massa estelar</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 A formulação matemática do problema de massa variável . . . . .	3
1.2.1 O problema de Gylden–Meščerskij . . . . .	3
1.2.2 Leis de perda de massa . . . . .	6
A lei de Jeans . . . . .	6
Outras leis <i>ad hoc</i> . . . . .	7
1.2.3 A formulação de Duboshin . . . . .	8
1.2.4 Alguns resultados clássicos . . . . .	9
O Problema de Meščerskij–Levi-Civita . . . . .	9
Resultados de Armellini . . . . .	9

	O método de Radzievskii–Gel’fgat . . . . .	10
	A focagem perturbativa de Hadjidemetriou . . . . .	11
	A formulação hamiltoniana . . . . .	13
	A classificação de Razbitnaya . . . . .	13
	Extensão de alguns resultados . . . . .	14
1.2.5	O problema da transferência de massa em sistemas binários . . . . .	15
1.3	O fenómeno de perda de massa estelar . . . . .	16
1.3.1	Ventos estelares . . . . .	16
	Ventos de estrelas frias . . . . .	17
	Ventos de estrelas quentes . . . . .	19
	Ventos em interacção em sistemas binários . . . . .	20
	Mecanismos de perda de massa . . . . .	23
	Cronologia da investigação de ventos estelares . . . . .	24
1.3.2	Cenários de perda de massa estelar . . . . .	24
	Estrelas desbocadas . . . . .	24
	Estrelas AGB . . . . .	25
	Estrelas T–Tauri . . . . .	28
	Estrelas LBV . . . . .	31
	Estrelas Wolf–Rayet . . . . .	32
	Novas Clássicas . . . . .	35
1.4	A ‘Hipótese dos Grandes Números’ . . . . .	37
1.5	Algumas novas contribuições ao problema . . . . .	38
1.5.1	Reinterpretação da lei de Jeans . . . . .	38
	A teoria de Eddington e a conjectura de Jeans . . . . .	38
	O expoente $n$ e a relação massa–luminosidade empírica . . . . .	41
	O factor $\alpha$ e a razão de perda de massa . . . . .	44
1.5.2	O efeito periastro . . . . .	49
<b>2</b>	<b>O problema de Gyldén–Meščerskij perturbado</b> . . . . .	<b>53</b>
2.1	Introdução . . . . .	53
2.2	Formulação hamiltoniana . . . . .	55
2.3	Perturbações por efeito periastro . . . . .	57

2.3.1	Hipótese . . . . .	57
2.3.2	Leis de perda de massa com efeito periastro . . . . .	59
2.3.3	Formulação hamiltoniana . . . . .	60
2.4	Componentes elipsoidais . . . . .	61
2.4.1	Morfologia estelar . . . . .	61
2.4.2	Desenvolvimento do potencial em série de harmóni- cos esféricos . . . . .	61
2.5	Efeitos relativistas . . . . .	63
2.5.1	Aproximação pós-newtoniana . . . . .	63
2.5.2	Lagrangiana do movimento relativo de dois corpos (massivos) . . . . .	64
2.6	O problema de dois corpos elipsoidais em aproximação pós- newtoniana . . . . .	69
2.7	Outras classes de perturbações . . . . .	72
2.7.1	Forças perturbativas na direcção do movimento orbital	72
	Esquema perturbativo de Hadjidemetriou . . . . .	72
	Aplicação a um problema de perda de massa em função do tempo e da posição na órbita . . . . .	75
2.7.2	Perturbações externas: um caso particular . . . . .	82
	Hamiltoniana em variáveis canónicas de Delaunay . . . . .	83
	Equações canónicas do movimento . . . . .	88
	Equações de Lagrange e variações seculares . . . . .	89
<b>3</b>	<b>Método canónico de perturbações <math>N</math>-paramétrico</b>	<b>93</b>
3.1	Introdução . . . . .	93
3.2	Transformação de uma hamiltoniana mediante um grupo $N$ -paramétrico . . . . .	95
3.3	Desenvolvimento da função geratriz em série de potências . . . . .	100
3.4	Aplicação: método 4-paramétrico . . . . .	102
3.4.1	Relações . . . . .	104
3.4.2	Equações homológicas . . . . .	107
3.4.3	Termos mistos . . . . .	108
3.5	Comentários . . . . .	109

<b>4</b>	<b>Integração de diferentes casos representativos</b>	<b>111</b>
4.1	Introdução . . . . .	111
4.2	Sistema binário com efeito periastro . . . . .	113
4.2.1	Tratamento analítico: dificuldades e resultados factíveis . . . . .	113
4.2.2	Integração numérica . . . . .	114
	Variações na massa . . . . .	117
	Variações na excentricidade . . . . .	118
	Variações no semieixo maior . . . . .	118
	Variações no período . . . . .	120
	Variações nas distâncias pericêntrica e apocêntrica . . . . .	122
	Amortecimento da perturbação por afastamento . . . . .	122
	'Efeito periastro inverso' . . . . .	124
4.3	Binária com componente elipsoidal considerando efeitos relativistas . . . . .	124
4.3.1	Integração analítica mediante o método canônico de perturbações 4-paramétrico . . . . .	124
	Expressão da hamiltoniana em série de pequenos parâmetros . . . . .	125
	Eliminação de $\ell$ mediante a aplicação do método canônico 4-paramétrico . . . . .	128
4.3.2	Integração analítica para o problema completo . . . . .	142
	Perda de massa em função do tempo . . . . .	144
	Primária com forma elipsoidal . . . . .	144
	Efeitos relativistas . . . . .	144
<b>5</b>	<b>Análise da estabilidade em sistemas triplos com massa variável</b>	<b>149</b>
5.1	Introdução . . . . .	149
5.2	Sistemas estelares triplos . . . . .	150
5.3	Planetas extra-solares . . . . .	152
5.3.1	Planetas extra-solares em estrelas solitárias . . . . .	152
	O mistério das altas excentricidades observadas . . . . .	154
5.3.2	Planetas extra-solares em sistemas binários . . . . .	157
	Mecanismos de variação da excentricidade . . . . .	160
5.4	Formulação de Jacobi . . . . .	161

5.5	Critérios de estabilidade para sistemas triplos hierarquizados	163
5.5.1	Critério de Harrington . . . . .	164
5.5.2	Critério de Graziani–Black . . . . .	165
5.5.3	Critério de Eggleton–Kiseleva . . . . .	166
5.5.4	Critério de Aarseth–Mardling . . . . .	167
5.5.5	Intervalos de estabilidade . . . . .	169
5.6	Efeito de aproximações mútuas: lei de perda de massa generalizada . . . . .	169
5.7	Análise de diversas configurações e cenários . . . . .	170
5.7.1	Configurações . . . . .	171
	1. [(Estrela+planeta)+estrela] → $\gamma$ Cephei . . . . .	171
	2. [(Estrela+estrela)+planeta] → Sistema hipotético (baseado em $\gamma$ Cephei) . . . . .	177
	3. [(Estrela+estrela)+estrela] → BU 1099 AB . . . . .	183
5.7.2	Comentários . . . . .	194
<b>6</b>	<b>Modelização de ventos estelares em sistemas múltiplos</b>	<b>199</b>
6.1	Introdução . . . . .	199
6.2	Cenários reais com estruturas vento–vento notáveis . . . . .	200
6.2.1	WR 104 e WR 98a . . . . .	200
6.2.2	WR 140 . . . . .	202
6.2.3	$\eta$ Carinae . . . . .	203
6.3	Formulação do problema . . . . .	205
6.3.1	Descrição do sistema . . . . .	205
6.3.2	Massa variável . . . . .	206
6.4	Modelização da distribuição de massa na região activa . . . . .	207
6.4.1	Definição e caracterização dos factores de forma . . . . .	208
6.5	Aplicação . . . . .	213
6.5.1	Caracterização do sistema . . . . .	213
6.5.2	Evolução dos elementos orbitais . . . . .	214
6.5.3	Análise da estabilidade . . . . .	216
6.5.4	Evolução dos factores de forma e da função $\Gamma$ . . . . .	216
<b>7</b>	<b>Sumário, conclusões e linhas de continuação</b>	<b>221</b>

---

7.1	Sumário . . . . .	222
7.1.1	Síntese . . . . .	222
	Duas faces de um mesmo fenómeno . . . . .	222
	Principais perturbações consideradas . . . . .	224
	Construção de um método canónico de perturbações $N$ -paramétrico . . . . .	226
	Integração do problema de Gylden–Meščerskij em cenários perturbados . . . . .	227
	Análise da estabilidade em sistemas triplos hierar- quizados com massa variável . . . . .	231
	Um modelo de distribuição de massa para ventos estelares carregados . . . . .	233
7.2	Conclusões . . . . .	237
7.3	Linhas de continuação . . . . .	240
	Questões metodológicas . . . . .	240
	Aplicações . . . . .	241
<b>A</b>	<b>Código do método canónico de perturbações <math>N</math>-paramétrico</b>	<b>243</b>
<b>B</b>	<b>Resumen y conclusiones (em castelhano)</b>	<b>247</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>269</b>
	<b>Acrónimos das publicações</b>	<b>291</b>
	<b>Índice</b>	<b>295</b>

# Classificação científica

## **2000 Mathematics Subject Classification:**

70F05 , 70F07 , 70F15 , 70H07 , 70H09 , 70H14 , 70H15 , 70M20 ,  
70P05 , 37J40 , 53D22 , 85A05 , 85A99 , 83C25 , 70-02 , 85-02.

## **2006 Physics and Astronomy Classification Scheme:**

95.10.Ce , 95.10.Fh , 97.10.Me , 97.60.-s , 97.80.-d , 97.82.-j , 97.82.Fs ,  
98.10.+z , 5.45.-a , 45.10.Hj , 45.20.Jj , 2.20.Sv , 2.40.-k , 2.60.Cb , 4.25.Nx.

## **Nomenclatura Internacional da UNESCO:**

120220 , 120299 , 120326 , 120614 , 1299 ; 210101 , 210105 , 210110 , 210199 ,  
210499 , 2199 ; 220501 , 220506 , 220599 , 221205 , 221206 , 221299 , 2299 ;  
2599



# Resumo

O problema de Gylden–Meščerskij, isto é, o problema de dois corpos com massa variável é estudado quando, sobrepostas à perda de massa temporal, se consideram diferentes perturbações. Em particular analisa-se o fenómeno do incremento da perda de massa por efeito gravitacional, o denominado *efeito periastro*, demonstrando-se que poderia ser o causante de valores relativamente altos da excentricidade em alguns sistemas binários. Aliás, aborda-se o caso em que uma das componentes do sistema apresenta forma elipsoidal considerando alguns efeitos relativistas em aproximação pós-newtoniana.

Para a abordagem matemática destes cenários perturbados utilizam-se tanto técnicas analíticas como numéricas. Entre as primeiras destaca um método canónico de perturbações baseado em transformações de Lie, apresentado aqui pela primeira vez, que supõe uma generalização a  $N$  parâmetros do clássico método de Hori–Deprit.

A estabilidade de alguns sistemas triplos hierarquizados reais é examinada à luz de vários critérios de estabilidade ao longo do tempo. Para a visualização das regiões de estabilidade definiram-se mapas de estabilidade em função da excentricidade e do semieixo maior da órbita externa.

Finalmente, fornece-se um modelo de ventos carregados de massa baseado numa função de distribuição de massa definida a partir de três factores de forma do vento estelar. Este modelo é utilizado para a integração de certa configuração orbital hipotética num sistema binário Wolf–Rayet.



# Abstract

The Gylden–Meščerskij problem, i.e., two-body problem with variable mass is studied when, in addition to the time-dependent mass loss we consider several perturbations. In particular, an enhanced mass loss by gravitational effect, the so-called *periastron effect*, is analysed. It is shown that some relatively high values of the eccentricity in some binary systems could be explained by taking it into account. Moreover, we deal with the case in which one of the components shows ellipsoidal shape taking into account some relativistic effects in post-Newtonian approximation.

The mathematical treatment of these perturbed scenarios is accomplished by means of analytical and numerical techniques. Among the first ones highlights an analytical perturbation method based on Lie transformations, shown here for the first time, which represents a generalization to  $N$  parameters of the classical Hori–Deprit perturbation method.

Long-term stability of some actual hierarchical triple systems is analysed in the light of several stability criteria. Stability maps depending on eccentricity and semi-major axis of the outer orbit were defined for visualizing the stability regions.

Finally, a mass-load stellar winds model basis on the mass distribution function defined from three shape stellar wind factors is given. This model is used to integrate a hypothetical orbital configuration in a Wolf–Rayet binary system.



# Lista de Tabelas

1.1	MECANISMOS DE PERDA DE MASSA PARA ESTRELAS NÃO (RAPIDAMENTE) ROTANTES. $\dot{m}$ REPRESENTA A PERDA DE MASSA POR UNIDADE DE TEMPO ( $M_{\odot} \text{ANO}^{-1}$ ) E $v_{\infty}$ A VELOCIDADE TERMINAL DO VENTO ESTELAR. . . . .	23
1.2	VALORES DO EXPONENTE $n$ SEGUNDO A MASSA. . . . .	45
1.3	PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS E RITMOS DE PERDA DE MASSA PARA ESTRELAS DE IDADE ZERO DA SEQUÊNCIA PRINCIPAL. . . . .	48
2.1	TIPOLOGIA DO PROBLEMA DE DOIS CORPOS (ONDE $\mu$ É O PARÂMETRO GRAVITACIONAL, $t$ O TEMPO E $r$ A DISTÂNCIA). . . . .	58
2.2	VARIAÇÕES SECULARES DOS ELEMENTOS ORBITAIS DEVIDAS À PERDA DE MASSA EM FUNÇÃO DO TEMPO (GYLDÉN–MEŠČERSKIJ) E À PERTURBAÇÃO CONSIDERADA. . . . .	81
2.3	VARIAÇÕES SECULARES DOS ELEMENTOS ORBITAIS DEVIDAS À PERDA DE MASSA EM FUNÇÃO DO TEMPO (GYLDÉN–MEŠČERSKIJ) E DEVIDAS À PERTURBAÇÃO CONSIDERADA. . . . .	92
4.1	VALORES DOS PEQUENOS PARÂMETROS PARA OS PROBLEMAS: KEPLER (K), GYLDÉN–MEŠČERSKIJ (GM) E EFEITO PERIASTRO (EP). . . . .	116
4.2	CONDIÇÕES INICIAIS FIXAS PARA TODOS OS CASOS A INTEGRAR. . . . .	116
4.3	ELEMENTOS ORBITAIS E PARÂMETROS DO SISTEMA BINÁRIO. . . . .	143
4.4	VARIAÇÕES DOS ELEMENTOS ORBITAIS AO CABO DE 100 ANOS. . . . .	144

4.5	VARIAÇÕES SECULARES DOS ELEMENTOS ORBITAIS E OS FENÓMENOS QUE AS PRODUZEM. . . . .	145
5.1	VALORES DOS PARÂMETROS DO SISTEMA $\gamma$ CEPHEI (TORRES 2006). . . . .	173
5.2	VALORES HIPOTÉTICOS DOS PARÂMETROS DE PERDA DE MASSA PARA CADA COMPONENTE ( $i, j = 1, 2, 3$ ) DO SISTEMA TRIPLO $\gamma$ CEPHEI. . . . .	175
5.3	VALORES DOS PARÂMETROS DE ESTABILIDADE, DO SEU VALOR CRÍTICO E DOS INTERVALOS DE ESTABILIDADE PARA OS CRITÉRIOS DE HARRINGTON ( $F$ ), GRAZIANI-BLACK ( $\mu$ ), EGGLETON-KISELEVA ( $X$ ) E AARSETH-MARDLING ( $Z$ ) PARA O SISTEMA TRIPLO $\gamma$ CEPHEI COM $t_i = 0$ E $t_f = 20\,000$ ANOS. . . . .	177
5.4	VALORES DOS PARÂMETROS DE ESTABILIDADE, DO SEU VALOR CRÍTICO E DOS INTERVALOS DE ESTABILIDADE PARA OS CRITÉRIOS DE HARRINGTON ( $F$ ), GRAZIANI-BLACK ( $\mu$ ), EGGLETON-KISELEVA ( $X$ ) E AARSETH-MARDLING ( $Z$ ) PARA O SISTEMA TRIPLO HIPOTÉTICO COM $t_i = 0$ E $t_f = 20\,000$ ANOS. . . . .	181
5.5	ELEMENTOS ORBITAIS DO SISTEMA BU 1099 AB E DA SUBCOMPONENTE ESPECTROSCÓPICA BAG 10 Aa. . . . .	186
5.6	MEDIDAS E DIFERENÇAS O-C PARA A NOVA ÓRBITA DA BAG 10 Aa. . . . .	188
5.7	VALORES HIPOTÉTICOS DOS PARÂMETROS DE PERDA DE MASSA PARA CADA COMPONENTE ( $i, j = A, Bab, Bc$ ) DO SISTEMA BU 1099 AB. . . . .	189
5.8	VALORES DOS PARÂMETROS DE ESTABILIDADE, DO SEU VALOR CRÍTICO E DOS INTERVALOS DE ESTABILIDADE PARA OS CRITÉRIOS DE HARRINGTON ( $F$ ), GRAZIANI-BLACK ( $\mu$ ), EGGLETON-KISELEVA ( $X$ ) E AARSETH-MARDLING ( $Z$ ) PARA O SISTEMA TRIPLO BU 1099 AB COM $t_i = 0$ E $t_f = 20\,000$ ANOS. . . . .	190
5.9	TENDÊNCIA DA ESTABILIDADE PARA AS TRÊS CONFIGURAÇÕES CONSIDERADAS. . . . .	197

---

6.1	DADOS DAS ÓRBITAS, DOS PARÂMETROS DE PERDA DE MASSA E DOS PARÂMETROS DE ESTRUTURA DO VENTO ESTELAR. . . . .	214
6.2	VALORES DOS PARÂMETROS DE ESTABILIDADE, DO SEU VALOR CRÍTICO E DOS INTERVALOS DE ESTABILIDADE PARA OS CRITÉRIOS DE HARRINGTON ( $F$ ), GRAZIANI-BLACK ( $\mu$ ), EGGLETON-KISELEVA ( $X$ ) E AARSETH-MARDLING ( $Z$ ) PARA O SISTEMA COM $t_i = 0$ E $t_f = 20\,000$ ANOS. . . . .	218
6.3	TENDÊNCIA DA ESTABILIDADE PARA OS TRÊS SISTEMAS CONSIDERADOS. . . . .	219
7.1	VARIAÇÕES SECULARES DOS ELEMENTOS ORBITAIS E OS FENÓMENOS QUE AS PRODUZEM. . . . .	230



# Lista de Figuras

1.1	Esquema de um vento estelar. . . . .	17
1.2	Diagrama HR onde se mostram as zonas com características do vento similares. . . . .	18
1.3	Estrela rotante tipo B a 0, 300, 400, e 487 km s <sup>-1</sup> . A intensidade da cor é proporcional ao fluxo superficial. . . . .	20
1.4	Esquema da zona de colisão vento–vento no plano orbital de uma binária WR+OB. $S_1$ e $S_2$ denota as ondas de choque e $C$ é a superfície de contacto. $R_{WR}^{rad}$ e $R_{OB}^{rad}$ são os raios das rádio-fotosferas das componentes WR e O, respectivamente. Na parte inferior aparece ampliada a região de colisão dos ventos estelares (Usov 1995). . . . .	21
1.5	Diagrama de formação de uma binária excêntrica e ionização de duas estrelas (desbocadas) a partir de um sistemas quádruplo. . . . .	25
1.6	Evolução no diagrama HR de uma estrela AGB. . . . .	26
1.7	Lóbulos de Roche num sistema binário com transferência de massa. . . . .	27
1.8	Esquema de detecção do disco de acreção e da camada em expansão de uma estrela T–Tauri. . . . .	29
1.9	Imagem do disco de acreção e do jacto bipolar no sistema DL Tau [créditos na imagem]. . . . .	30

1.10	Comparação de tamanhos entre a estrela mais grande e luminosa conhecida, a LBV 1806-20 e o Sol. A sua massa, se ela é realmente uma estrela simples e não um sistema múltiplo, é de ao menos $150 M_{\odot}$ , com um raio de $200 R_{\odot}$ [créditos na imagem].	32
1.11	Movimento na região de colisão do sistema WR 140 (Dougherty et al. 2005).	35
1.12	Esquerda: Esquema de evolução de uma nova clássica. Direita: Imagem do hidrogénio não queimado que é rapidamente expulso no sistema Nova Cygni 1992 (Paresce et al. 1995).	36
1.13	Tabela de massas e magnitudes absolutas obtidas por Eddington (1924).	40
1.14	Relação de massa–luminosidade teórica frente as observações obtida por Eddington (1924).	42
1.15	Relação de massa–luminosidade empírica. O círculo vermelho representa a posição do Sol (Pogge 2006).	43
1.16	Diagrama HR [Pearson Education, Addison–Wesley].	44
1.17	Cadeia prótão–protão (esquerda) e ciclo CNO (direita).	47
1.18	Relação entre $\gamma$ e $\alpha$ . A curva corresponde ao ajuste dado em (1.14).	49
2.1	Representação do efeito periastro num sistema excêntrico.	58
2.2	Representação do atrito atmosférico que sofre um satélite artificial na atmosfera terrestre.	61
2.3	Esquema da posição inicial da estrela no ponto $A$ deslocando-se com velocidade $\vec{v}$ com respeito à outra componente $O$ (Hadjimetriou 1963).	73

- 
- 4.1 Variações na massa para diferentes valores iniciais da excentricidade:  $e_0 = 0.01$  (inferior),  $e_0 = 0.3$  (meio) e  $e_0 = 0.9$  (superior). Representam-se os casos da Tabela 4.2: problema de Kepler (azul), problema de Gyldén–Meščerskij (verde) e efeito periastro (vermelho). . . . . 117
- 4.2 Variações na excentricidade para diferentes valores iniciais da excentricidade:  $e_0 = 0.01$  (inferior),  $e_0 = 0.3$  (meio) e  $e_0 = 0.9$  (superior). Representam-se os casos da Tabela 4.2: problema de Kepler (azul), problema de Gyldén–Meščerskij (verde) e efeito periastro (vermelho). . . . . 119
- 4.3 Variações no semieixo maior para diferentes valores iniciais da excentricidade:  $e_0 = 0.01$  (inferior),  $e_0 = 0.3$  (meio) e  $e_0 = 0.9$  (superior). Representam-se os casos da Tabela 4.2: problema de Kepler (azul), problema de Gyldén–Meščerskij (verde) e efeito periastro (vermelho). . . . . 120
- 4.4 Variações no período para diferentes valores iniciais da excentricidade:  $e_0 = 0.01$  (inferior),  $e_0 = 0.3$  (meio) e  $e_0 = 0.9$  (superior). Representam-se os casos da Tabela 4.2: problema de Kepler (azul), problema de Gyldén–Meščerskij (verde) e efeito periastro (vermelho). . . . . 121
- 4.5 Variações na relação entre as distâncias pericêntrica e apocêntrica para diferentes valores iniciais da excentricidade:  $e_0 = 0.01$  (inferior),  $e_0 = 0.3$  (meio) e  $e_0 = 0.9$  (superior). Representam-se os casos da Tabela 4.2: problema de Kepler (azul), problema de Gyldén–Meščerskij (verde) e efeito periastro (vermelho). . . . . 123
- 4.6 Variações dos elementos orbitais para o sistema submetido ao conjunto completo de perturbações (intervalo de 1 ano). . . . . 146
- 4.7 Dependência das variações seculares do argumento do periastro  $\Delta\omega$  e do ângulo do nodo  $\Delta\Omega$  com a inclinação orbital. . . . . 147

4.8	Esquema do processo de cálculo a partir do método canónico de perturbações baseado em transformações de Lie. . . . .	148
5.1	Distribuição do semieixo maior frente à massa dos planetas extra-solares. As duas linhas descontínuas indicam os correspondentes limiares para as variações na velocidade radial (Armitage 2006).	153
5.2	Distribuição da excentricidade frente à massa dos planetas extra-solares (Armitage 2006). . . . .	155
5.3	Distribuição da excentricidade frente ao semieixo maior dos planetas extra-solares. A ausência de planetas à direita da linha vertical azul é devida ao limiar de sensibilidade do método de detecção por velocidades radiais (Armitage 2006). . . . .	156
5.4	Órbitas tipo P e tipo S num sistema binário com um planeta (círculo verde). . . . .	158
5.5	Sistema de coordenadas de Jacobi para o problema de três corpos.	162
5.6	Sistema binário-planetário $\gamma$ Cephei com a brilhante estrela principal, de nome <i>Errai</i> , no centro. Representam-se a escala as órbitas da estrela secundária e do planeta [McDonald Observatory, University of Texas (Austin)]. . . . .	172
5.7	Mapas de estabilidade em função da excentricidade e do semieixo maior da órbita externa segundo os critérios de Harrington ( $\delta F$ ), Graziani–Black ( $\delta\mu$ ) e Aarseth–Mardling ( $\delta Z$ ), e em função das excentricidades das duas órbitas segundo o critério de Eggleton–Kiseleva ( $\delta X$ ) para $\gamma$ Cephei. A linha branca descontínua marca a fronteira entre a região de estabilidade e a de indizibilidade, enquanto as cores indicam o gradiente, de maneira que nas regiões onde a cor é uniforme a variação do valor do intervalo de estabilidade é mais lenta que em aquelas outras onde as cores variam rapidamente. . . . .	178

- 
- 5.8 Evolução temporal dos intervalos de estabilidade para  $\gamma$  Cephei. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP. . . . . 179
- 5.9 Evolução temporal das excentricidades e semieixos maiores de ambas órbitas para o sistema triplo  $\gamma$  Cephei. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP. . . . . 180
- 5.10 Evolução temporal das inclinações: interna (esquerda), externa (centro) e mútua (direita) para o sistema triplo  $\gamma$  Cephei. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP. . . . . 180
- 5.11 Mapas de estabilidade em função da excentricidade e do semi-eixo maior da órbita externa segundo os critérios de Harrington ( $\delta F$ ), Graziani–Black ( $\delta\mu$ ) e Aarseth–Mardling ( $\delta Z$ ), e em função das excentricidades das duas órbitas segundo o critério de Eggleton–Kiseleva ( $\delta X$ ) para o sistema binária+planeta hipotético. A linha branca descontínua marca a fronteira entre a região de estabilidade e a de indizibilidade, enquanto as cores indicam o gradiente, de maneira que nas regiões onde a cor é uniforme a variação do valor do intervalo de estabilidade é mais lenta que em aquelas outras onde as cores variam rapidamente. . . . . 182
- 5.12 Evolução temporal dos intervalos de estabilidade de cada critério para o sistema binária+planeta hipotético. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP. . . . . 183
- 5.13 Evolução temporal das excentricidades e semieixos maiores de ambas órbitas para o sistema binária+planeta hipotético. . . . . 184
- 5.14 Evolução temporal das inclinações: interna (esquerda), externa (centro) e mútua (direita) para o sistema binária+planeta hipotético. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP. . . . . 184

- 
- 5.15 Diagrama de hierarquias do sistema quádruplo BU 1099 AB. . . . 185
- 5.16 Nova órbita visual da binária BAG 10 Aa. A escala está em segundos de arco e a linha descontínua representa a linha dos nodos. 187
- 5.17 Mapas de estabilidade em função da excentricidade e do semi-eixo maior da órbita externa segundo os critérios de Harrington ( $\delta F$ ), Graziani–Black ( $\delta\mu$ ) e Aarseth–Mardling ( $\delta Z$ ), e em função das excentricidades das duas órbitas segundo o critério de Eggleton–Kiseleva ( $\delta X$ ) para BU 1099 AB. A linha branca descontínua marca a fronteira entre a região de estabilidade e a de indizibilidade, enquanto as cores indicam o gradiente, de maneira que nas regiões onde a cor é uniforme a variação do valor do intervalo de estabilidade é mais lenta que em aquelas outras onde as cores variam rapidamente. . . . . 191
- 5.18 Detalhe do mapa de estabilidade para o critério de Harrington no entorno do ponto que ocupa o sistema. . . . . 192
- 5.19 Evolução temporal dos intervalos de estabilidade de cada critério para BU 1099 AB. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP. . . . . 193
- 5.20 Evolução temporal das excentricidades e semieixos maiores de ambas órbitas para a BU 1099 AB. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP. . 194
- 5.21 Evolução temporal das inclinações interna (esquerda), externa (centro) e mútua (direita) para BU 1099 AB. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP. . . . . 194
- 6.1 Esquerda: Sobreposição de imagens de alta resolução de WR 104 (em baixo) e WR 98 (acima) sobre outra imagem do Cúmulo Quíntuplo (Tuthill et al. 2006). Direita: Modelo de ventos em interacção com fluxo saliente em espiral para a WR 104. . . . . 201

- 
- 6.2 Esquerda: imagem de WR 104 em Julho de 1999. Direita: imagem de WR 98 em Agosto de 1998 (acima) e em Julho de 1999 (em baixo). A linha descontínua representa um modelo espiral de rotação (Tuthill et al. 2006). . . . . 202
- 6.3 Geometria observada do sistema WR 140. A órbita está aumentada num factor 3 relativamente ao casulo de pó. O observador localiza-se em direcção à parte baixa da imagem com uma inclinação mal determinada (Monnier, Tuthill e Danchi 2002). . . . . 203
- 6.4 Imagem do sistema ultra-massivo  $\eta$  Carinae (Smith e Morse 2004). 204
- 6.5 Representação do sistema formado por uma anã castanha (AC) ou um planeta (P) em órbita em redor de uma binária WR+OB com ventos em interacção. . . . . 206
- 6.6 Factores de forma  $\Phi(\varphi)$ ,  $\Xi(R)$  e  $\Theta(f)$  para certos valores concretos dos parâmetros do vento (indicados na figura). . . . . 210
- 6.7 Representações tridimensionais e mapas de densidade dos factores de forma da região activa. . . . . 212
- 6.8 Binária externa (esquerda) e detalhe da interna (direita). . . . . 213
- 6.9 Evolução temporal das excentricidades e semieixos maiores de ambas órbitas. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde CPM e a vermelha CPM+GM. . . . . 215
- 6.10 Evolução temporal das inclinações: interna (esquerda), externa (centro) e mútua (direita). A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde CPM e a vermelha CPM+GM. . . . . 215

- 6.11 Mapas de estabilidade em função da excentricidade e do semi-eixo maior da órbita externa segundo os critérios de Harrington ( $\delta F$ ), Graziani–Black ( $\delta\mu$ ) e Aarseth–Mardling ( $\delta Z$ ), e em função das excentricidades das duas órbitas segundo o critério de Eggleton–Kiseleva ( $\delta X$ ) para o sistema protótipo. A linha branca descontínua marca a fronteira entre a região de estabilidade e a de indizibilidade, enquanto as cores indicam o gradiente, de maneira que nas regiões onde a cor é uniforme a variação do valor do intervalo de estabilidade é mais lenta que em aquelas outras onde as cores variam rapidamente. . . . . 217
- 6.12 Detalhe da evolução do mapa de estabilidade para o critério de Harrington no entorno do ponto que ocupa o sistema no cenário de CPM+GM em dois instantes de tempo separados 20 000 anos. A linha descontínua e o ponto brancos representam o valor crítico que define a região de estabilidade e a posição do sistema no instante inicial, respectivamente, enquanto os pretos correspondem ao instante final. . . . . 219
- 6.13 Evolução dos factores de forma,  $\Phi$  (azul),  $\Xi$  (verde claro),  $\Theta$  (vermelho) e do seu produto  $\Gamma$  (verde intenso), na parte superior. Na parte inferior representa-se exclusivamente a função  $\Gamma$ . O período de integração é de 500 anos. . . . . 220
- 7.1 Relação entre  $\gamma$  e  $\alpha$ . . . . . 224
- 7.2 De esquerda a direita: variações na excentricidade, no semi-eixo maior e na relação entre a distância pericêntrica e apocêntrica para um valor inicial da excentricidade de 0.3. Representam-se o problema de Kepler (azul), o problema de Gyldén–Meščerskij (verde) e o efeito periastro (vermelho). . . . . 227
- 7.3 Variações dos elementos orbitais para o sistema submetido ao conjunto completo de perturbações (intervalo de 1 ano). . . . . 231

- 
- 7.4 Esquerda: Evolução temporal da excentricidade e semieixo maior da órbita interna para BAG 10 Aa (a linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP). Direita: Nova órbita visual da binária BAG 10 Aa. . . . . 233
- 7.5 Detalhe do mapa de estabilidade para o critério de Harrington no entorno do ponto que ocupa o sistema estelar BU 1099 AB. . . . 234
- 7.6 Factores de forma  $\Phi(\varphi)$ ,  $\Xi(R)$  e  $\Theta(f)$  para certos valores concretos dos parâmetros do vento (indicados na figura). . . . . 234
- 7.7 Representações tridimensionais e mapas de densidade dos factores de forma da região activa. . . . . 235
- 7.8 Detalhe da evolução do mapa de estabilidade segundo o critério de Harrington no entorno do ponto que ocupa o sistema WR 140 mais anã castanha no cenário CPM+GM em dois instantes de tempo separados 20 000 anos. A linha descontínua e o ponto brancos representam o valor crítico que define a região de estabilidade e a posição do sistema no instante inicial, respectivamente, enquanto os pretos correspondem ao instante final. . . . 237
- 7.9 Evolução dos factores de forma,  $\Phi$  (azul),  $\Xi$  (verde claro),  $\Theta$  (vermelho) e do seu produto  $\Gamma$  (verde intenso), na parte superior. Na parte inferior representa-se exclusivamente a função  $\Gamma$ . O período de integração é de 500 anos. . . . . 238



# Lista de símbolos

Esta lista de símbolos não pretende ser completa. Os símbolos utilizados habitualmente não figuram nela, por exemplo, as coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ . Omitem-se, aliás, símbolos que apenas se utilizam em uma ou duas páginas. Em geral, o subíndice '0' indica *inicial* ou *original*, enquanto o símbolo '\*' indica o elemento ou a função *transformados*.

$\mathcal{A}$	termos conhecidos após a transformação canónica de Lie
$a$	semieixo maior orbital
$C_{nm}$	coeficientes dos harmónicos esféricos (associados ao co-seno)
$c$	velocidade da luz
$d_{pa}$	quociente entre a distância apocêntrica e a pericêntrica
$E$	anomalia excêntrica
$e$	excentricidade orbital
$e_{12\text{máx}}$	excentricidade máxima nos ciclos de Kozai
$\vec{F}$	força
$F$	parâmetro de estabilidade de Harrington
$F_c$	parâmetro de estabilidade de Harrington crítico
$f$	anomalia verdadeira
$G$	constante gravitacional de Newton
$G_D$	módulo do vector momento angular (variável de Delaunay)
$g_D$	argumento do periastro (variável de Delaunay)
$g_{\mu\nu}$	tensor métrico de Riemann

---

$g^*$	gravidade superficial estelar
$g_{\odot}$	gravidade superficial do Sol
$\mathcal{H}$	função hamiltoniana
$\mathcal{H}_0$	função hamiltoniana do problema de Gylden–Meščerskij
$\mathcal{H}^*$	função hamiltoniana transformada
$H_D$	componente polar do vector momento angular (variável de Delaunay)
$h_D$	ângulo do nodo (variável de Delaunay)
$I$	centro de massas do sistema
$I_{12}$	centro de massas da binária interna
$i$	inclinação orbital
$J$	matriz simpléctica
$J_2$	factor de forma dinâmico
$\mathcal{K}$	função hamiltoniana nova
$\mathcal{L}$	função lagrangiana
$\mathcal{L}_N$	função lagrangiana (parte newtoniana)
$\mathcal{L}_{PN}$	função lagrangiana (parte pós-newtoniana)
$\mathcal{L}_{j_1, \dots, j_n}^{i_1, \dots, i_n}$	operador de Lie (generalizado)
$L_D$	energia (variável de Delaunay)
$L_4$	ponto de Lagrange $L_4$
$L_5$	ponto de Lagrange $L_5$
$L_*$	luminosidade estelar
$L_{\odot}$	luminosidade do Sol
$\ell_D$	anomalia média (variável de Delaunay)
$m$	massa total do sistema
$M_{\text{J}}$	massa de Júpiter
$M_{\odot}$	massa do Sol
$n$	exponente da massa na lei de Jeans
$n_i$	exponentes das massas na lei de Jeans
$\mathcal{P}$	função perturbadora
$\vec{P}$	força perturbativa
$P$	período orbital

---

$P_{Koz}$	período das oscilações nos ciclos de Kozai
$P_{nm}$	polinómios de Legendre associados
$p_r$	velocidade radial (variável polar–nodal)
$p_\theta$	módulo do vector momento angular (variável polar–nodal)
$p_\nu$	componente polar do vector momento angular (variável polar–nodal)
$q_3$	distância pericêntrica da órbita externa
$\mathcal{R}$	função resto
$\vec{R}$	coordenada de Jacobi
$R_*$	raio estelar
$R_\odot$	raio do Sol
$\vec{r}$	coordenada de Jacobi
$r$	distância radial (variável polar–nodal)
$S$	função geratriz da transformação canónica
$S_{nm}$	coeficientes dos harmónicos esféricos (associados ao seno)
$T$	época de passagem pelo periastro
$T_{ef}$	temperatura efectiva
$V$	potencial gravitacional
$\vec{v}$	velocidade
$v_\infty$	módulo da velocidade terminal do vento estelar
$\mathcal{W}$	função geratriz da transformação canónica de Lie
$X$	parâmetro de estabilidade de Eggleton–Kiseleva
$X_c$	parâmetro de estabilidade de Eggleton–Kiseleva crítico
$Z$	parâmetro de estabilidade de Aarseth–Mardling
$Z_c$	parâmetro de estabilidade de Aarseth–Mardling crítico
$\alpha$	parâmetro de perda de massa na lei de Jeans
$\alpha_i$	parâmetros de perdas de massa na lei de Jeans
$\beta$	parâmetro de perda de massa por efeito periastro
$\beta_{ij}$	parâmetros de perda de massa por efeito de aproximações mútuas
$\Gamma$	função de distribuição de massa do vento estelar
$\gamma$	ritmo de perda de massa estelar

---

$\delta$	parâmetro de ganho de massa
$\delta_0$	intensidade do ganho de massa
$\delta_p$	intervalo de estabilidade para o critério $p$
$\varepsilon$	parâmetro $N$ -dimensional
$\eta_{\mu\nu}$	tensor métrico de Minkowski
$\Theta$	factor de forma pericêntrico do vento estelar
$\theta_i$	parâmetros pericêntricos de estrutura do vento estelar
$\theta$	argumento da latitude (variável polar-nodal)
$\theta$	ângulo de posição
$\vartheta$	co-latitude
$\lambda$	longitude
$\mu$	parâmetro gravitacional
$\mu$	parâmetro de estabilidade de Graziani-Black
$\mu_c$	parâmetro de estabilidade de Graziani-Black crítico
$\nu$	ângulo do nodo ascendente (variável polar-nodal)
$\Xi$	factor de forma radial do vento estelar
$\xi_i$	parâmetros radiais de estrutura do vento estelar
$\rho$	distância angular
$\sigma_i$	parâmetros de massa reduzidos
$\tau_{circ}$	tempo de circularização pelas forças de maré
$\tau_{SP}$	escala de tempo nuclear para a Sequência Principal
$\Phi$	factor de forma transversal do vento estelar
$\varphi$	ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{R}$
$\chi_i$	parâmetros transversais de estrutura do vento estelar
$\Omega$	ângulo do nodo
$\omega$	argumento do periastro

# Motivação e organização da tese

O problema de dois corpos submetidos a uma força atractiva que diminui com o inverso do quadrado da distância, conhecido como problema de Kepler<sup>1</sup>, foi resolvido por Newton nos seus *Principia* em 1687. Mas foram as posteriores formalizações deste problema nos formalismos lagrangiano e, nomeadamente, hamiltoniano, as que produziram grandes avanços na compreensão global deste e de outros problemas derivados logicamente dele, como é o caso do problema de três corpos<sup>2</sup>.

Situações especialmente interessantes aparecem quando se introduz alguma perturbação no sistema. Do ponto de vista matemático a função hamiltoniana que descreve o sistema passa a estar dada por uma parte completamente integrável mais uma parte que representa a perturbação. Embora o problema perturbado difere ligeiramente do não perturbado, as soluções de ambos podem ser muito diferentes, já que uma pequena perturbação pode dar lugar a efeitos seculares. Neste contexto é no qual se situa o problema de perda de massa em sistemas estelares binários, isto é, o do movimento de um sistema de duas estrelas onde uma delas ou ambas perdem massa em função de certas variáveis (tempo<sup>3</sup>, distância, etc.). Do ponto de vista físico existem diferentes leis de perda de massa que tencionam dar conta deste fenómeno, entre as quais haveria que pôr em

---

<sup>1</sup>Um texto tecnicamente muito completo e actualizado sobre este problema é o de Cordani (2003).

<sup>2</sup>Este problema é amplamente tratado no recente texto de Valtonen e Karttunen (2006).

<sup>3</sup>Neste caso referir-nos-emos ao chamado problema de Gylden–Meščerskij.

destaque, tanto pela sua importância histórica como pela sua flexibilidade quanto aos modelos em que é aplicável, a denominada lei de Jeans.

Neste trabalho tenciona-se resolver o problema de perda de massa estelar em sistemas binários e múltiplos —três e mais corpos— quando, além da perda de massa temporal, se acrescenta a perda de massa em função da distância via o que se denomina ‘efeito periastro’, hipótese que se estabelece para explicar o suposto incremento de perda de massa nas proximidades do periastro. Uma vez formulado este problema passa-se a estudar o efeito de outras eventuais perturbações: forma elipsoidal de alguma das componentes do sistema e efeitos relativistas. Nesta classe de problemas inserem-se outros como o da variação da constante de gravitação  $G$  ou o recentemente proposto problema de três buracos negros.

Aliás, para atacar este tipo de problemas foi necessário desenvolver algumas novas ferramentas matemáticas, tais como um novo método canónico de perturbações baseado em transformações de Lie que formalmente supõe uma generalização completa a um número arbitrário de pequenos parâmetros do método de Hori–Deprit.

Outro dos grandes interesses é o que envolve os assuntos relacionados com a perda de massa estelar, nomeadamente em forma de ventos estelares<sup>4</sup> e a sua relação com os aspectos dinâmicos do problema, sobretudo, no que tem a ver com a evolução orbital e a estabilidade dos sistemas múltiplos.

Em resumo, o trabalho que aqui se apresenta envolve tanto aspectos matemáticos ligados à dinâmica do problema de vários corpos quanto aspectos de natureza astrofísica. Assim, os capítulos em que se divide situam-se em diferentes campos da física e da matemática como são os sistemas binários e múltiplos, a estrutura de ventos estelares, a mecânica celeste, a teoria da relatividade geral e a teoria de perturbações.

---

<sup>4</sup>Um texto actualizado sobre este tema é o de Lamers e Cassinelli (1999).

Estes conteúdos são desenvolvidos ao longo da presente memória na seguinte ordem:

**Capítulo 1** passam-se em revista os principais contributos que ao longo da história recebeu o problema de perda de massa estelar, tanto do ponto de vista da sua abordagem matemática como do seu aspecto astrofísico. Constitui, portanto, uma colecção dos trabalhos mais representativos deste campo de estudo.

Primeiramente expressam-se, entre outros, alguns dos resultados tanto clássicos quanto actuais do problema de dois corpos com perda de massa, de maneira a servir como ponto de partida para este estudo. Numa segunda parte trata-se a questão da perda de massa que sofre uma estrela como consequência do seu processo evolutivo através do diagrama Hertzsprung–Russell (HR).

Algumas das ideias que aparecerão nos capítulos seguintes são já esboçadas neste capítulo. Assim, algumas novas contribuições em relação à lei de Jeans e ao efeito periastro são apresentadas na última secção.

**Capítulo 2** descrevem-se as perturbações —efeito periastro, componente elipsoidal e efeitos relativistas— que se considerarão sobrepostas à perda de massa dependente do tempo e obtêm-se as equações do movimento em formulação hamiltoniana.

Para o caso do efeito periastro propõe-se uma lei de perda de massa que conduz a variações seculares dos elementos orbitais.

**Capítulo 3** em que se constrói um novo método canónico de perturbações baseado em transformações de Lie e aplicável a sistemas hamiltonianos com um número  $N$  arbitrário de parâmetros. Este supõe uma generalização completa do método (uniparamétrico) de Hori–Deprit que já no passado tinha sido ampliado a 2 e 3 parâmetros.

**Capítulo 4** onde se integra numericamente o problema de Gylden–Meščerskij com efeito periastro mostrando a evolução em função do tempo para o semieixo maior e a excentricidade.

Numa segunda parte mostra-se a aplicação do método construído no capítulo anterior (na sua versão 4-paramétrica) ao caso de um sistema binário com perda de massa dependente do tempo e primária com forma elipsoidal considerando os efeitos relativistas em primeira aproximação pós-newtoniana. Após a integração analítica mostra-se a evolução dos elementos orbitais destacando o comportamento secular de alguns deles sob determinadas condições.

**Capítulo 5** descrevem-se quatro critérios de estabilidade definidos por diferentes autores para sistemas triplos hierarquizados. Realiza-se a sua aplicação a dois sistemas planetários (um deles,  $\gamma$  Cephei) e a um sistema estelar (BU 1099 AB) em que se considera perda de massa dependente do tempo e efeito periastro, representando a evolução dos parâmetros de estabilidade em mapas de estabilidade definidos *ad hoc*.

**Capítulo 6** onde se define uma nova função de distribuição de massa  $\Gamma$ , mediante a qual se modeliza o ganho de massa que sofre uma anã castanha ou um planeta gigante orbitando um sistema binário com potentes ventos estelares carregados de massa.

**Capítulo 7** reúne os principais resultados obtidos nesta tese e as conclusões finais. Aliás, propõem-se algumas linhas de investigação cuja exploração resultaria interessante no futuro.

Finalmente, incluem-se no Apêndice A os códigos de programação para *Mathematica*<sup>®</sup> do método canónico de perturbações  $N$ -paramétrico apresentado no Capítulo 3.

Aliás, acrescenta-se num segundo apêndice (B) um resumo em castelhano não inferior a 3 000 palavras de acordo com o artigo 30.3 do Regulamento de Estudos de Terceiro Ciclo da USC.

Todos os cálculos realizados ao longo desta tese foram obtidos utilizando o manipulador algébrico *Mathematica*<sup>®</sup> e rotinas escritas em linguagem C. O documento completo foi editado com  $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ .



# Capítulo 1

## O problema de massa variável e o fenômeno de perda de massa estelar

*“It is wrong to think that the task of physics is to find out how nature is. Physics concerns what we can say about nature.” \**

NIELS BOHR (1885–1962)

### 1.1 Introdução

O problema de dois corpos com massa variável em função do tempo é um dos clássicos da Mecânica Celeste e a ele se dedicaram muitos e destacados investigadores em diferentes épocas. O seu interesse é notável dada a

---

\* “A finalidade da física não é descobrir o que é a Natureza, mas sim aquilo que podemos dizer sobre ela.” Citado em *The philosophy of Niels Bohr* (A. Petersen 1963).

existência de diversos objectos celestes que, em geral, possuem massas não estacionárias e cujo estudo permitiria conhecer melhor a natureza do seu movimento:

- estrelas com perda de massa por emissão corpuscular,
- sistemas estelares múltiplos com perda e intercâmbio de massa,
- objectos que ganham massa por acreção de massa interestelar, e
- cometas que se fundem na sua passagem pelo periélio.

Dois trabalhos de referência quanto aos aspectos historiográficos deste tema são Polyakhova (1994) e Prieto (1995). De seguido faz-se uma exposição diacrónica dos principais resultados clássicos ao fio destes dois documentos e uma breve descrição dos resultados mais recentes.

Dentro do campo da Astrofísica o problema de perda de massa estelar, ora em forma de ventos estelares, ora mediante potentes explosões com ejeções de matéria, é também uma questão muito interessante cujo estudo tem florescido nos últimos anos. Actualmente conhecem-se diferentes classes de objectos estelares cuja evolução está fortemente determinada pela perda de massa. Muitos destes objectos encontram-se em sistemas estelares binários ou em agrupamentos de maior multiplicidade.

Como um dos objectivos transversais desta tese é tratar o problema da perda de massa tendo em conta as suas duas facetas, isto é, a matemática e a física, expõe-se também qual é o estado actual da mesmas. Centra-se a atenção em algumas classes de objectos especialmente interessantes como são as estrelas desbocadas, as estrelas AGB, as estrelas T-Tauri, as estrelas LBV, as estrelas Wolf-Rayet (WR) e as novas clássicas.

Finalmente, é necessário notar que, do ponto de vista formal, o problema de Gylden-Meščerskij de massa variável é equivalente ao da variação da constante gravitacional da gravitação newtoniana  $G$  em função do tempo. Esta possibilidade, sugerida por Dirac (1937), é conhecida como a Hipótese dos Grandes Números ou Hipótese de Dirac. Embora tal questão

não esteja directamente relacionada com o problema de massa variável, faz-se também um breve repasso das ideias e dos resultados alcançados tendo em conta a semelhança formal e a sua importância do ponto de vista cosmológico.

Em paralelo a esta exposição de factos ir-se-ão entretecendo algumas das ideias que servirão de guia no resto da tese, mas também de fonte de alguns dos problemas que se pretende resolver.

## 1.2 A formulação matemática do problema de massa variável

É Dufour (1866) o primeiro em sugerir que a variação secular da aceleração lunar poderia estar provocada pelo aumento da massa da Terra devido ao impacto de meteoritos. Algum tempo depois, independentemente, Oppolzer (1884) propõe que esta variação poderia ter a sua origem na presença de pó cósmico, o qual age sobre a Terra e a Lua aumentando a sua massa e provocando a aparição de diversos termos na longitude média da Lua.

### 1.2.1 O problema de Gyldén–Meščerskij

A partir do trabalho de Oppolzer, Gyldén (1884) propõe a resolução do sistema de equações diferenciais que descreve o movimento de dois corpos com massas variáveis

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu + f(t)}{r^3} x &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu + f(t)}{r^3} y &= 0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde  $\mu$  é a soma de massas num instante determinado e  $f(t)$  uma função do tempo suposta conhecida.

Gyldén utiliza a transformação

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\xi}{1 + \psi'} \\ y = \frac{\eta}{1 + \psi'} \\ r = \frac{\rho}{1 + \psi'} \\ dt = \frac{d\tau}{(1 + \psi)^2} \end{array} \right.$$

para passar do sistema (1.1) a outro integrável

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\mu}{\rho^3} \xi &= 0, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{\mu}{\rho^3} \eta &= 0. \end{aligned}$$

Numa notação mais condensada, as equações do movimento relativo de uma massa  $m(t)$  que se move em redor de outra massa  $M(t)$  num campo gravitacional vêm dadas por

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu(t)}{r^3} \vec{r} = 0,$$

sendo o parâmetro gravitacional  $\mu(t) = G(t)[M(t) + m(t)]$ . Neste caso supõe-se que o campo gravitacional é tal que  $G = \text{cte}$  (ver § 1.4 para a análise do problema com  $G$  variável).

O primeiro caso particular de lei de variação de massas onde o problema de Gyldén resulta integrável é dado por Meščerskij (1893) daí que seja conhecida como primeira lei de Meščerskij

$$\mu(t) = \frac{1}{a + \alpha t'}, \quad (1.2)$$

sendo  $a$  e  $\alpha$  constantes. Consegue-o utilizando uma transformação das variáveis espaciais e temporal que transforma o sistema não integrável original num sistema que é basicamente um problema de Kepler de dois corpos com massa estacionária nas novas variáveis

$$\begin{cases} \xi = \frac{x}{a + \alpha t'} \\ \eta = \frac{y}{a + \alpha t'} \\ \tau = \frac{-1}{a(a + \alpha t')}. \end{cases}$$

O segundo caso integrável, denominado segunda lei de Meščerskij , vem dado por

$$\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{a + \alpha t}}. \quad (1.3)$$

Posteriormente, as leis (1.2) e (1.3) são generalizadas (Meščerskij 1902) na denominada lei conjunta de Meščerskij

$$\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta t + \gamma t^2}}, \quad (1.4)$$

sendo  $\alpha, \beta,$  e  $\gamma$  constantes. Os detalhes da demonstração da sua integrabilidade são dados por McMillan (1925), quem conclui que a excentricidade permanece essencialmente constante.

Anos mais tarde, Meščerskij (1949) estabelece as notáveis equações que caracterizam o movimento absoluto de pontos de massa variável

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i + \dot{m}_i (\vec{u}_i - \vec{v}_i), \quad (1.5)$$

onde  $\vec{u}_i$  é a velocidade absoluta do centro de massas das partículas  $dm_i$  justo antes de se unirem a  $m_i$  ( $i = 1, 2$ ), ou das partículas separadas justo depois de se desprenderem de  $m_i$ ;  $\vec{v}_i$  é a velocidade absoluta do ponto  $m_i$  antes da união ou após a separação de  $dm_i$ ; e  $\vec{F}_i$  é a força agindo sobre  $m_i$ . Nesta notação  $m_1 \equiv M(t)$  e  $m_2 \equiv m(t)$ .

É importante pôr em destaque que é Meščerskij quem fornece de conteúdo físico o esquema matemático proposto por Gyldén. De facto, quando se considera que as velocidades relativas de união ou separação dos dois corpos são nulas, o qual é equivalente a supor que a massa varia isotropicamente —isto é, sem colisões, uniforme e continuamente em todas as direcções—, observa-se que as equações de Gyldén representam um caso particular das equações de Meščerskij. Uma consequência importante é que no problema de Gyldén segue-se a verificar a lei das áreas. É precisamente esta formulação do problema a que recebe o nome de problema de Gyldén–Meščerskij.

## 1.2.2 Leis de perda de massa

### A lei de Jeans

É Jeans (1924) o primeiro em relacionar o problema matemático de massa variável com a perda de massa estelar. Ele conclui que para que as equações do movimento de dois corpos com massa variável sejam integráveis tem que verificar-se

$$\frac{dM}{dt} = -M^2 \sqrt{\alpha^2 M^2 + \beta},$$

sendo

$$M = \frac{m^3}{(m + m')^2},$$

onde  $m$  e  $m'$  são as massas das componentes, enquanto  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes.

Na prática, de acordo com o facto de que a luminosidade de uma estrela é proporcional à sua perda de massa, e segundo a teoria de Eddington (1924), tal perda tem que ser proporcional a uma potência da massa que varia entre 1.4 e 4.4. Define-se assim a lei generalizada conhecida como lei de Jeans (ou também, lei de Eddington–Jeans):

$$\dot{m} = -\alpha m^n, \quad (1.6)$$

com  $1.4 < n < 4.4$  e  $\alpha$  constante. Para  $n = 2$  reduz-se ao primeiro caso de Meščerskij e para  $n = 3$  ao segundo (que corresponde a estrelas com grandezas absolutas entre 5 e  $-1$ ). Se não temos em conta as restrições no valor de  $n$  observamos que a própria expressão (1.6) contém as leis de perda de massa linear,  $n = 0$ , e exponencial,  $n = 1$ . Portanto, a lei de Jeans generaliza não só a primeira e segunda leis de Meščerskij, senão também as leis linear e exponencial.

Em § 1.5.1 realiza-se uma reinterpretação da lei de Jeans à vista de resultados actuais sobre a relação de massa–luminosidade.

### **Outras leis *ad hoc***

A medida que o conhecimento sobre os processos que acontecem no interior das estrelas vai aumentando e as medidas de parâmetros estelares fundamentais —nomeadamente, massa, luminosidade e raio— fazendo-se mais precisas, começam a propor-se diferentes leis de perda de massa válidas sob determinadas condições.

A maioria delas são fórmulas semiempíricas que tentam reproduzir os ritmos de perda de massa observados. Algumas, como a parametrização de Nieuwenhuijzen e de Jager (1990), são válidas praticamente para qualquer objecto estelar sobre o diagrama HR, enquanto outras apenas são aplicáveis

a um determinada classe de objectos estelares como, por exemplo, a lei de Reimers (1975) para estrelas gigantes na fase RGB ou a parametrização de Nugis e Lamers (2000) para estrelas Wolf-Rayet .

### 1.2.3 A formulação de Duboshin

No que tem a ver com a resolução do problema, as soluções de Gylden (1884), Lehmann-Filhés (1898) e Strömngren (1903) apenas são válidas para alguns casos especiais de funções  $\mu(t)$  com variações muito lentas. É na década dos 20 do passado século quando Duboshin desenvolve numa série de artigos fundamentais (Duboshin 1925, 1927, 1928, 1929) um método geral de resolução deste problema baseado na solução a uma equação integro-diferencial do tipo

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{\varphi[f(t)]}{\varphi^2}$$

por meio de uma série infinita, mas convergente, de potências de um pequeno parâmetro. Apesar do avanço que supõe este método, a restrição de pequeno parâmetro imposta à variação de massa não permite resolver o problema na sua forma mais geral. Este impedimento, unido à ideia de que Duboshin acredita que existem outras leis de perda de massa para os corpos celestes, as quais julga que poderão ser descobertas a partir da observação atenta destes sistemas, leva-o a considerar outra abordagem do problema (Duboshin 1930). Esta consiste em determinar a forma da trajectória e as características dinâmicas do movimento sem integrar formalmente o sistema. Isto permite-lhe considerar uma função de perda de massa  $f(t)$  arbitrária e obter assim um conhecimento qualitativo do comportamento do sistema para qualquer intervalo temporal.

As suas ideias, e alguns dos seus resultados, serão posteriormente desenvolvidos por outros investigadores da escola russa.

## 1.2.4 Alguns resultados clássicos

### O Problema de Meščerskij–Levi-Civita

Levi-Civita (1928) introduz uma modificação na lei (1.5) ao sugerir a utilização da relação  $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$  em lugar de  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ , considerando assim o caso em que a massa de um corpo varia por achegas de matéria em choques inelásticos ou por ejeção corpuscular. Este problema corresponde-se com dois modelos: um é o do movimento de um satélite numa nuvem de partículas estacionárias com acreção; o outro é o de um cometa cuja perda contínua de massa origina uma cauda que fica dinamicamente ligada ao núcleo cometário.

### Resultados de Armellini

Tomando para estrelas binárias com massa variável  $M = \frac{1}{1 + \alpha t}$ , sendo  $\alpha$  uma pequena constante positiva, conclui que a excentricidade aumenta secularmente com o tempo tendendo a infinito (Armellini 1953a).

Demonstra que no caso de um sistema binário cujas componentes obedecem a lei de Newton e cuja massa diminui com o tempo de maneira descontínua (Armellini 1953b) verifica-se que:

- a secundária descreve uma trajectória espiral em redor da primária,
- $Ma(1 - e^2)$ ,
- $a$ ,  $a(1 - e)$ ,  $a(1 + e)$  são funções crescentes, e
- $M(1 - e)$  e  $M(1 + e)$  são funções decrescentes.
- Teorema:

$$\text{Se } M(t) \longrightarrow 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t m(t) = 0,$$

então, quaisquer que sejam as condições iniciais e qualquer que seja o ritmo de decrescimento da massa, a excentricidade cresce até superar qualquer valor.

Baseando-se nestes trabalhos, Chiara (1957) acha que as leis de perda de massa para as que a excentricidade varia secularmente em função da massa global do sistema binário são do tipo

$$\dot{m} = -\frac{k(t)}{r^2},$$

onde  $k(t)$  é uma função cuja oscilação em cada período é pequena em relação ao seu valor médio.

### O método de Radzievskii–Gel’fgat

Apesar de que as soluções exactas de (1.4) correspondem aos casos  $n = 2$  e  $n = 3$  na lei (1.6), do ponto de vista astrofísico os casos mais interessantes (estrelas da Sequência Principal) são  $3 \lesssim n \lesssim 4$ . Esta classe de casos são os analisados por Radzievskii e Gel’fgat (1957) e aplicados a estrelas da sequência principal. Tendo em conta a lei de Jeans, Gel’fgat (1963) também analisa os casos integráveis de Meščerskij considerando a possibilidade do aumento da excentricidade com a diminuição da massa. É também o primeiro em introduzir um critério de *lentidão* da perda de massa (Gel’fgat 1965).

Porém, os seus contributos mais notáveis são a obtenção de soluções exactas para os casos  $n = 0$  e  $n = 3/2$ , o que lhe permite expressar o parâmetro gravitacional  $\mu(t) = GM(t)$  por meio de funções de Bessel, e de soluções aproximadas para  $n = 5/2$  e  $n = 4$  (Gel’fgat 1965).

A aplicação do método de Radzievskii–Gel’fgat permite construir novas soluções a partir de soluções conhecidas. Assim é possível obter uma solução para  $n_2$  a partir de  $n_1$  segundo

$$n_2 = \frac{2n_1 - 3}{n_1 - 2}.$$

Uma generalização deste método é dada pelo teorema de Berković (1981).

### A focagem perturbativa de Hadjidemetriou

Dirigindo a atenção para o estudo orbital do problema reconhece-se a Strömgren (1903) como o primeiro em obter os elementos osculadores da órbita até ao primeiro grau do pequeno parâmetro  $\alpha$  com uma variação da massa quase-linear proporcional a  $(1 + \alpha t)$ . As mudanças que atingem à excentricidade e ao semieixo maior são estudadas em posteriores trabalhos por Duboshin (1930), Berković e Gel'fgat (1975), Radzievskii e Gel'fgat (1957), Gel'fgat (1969), Dommanget (1963), Hadjidemetriou (1963, 1966a,b), Dvorak e Lichtenegger (1983), Lichtenegger (1984), Glikman (1976, 1978), Omarov (1975) e Gel'fgat e Omarov (1967), entre outros.

O método de interpretação do movimento relativo dos corpos de massa variável num campo gravitacional não estacionário como o de um movimento perturbado num campo estacionário é proposto por Hadjidemetriou (1963, 1966b). Ele demonstra que a perda isotrópica de massa num sistema binário age como uma força perturbativa  $\vec{P}$  proporcional ao ritmo de perda de massa  $\dot{\mu}$  e ao vector velocidade  $\vec{v}$

$$\vec{P} = -\frac{\dot{\mu}}{2\mu} \vec{v} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\ln \mu(t)] \dot{\vec{r}}.$$

Deste modo, Hadjidemetriou (1963) obtém as equações de Lagrange para o problema de dois corpos com perda isotrópica de massa e integra-as numericamente para a lei de Jeans utilizando um método de Runge-Kutta no caso elíptico. Além disso, utilizando relações aproximadas para as variações seculares do semieixo maior e da excentricidade, obtidas a partir das equações de Lagrange, demonstra que a excentricidade permanece secularmente constante, enquanto o semieixo maior aumenta secularmente.

Posteriormente expressa as equações do movimento em termos da anomalia excêntrica integrando as equações analiticamente em ordens sucessivas (Hadjidemetriou 1966b). Aliás, demonstra que a excentricidade é, no caso  $n = 3$ , uma função periódica da anomalia excêntrica, enquanto à segunda ordem apresenta oscilações de amplitude variável, crescente para  $n < 3$  e decrescente para  $n > 3$ , sendo constante para  $n = 3$ .

Baseando-se nos trabalhos de Hadjidemetriou, Guillaume (1974) realiza uma regularização do problema mediante as variáveis de Levi-Civita considerando uma lei de perda de massa linear e obtendo as soluções como séries de Poisson.

Verhulst (1969a) estuda as regiões do plano de fases onde o entorno das soluções do problema é totalmente diferente. Com esse fim analisa em primeiro lugar as soluções estacionárias do sistema para depois achar soluções aproximadas para o caso autónomo. Para  $n=3$  transforma o sistema de equações do movimento dado por Hadjidemetriou em autónomo mediante a transformação  $\tau = \frac{1}{2\alpha} \ln(1 + 2\alpha t)$ , estudando as soluções estacionárias nos casos elíptico e parabólico (Verhulst 1969b). Outros casos são abordados em Verhulst e Eckhaus (1970) e Van der Laan e Verhulst (1972); neste último, em particular, a transição de órbitas elípticas a hiperbólicas.

Finalmente, Verhulst (1975) aplica métodos de promédios para resolver o sistema de equações diferenciais do problema no caso das funções de Jeans.

São Correias e Ribera (1975) os primeiros em utilizar variáveis universais para regularizar o problema de massa variável. Eles mesmos fornecem um método para obter explicitamente a solução geral do sistema caracterizando as funções de variação de massa correspondentes.

Munier et al. (1981) obtêm soluções assintóticas utilizando métodos quase-invariantes. Para estudar o seu comportamento restringem-se ao caso  $\mu = \mu_0(1 + \Omega t)^n$  fazendo uso de duas transformações de renormalização. Finalmente, estudam as soluções assintóticas para os casos  $n \leq -1$ ,  $n = -1/2$  e  $-1/2 < n < 0$ .

Certas questões relativas à existência de integrais primeiros sob perturbações foram considerados por Luk'yánov (1983a,b), demonstrando que estes existem apenas para certas classes especiais de forças perturbativas.

### **A formulação hamiltoniana**

É Deprit (1983) o primeiro em estabelecer a formulação hamiltoniana do problema de dois corpos com massa variável em variáveis de Delaunay. Posteriormente, Deprit, Miller e Williams (1989) utilizam as variáveis de Lissajous dependentes do tempo no mesmo problema.

Lichtenegger (1984) considera um sistema de  $n$  corpos numa nuvem acreando matéria e representa as soluções mediante séries de Lie .

A formulação em variáveis canônicas mediante a aplicação de transformações tipo Delaunay generalizadas (no espaço 6-dimensional) e mapas tipo TR (no espaço de fase ampliado de 8 dimensões) é realizada por Floría (1997, 2001a,b,c). Em particular, são especialmente interessantes para o estudo do problema de Gyldén–Meščerskij a introdução do parâmetro gravitacional  $\mu$  como uma variável canónica (Floría 2003) e o tratamento de problemas quase-keplerianos (Floría 2006) com variáveis tipo Delaunay-Scheifele (Floría 1993, 2002).

### **A classificação de Razbitnaya**

Os numerosos casos físicos que o problema de Gyldén–Meščerskij envolve são classificados em base à equação diferencial geral do movimento relativo por Razbitnaya (1985). Ele enumera 22 casos da equação de Meščerskij do movimento relativo que se deriva a partir de (1.5). Estes dividem-se em dois grupos de problemas: o problema de dois corpos generalizado, com ambos os corpos movendo-se num sistema de referência inercial; e o problema de dois corpos confinado, com o corpo central em repouso no sistema inercial.

### Extensão de alguns resultados

Nos anos 90 analisam-se novas leis de variação de massa. Assim, Şelaru e Cucu-Dumistrescu (1992) trabalham com

$$\mu(t) = A + B \cos(ft + p),$$

sendo  $B \gg A$ ,  $p \in [0, 2\pi)$ ,  $A > 0$  e  $B$ ,  $f$  e  $p$  constantes; enquanto Bekov (1993) estuda a lei

$$\mu^{\frac{2}{3}}(t) = A + B [\text{sen}(at) + b],$$

com  $A$ ,  $B$ ,  $a$ , e  $b$  constantes.

A falta de rigorosidade em algumas aplicações da segunda lei de Newton aos problemas de massa variável é posta em destaque por Plastino e Muzzio (1992). Assim, enquanto Meščerskij ou Hadjidemetriou tomam correctamente:

$$\vec{F} = m(t) \frac{d\vec{v}}{dt},$$

outros autores utilizam incorrectamente a expressão

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}[m(t) \vec{v}] \tag{1.7}$$

que viola o princípio de relatividade sob transformações galileanas, já que de (1.7) se deriva

$$\vec{F} = m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}. \tag{1.8}$$

Efectivamente, quando  $\vec{F}$  é zero, da equação (1.8) deduz-se que a partícula permanecerá em repouso se a sua velocidade inicialmente era nula,

mas estará acelerada por uma força  $-\vec{v} \frac{dm}{dt}$  num sistema onde a partícula se está a mover com velocidade  $\vec{v}$ .

Na sua tese de doutoramento Prieto (1995) resolve o problema de dois corpos mediante o método de Hori–Deprit e a versão biparamétrica de Abad e Ribera (1984) para o caso  $n = 2$  da lei de Jeans obtendo a evolução temporal dos elementos orbitais (Prieto e Docobo 1997a,b).

A evolução do momento de inércia e da energia é obtida por Giordano e Plastino (1999) a partir de uma generalização da equação de Jacobi tendo em conta a lei de Jeans.

Nestes últimos anos publicaram-se diferentes trabalhos em que se estuda a perda de massa no problema restringido circular (Shrivastava e Ishwar 1983; Luk'yanov 1989, 1992) e elíptico (Das, Shrivastava e Ishwar 1988; Jha e Shrivastava 2001) de três corpos.

### 1.2.5 O problema da transferência de massa em sistemas binários

Ainda que não se pode situar propriamente no contexto do problema de massa variável, o problema de transferência de massa tem algumas características similares que justificam a sua inclusão nesta secção. Além disso, o seu estudo é fundamental, já que é o modelo idóneo para a análise orbital da maioria dos sistemas estelares binários fechados que apresentam tal fenomenologia (ver § 1.3).

São Huang (1956), Kruszewski (1963, 1964a,b) e Piotrowski (1964) os primeiros em estudar este problema. Calculam assim a variação do momento angular orbital e da energia do sistema para depois obter as correspondentes variações nos elementos orbitais.

Por outro lado, é Hadjidemetriou (1969a) quem estabelece pela primeira vez as equações do movimento a partir de uma lei de Meščerskiĭ modificada *ad hoc* para este problema. Ele utiliza um método de per-

turbações que lhe permite obter as variações periódicas e seculares dos elementos orbitais. Assumindo que a massa se transfere através do ponto de Lagrange  $L_1$  demonstra, para uma órbita quase circular, que a excentricidade permanece aproximadamente constante, enquanto o semieixo maior aumenta ou diminui, respectivamente, segundo a massa se transfira da estrela menos massiva à de maior massa ou em sentido oposto (Hadjidemetriou 1969b).

Recentemente, Regös, Bailey e Mardling (2005) provaram, mediante simulações hidrodinâmicas de partículas baseadas em aproximações analíticas que, para sistemas binários excêntricos ( $e \geq 0.5$ ) com a primária perto do periastro, apenas uma parte da massa se transfere pelo ponto de Lagrange  $L_1$ , enquanto o resto parece abandonar o sistema. Por outra parte, também observaram que, para sistemas ainda com maiores excentricidades, parte da perda de massa tem lugar através do ponto  $L_2$ .

## 1.3 O fenómeno de perda de massa estelar

### 1.3.1 Ventos estelares

É sabido que, tanto em forma de ventos estelares como por meio de outros mecanismos de perda de massa, uma estrela pode perder massa e momento angular de forma que a sua evolução estelar se veja fortemente afectada. Na Figura 1.1 mostra-se esquematicamente um vento estelar. A matéria sai da superfície da estrela puxada pela radiação arrefecendo-se e acelerando-se a medida que se afasta até deixar a estrela a grande velocidade.

Aliás, se esta estrela está gravitacionalmente ligada a uma ou mais estrelas acontece que a evolução orbital do sistema também resulta profundamente alterada. O processo é altamente não linear já que, pela sua vez, os mecanismos de perda de massa vêm-se influenciados pela rotação e pelos campos electromagnéticos. Todas as estrelas da sequência prin-

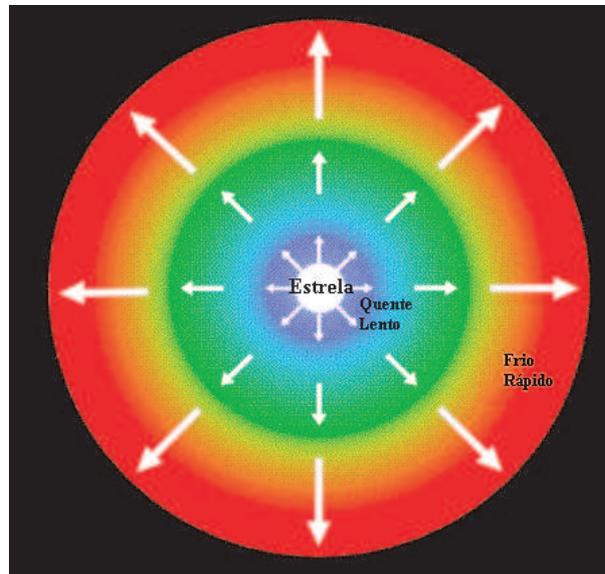


Figura 1.1: Esquema de um vento estelar.

principal perdem massa em forma de ventos estelares, mas este processo é especialmente intenso nas estrelas massivas .

Apesar de que a maioria das estrelas ejetam a sua massa mediante ventos estelares esfericamente simétricos, existem alguns tipos de estrelas que o fazem em forma de discos equatoriais. Estas são as estrelas rapidamente rotantes Be e Be supergigantes .

Actualmente as maiores dificuldades para compreender os mecanismos de perda de massa em estrelas massivas têm a ver com a sua dependência temporal e com a não esfericidade da perda de massa em objectos tais como as LBV e estrelas Wolf-Rayet .

### Ventos de estrelas frias

Os ventos tipo solar *quentes* são acelerados em extensas coroas a temperaturas maiores que  $10^6$  K e as estrelas que os sofrem têm perdas de massa de menos de  $10^{-12} M_{\odot}$  por ano.

Por outro lado, as estrelas frias evoluídas exibem cromosferas com temperaturas em redor dos 10 000 K e ventos com intensas perdas de massa de mais de  $10^{-7} M_{\odot}$  por ano.

Entre estas duas classes situam-se as estrelas com ventos híbridos que apresentam características a meio caminho entre as dos dois grupos anteriores.

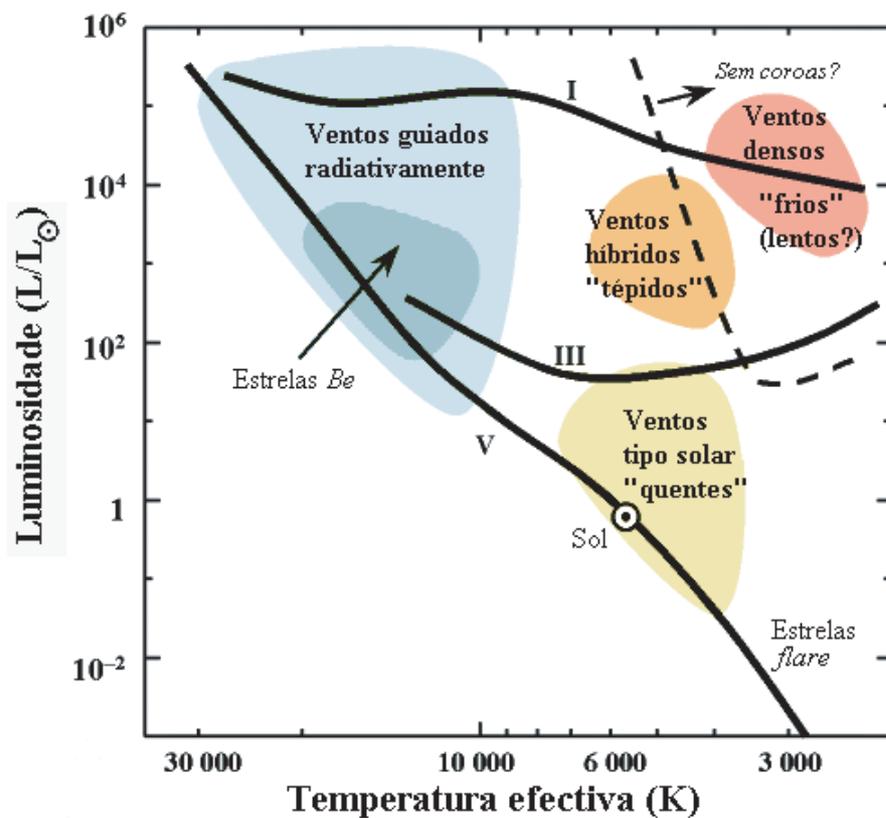


Figura 1.2: Diagrama HR onde se mostram as zonas com características do vento similares.

O diagrama HR da Figura 1.2 mostra uma classificação das estrelas em função da classe de vento estelar que possuem. Os ventos das estrelas frias aparecem divididos nas duas categorias unidas por uma possível região com características híbridas.

### Ventos de estrelas quentes

As estrelas quentes, apesar de ser menos numerosas, são um dos componentes galácticos mais interessantes já que, graças ao seu grande brilho, funcionam como candeeiros que permitem medir a distância a outras galáxias. Os seus ventos supersónicos injectam grandes quantidades de massa no meio intergaláctico. Por exemplo, uma estrela tipo O apresenta velocidades terminais, isto é, velocidades limite do vento a raio infinito, entre 1 000 e 3 000 km s<sup>-1</sup> e factores de perda de massa de entre 10<sup>-8</sup> M<sub>⊙</sub> e 10<sup>-5</sup> M<sub>⊙</sub>.

O estudo deste tipo de ventos estelares é muito importante por duas razões fundamentais:

- O material ejectado ao meio interestelar, além de contribuir à formação de novas estrelas, influi notavelmente na evolução da própria estrela. Neste sentido é preciso dizer que durante a sua fase de sequência principal a estrela pode chegar a perder um 50% da sua massa.
- A radiação da estrela não só libera energia, senão que transfere momento, por absorção e dispersão de fotões, às partículas de gás guiando assim o seu próprio fluxo supersónico.

#### VENTOS EM ESTRELAS RAPIDAMENTE ROTANTES

Nos últimos anos tem despertado grande interesse a evolução dos ventos em estrelas quentes e rapidamente rotantes dos tipos O, B ou Wolf-Rayet. Nestes casos os intensos ventos, guiados pela radiação, resultam afectados pelas forças centrífugas e de Coriolis. A rápida rotação deforma a própria estrela tal e como se observa na Figura 1.3 provocando a redistribuição da radiação emitida sobre a superfície distorcida, fenómeno que se tem dado em chamar escurecimento gravitacional. O efeito visível deste fenómeno é a diminuição do brilho nas zonas equatoriais e um incremento do mesmo nas zonas polares.

A rotação é um elemento muito importante para a compreensão dos fenómenos que originam e guiam a evolução dos ventos estelares. Dois

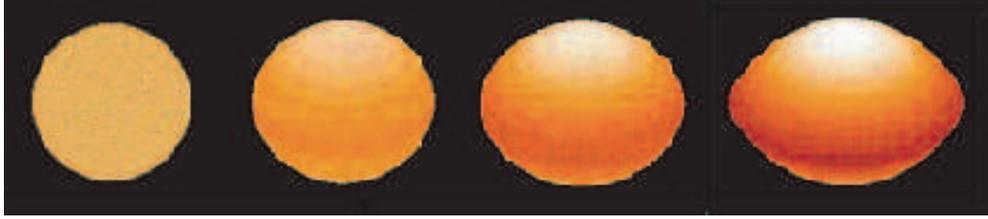


Figura 1.3: Estrela rotante tipo B a 0, 300, 400, e 487 km s<sup>-1</sup>. A intensidade da cor é proporcional ao fluxo superficial.

aspectos fundamentais em que a rotação influi no fluxo saliente de massa são (Cranmer 1996):

1. As forças centrífuga e de Coriolis desviam as linhas de corrente para o equador, aumentando a densidade e criando eventualmente um disco de vento comprimido no plano equatorial. Este parece ser o cenário em que se desenvolvem as chamadas estrelas Be.
2. O vento pode aumentar as perturbações axialmente não simétricas na fotosfera e criar estruturas co-rotantes no fluxo circum-estelar.

### Ventos em interação em sistemas binários

O estudo desta classe de ventos estelares em colisão é muito interessante por várias razões (Moffat 1998):

- Interesse intrínseco.
- Impõe restrições no valor provável dos elementos orbitais, em particular da inclinação orbital.
- Impõe restrições nos parâmetros do vento estelar: momento e velocidade do fluxo.
- Permite explicar emissões anómalas observadas em estrelas quentes.

Este fenómeno é especialmente importante em sistemas cujas componentes possuem intensos ventos estelares, classes O e especialmente estrelas WR.

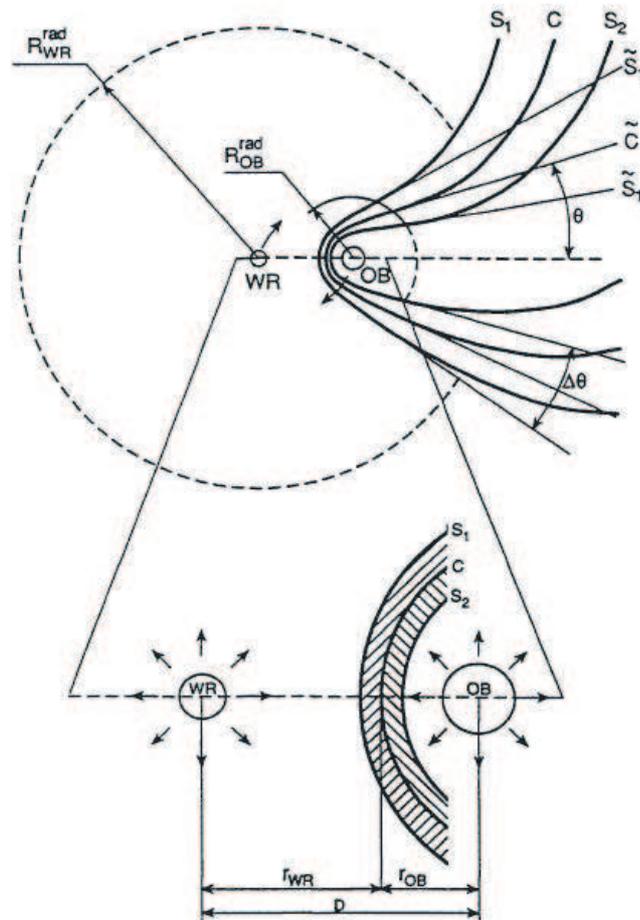


Figura 1.4: Esquema da zona de colisão vento-vento no plano orbital de uma binária WR+OB.  $S_1$  e  $S_2$  denota as ondas de choque e  $C$  é a superfície de contacto.  $R_{WR}^{rad}$  e  $R_{OB}^{rad}$  são os raios das rádio-fotoferas das componentes WR e O, respectivamente. Na parte inferior aparece ampliada a região de colisão dos ventos estelares (Usov 1995).

Num sistema binário típico WR+OB (Fig. 1.4) o parâmetro fundamental do ponto de vista da teoria de ventos em colisão é o momento do fluxo de cada vento (suposto um fluxo suave antes da colisão)

$$\rho v^2 = \frac{\dot{M}v}{4\pi r^2},$$

onde  $\dot{M}$  é a perda de massa,  $v$  a velocidade média,  $r$  a distância desde o centro da estrela e  $\rho$  a densidade. A superfície de contacto da colisão define-se em boa aproximação pelos lugares onde a componente normal à superfície de choque do momento do fluxo de cada vento é igual. A sua grossura será maior se o fluxo é adiabático e menor se o fluxo é isotermo, o que basicamente se corresponde com estrelas abertas e fechadas, respectivamente.

No caso mais geral de dois ventos diferentes, o cone de choque tenderá a envolver a estrela com o vento mais fraco com uma semi-abertura angular assintótica dada por

$$\theta \cong 120^\circ \left(1 - \frac{\eta^{\frac{2}{5}}}{4}\right) \eta^{\frac{1}{3}},$$

sendo

$$\eta = \frac{(\dot{M}v_\infty)_2}{(\dot{M}v_\infty)_1}$$

o quociente entre os momentos dos ventos e onde  $v_\infty$  é a velocidade terminal.

Recentemente foram propostas outras classes de modelos para estrelas simbióticas em que, em lugar de supor que existe um superfície de contacto entre os ventos em colisão, se considera a mistura do material ejetado (Kenny e Taylor 2005).

### Mecanismos de perda de massa

Existem diversos mecanismos pelos que os diferentes tipos de estrelas perdem massa mediante ventos estelares. Na Tabela 1.1 expõe-se um sumário das características dos mecanismos de perda de massa para estrelas não (rapidamente) rotantes (Lamers 1998).

Tabela 1.1: MECANISMOS DE PERDA DE MASSA PARA ESTRELAS NÃO (RAPIDAMENTE) ROTANTES.  $\dot{m}$  REPRESENTA A PERDA DE MASSA POR UNIDADE DE TEMPO ( $M_{\odot} \text{ANO}^{-1}$ ) E  $v_{\infty}$  A VELOCIDADE TERMINAL DO VENTO ESTELAR.

MECANISMOS E ESTRELAS	TIPOS	CARACTERÍSTICAS
VENTOS DE COROA Tipo solar Gigantes?	G , K	$\dot{m}$ baixa, $v_{\infty}$ alta
VENTOS GUIADOS POR LINHAS Estrelas quentes	O , B , A CPN , WD WR?	$\dot{m}$ alta, $v_{\infty}$ alta
VENTOS GUIADOS POR PÓ Supergigantes frias	M , AGB	$\dot{m}$ alta, $v_{\infty}$ baixa
VENTOS GUIADOS POR PULSAÇÕES Estrelas pulsantes frias	Mira , AGB?	$\dot{m}$ alta, $v_{\infty}$ baixa
VENTOS GUIADOS POR ONDAS ALFVÉN Estrelas frias com campos magnéticos	F , G , K , M	$\dot{m}$ baixa?, $v_{\infty}$ alta
VENTOS ROTANTES MAGNÉTICOS Rotadores rápidos magnéticos	T-Tauri , WR?	$\dot{m}$ alta, $v_{\infty}$ alta
VENTOS GUIADOS POR ONDAS SÓNICAS Estrelas com envoltórios convectivos	??	$\dot{m}$ baixa, $v_{\infty}$ baixa

### **Cronologia da investigação de ventos estelares**

Este campo da astrofísica estelar tem experimentado nos últimos anos um enorme desenvolvimento. Segundo Lamers e Cassinelli (1999) é possível estabelecer 5 estágios até chegar ao actual nível de conhecimento sobre este tema:

- 1° estágio (1572-1910) Estabelece-se que o fenómeno das novas indica que as estrelas ejectam massa e que tal ejeção pode ser detectada espectroscopicamente.
- 2° estágio (1913-1947) Desenvolve-se um diagnóstico sobre a perda de massa que leva a um relativamente bom conhecimento dos fluxos de material saliente das estrelas quentes e a uma compreensão básica das condições físicas na atmosfera solar externa.
- 3° estágio (1947-1967) Demonstra-se a perda de massa das gigantes frias e desenvolve-se o conceito de vento solar.
- 4° estágio (1967-1982) Avança-se rapidamente na compreensão dos ventos estelares graças à observação desde o espaço.
- 5° estágio (1980-actualidade) É a era da dependência temporal dos fenómenos envolvidos. Assim, efeitos tais como a rotação e a pulsação implicarão ventos estelares não esféricos e variáveis.

### **1.3.2 Cenários de perda de massa estelar**

#### **Estrelas desbocadas**

Uma estrela desbocada é uma estrela massiva, jovem (normalmente tipo O ou B) e quente que se desloca a grande velocidade pelo espaço.

Existem dois mecanismos para a produção de estrelas desbocadas: o cenário de sistemas binários com uma componente supernova (Blaauw

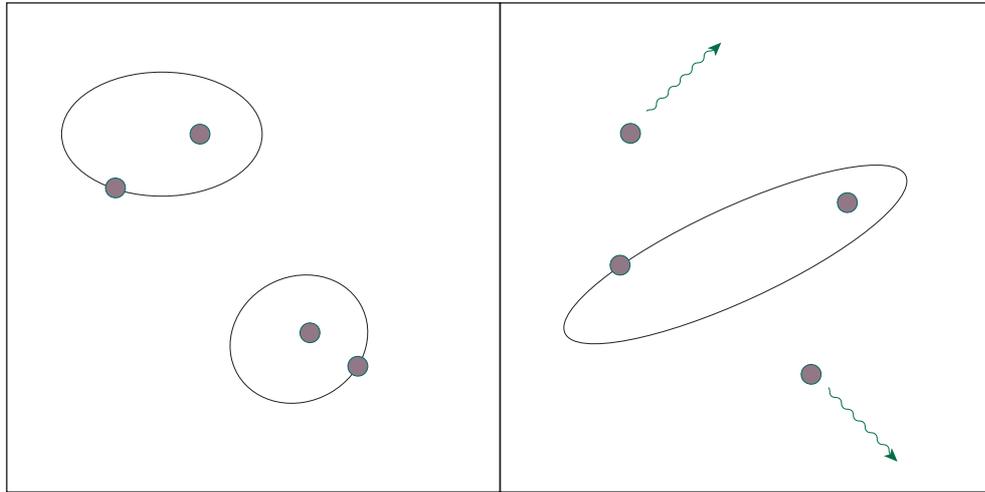


Figura 1.5: Diagrama de formação de uma binária excêntrica e ionização de duas estrelas (desbocadas) a partir de um sistema quádruplo.

1961) e o cenário de ejeção dinâmica (Poveda, Ruiz e Allen 1967; Gies e Bolton 1986). No primeiro tem lugar uma explosão de supernova num sistema binário fechado e massivo que eventualmente propulsa a estrela desbocada com uma velocidade comparável à sua velocidade orbital antes da explosão. No segundo, a energia necessária para aumentar a velocidade obtém-se por interacção dinâmica com uma ou mais estrelas. Um caso muito interessante é o do encontro entre dois sistemas binários que dá lugar a duas estrelas desbocadas e uma binária excêntrica (Hoffer 1983; Mikkola 1983) tal e como se representa na Figura 1.5.

### Estrelas AGB

As estrelas com massas menores de  $9 M_{\odot}$ , depois de passar vários milhares de milhões de anos a transmutar hidrogénio em hélio, entram na sua fase mais activa, a de estrela do Ramo Assintótico das Gigantes (AGB). Este último estágio começa quando a estrela, após passar a fase de gigante vermelha, atravessa o Ramo Horizontal (ver Fig. 1.6). Nesta altura possui um núcleo interno de carbono-oxigénio rodeado por duas camadas em que

se está a queimar hélio (interna) e hidrogénio (externa). Pela sua vez, estas camadas estão envolvidas por um envoltório fortemente convectivo.

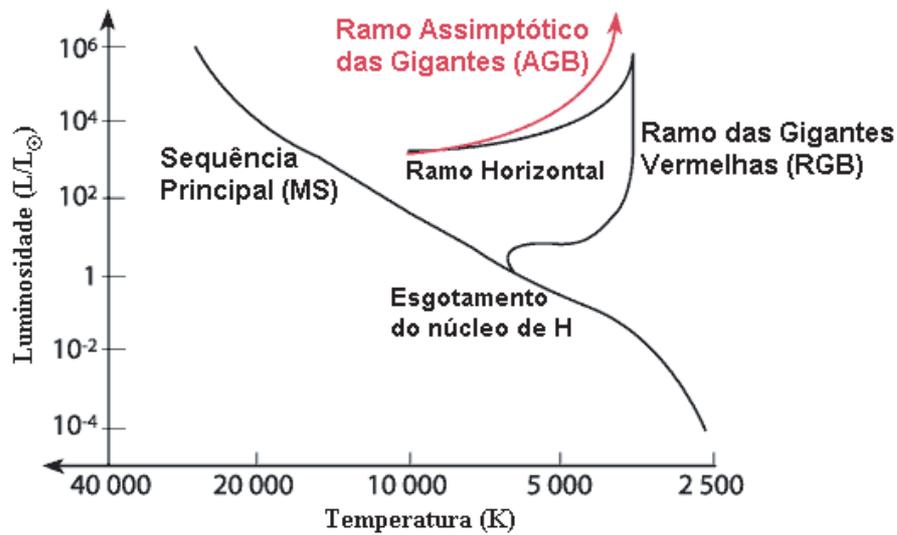


Figura 1.6: Evolução no diagrama HR de uma estrela AGB.

A sua evolução como AGB caracteriza-se por uma expansão que provoca um drástico aumento da luminosidade e uma diminuição da temperatura. Ao mesmo tempo o ritmo de consumo do combustível nuclear aumenta cada vez mais. Nesta situação de instabilidade são habituais importantes variações do brilho e do raio. Durante um máximo de  $10^6$  milhões de anos a estrela pode chegar a perder até  $10^{-4} M_{\odot}$  por ano com velocidades entre 5 e  $20 \text{ km s}^{-1}$ . Num estágio posterior (pós-AGB) forma-se um envoltório circum-estelar de poeira produzido pelo vento de partículas carregadas que a estrela emite.

Enquanto para uma estrela AGB solitária a sua evolução vem determinada pela massa inicial, no caso dos sistema binários fechados haverá outro factor fundamental: o tamanho do lóbulo de Roche (Fig. 1.7), o qual depende da razão entre as massas das duas componentes e da distância entre os seus centros de massas.

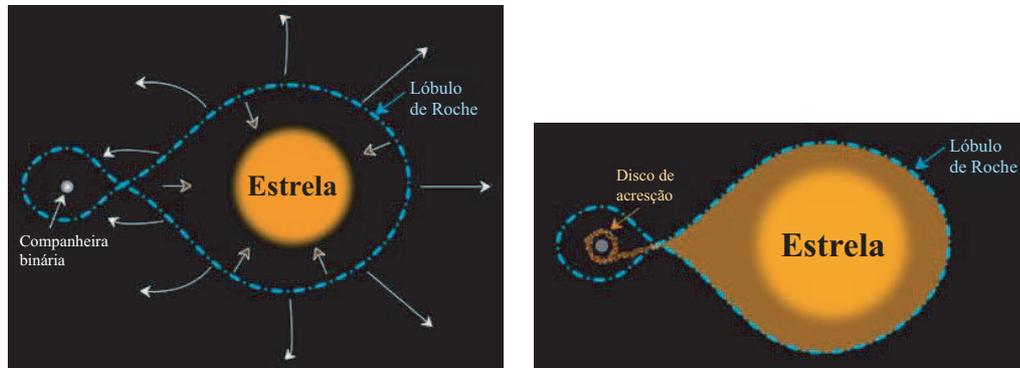


Figura 1.7: Lóbulos de Roche num sistema binário com transferência de massa.

A estrela mais massiva do par evolui mais rapidamente na fase de AGB e enche o seu lóbulo de Roche. Uma vez que as camadas externas excedem a superfície do lóbulo de Roche este material fica gravitacionalmente governado pela companheira menos massiva. Devido ao momento angular deste material forma-se um disco de acreção. Este mecanismo de transferência de massa denomina-se acreção de massa por transbordamento do lóbulo de Roche (RLOF).

Esta transferência de massa influi directamente na separação entre ambas as componentes. Se a massa não abandona o sistema, então há conservação da energia e do momento angular. Isto tem como consequência que a distância entre as duas estrelas diminua, ao tempo que o lóbulo de Roche da estrela mais massiva se reduz, o qual provoca um incremento da sua perda de massa. Por outra parte, a medida que a outra estrela se torna a mais massiva a distância entre as componentes volta a aumentar.

No entanto, frente ao mecanismo de transferência de massa RLOF existe outro mecanismo de perda-transferência de massa que é o de acreção de massa mediante ventos estelares. A principal diferença é que, enquanto o primeiro é quase-conservativo, o segundo apenas transfere uma pequena percentagem de toda a massa ejetada pela estrela mais massiva. Aliás, tudo parece indicar que o RLOF está associado a sistemas circularizados induzidos pelas intensas forças de maré, enquanto a acreção por ventos estelares seria o único mecanismo em sistema não circularizados.

A respeito da existência de sistemas com órbitas excêntricas com uma das componentes sendo uma estrela gigante evoluída tipo AGB, Soker (2000) propôs que a relativa alta excentricidade ( $0.1 \lesssim e \lesssim 0.4$ ) poderia estar provocada por um incremento da perda de massa durante as passagens pelo periastro.

### **Estrelas T-Tauri**

As estrelas T-Tauri são uma classe de estrelas jovens ( $\sim 10^5$ – $10^7$  anos) de baixa massa (menos de  $3 M_{\odot}$ ) e baixa temperatura (tipos espectrais G, K e M), que recebem o nome do protótipo T Tau, descoberto por Joy (1945). Situam-se por cima da sequência principal no diagrama HR e representam o estágio evolutivo mais precoce que é visível no óptico.

Costumam dividir-se em dois grandes tipos segundo as suas características espectroscópicas que, pela sua vez, dependem das propriedades do disco: T-Tauri clássicas e T-Tauri de linha fraca. As primeiras possuem extensos discos que produzem intensas linhas de emissão, enquanto as segundas apresentam discos muito difusos ou inexistentes.

Como a maioria das estrelas da pré-sequência principal, as estrelas T-Tauri num intervalo de separações entre 1 e 150 UA amostram uma frequência de companheiras binárias significativamente maior que a que se observa para estrelas similares da sequência principal (Duquennoy e Mayor 1991). Normalmente, os discos circum-estelares individuais em redor das estrelas (Fig. 1.8) vêm-se truncados pela presença de uma companheira, ao tempo que se desenvolve um disco em redor do sistema binário completo (Lubow e Artymowicz 1996).

Os seus ventos estelares são muito intensos. Estima-se que o ritmo de perda de massa está entre  $10^{-8}$  e  $10^{-10} M_{\odot}$  por ano, enquanto o ritmo de acréscimo de massa, correlacionado com o anterior e superior num factor 100, varia entre  $10^{-6}$  e  $10^{-8} M_{\odot}$  por ano.

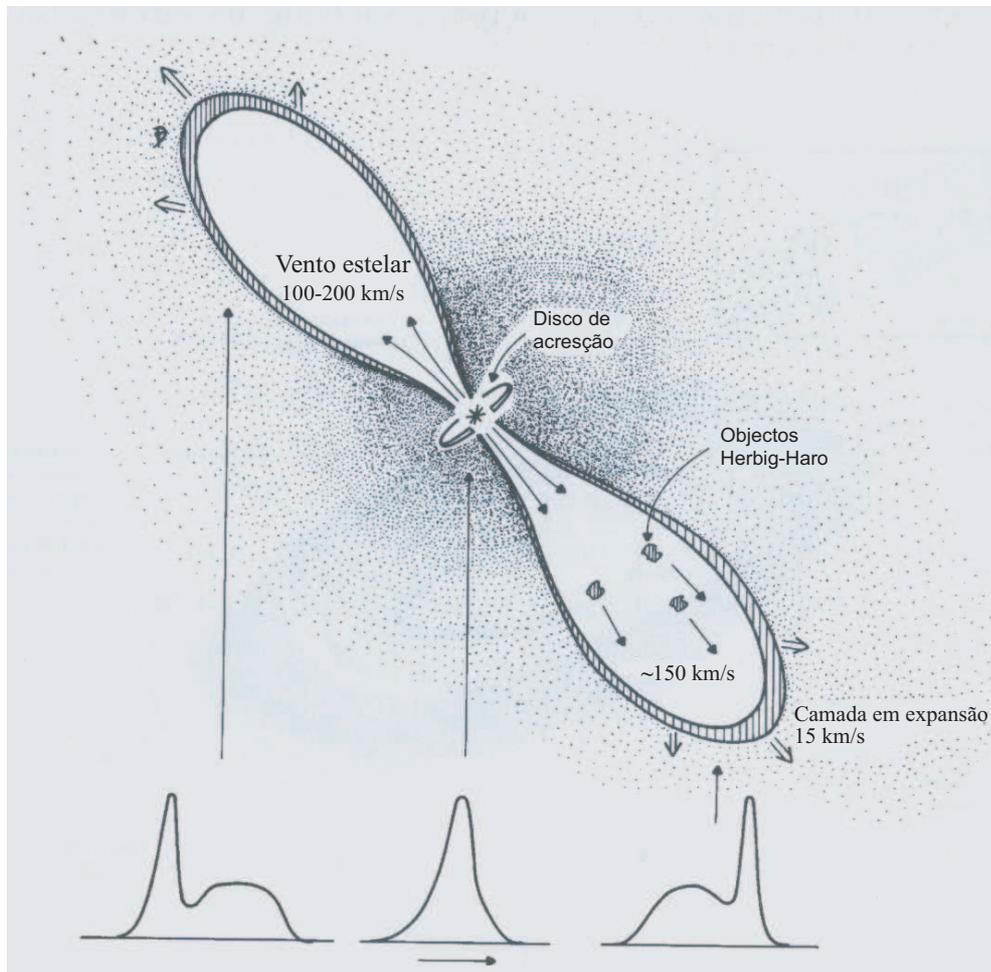


Figura 1.8: Esquema de detecção do disco de acreção e da camada em expansão de uma estrela T-Tauri.

Nos sistemas binários interactuantes a massa é transferida entre as componentes, via ventos estelares ou mediante transbordamento da massa do lóbulos de Roche de uma estrela pelo ponto de Lagrange interno  $L_1$ . No caso de que as primárias não possuam campos magnéticos ou estes sejam muito fracos, a massa não cairá directamente na outra estrela de maneira que se formará um disco de acreção. Em caso contrário, se a estrela que ganha massa possui um intenso campo magnético, este poderá total ou parcialmente inibir a formação do disco de acreção.

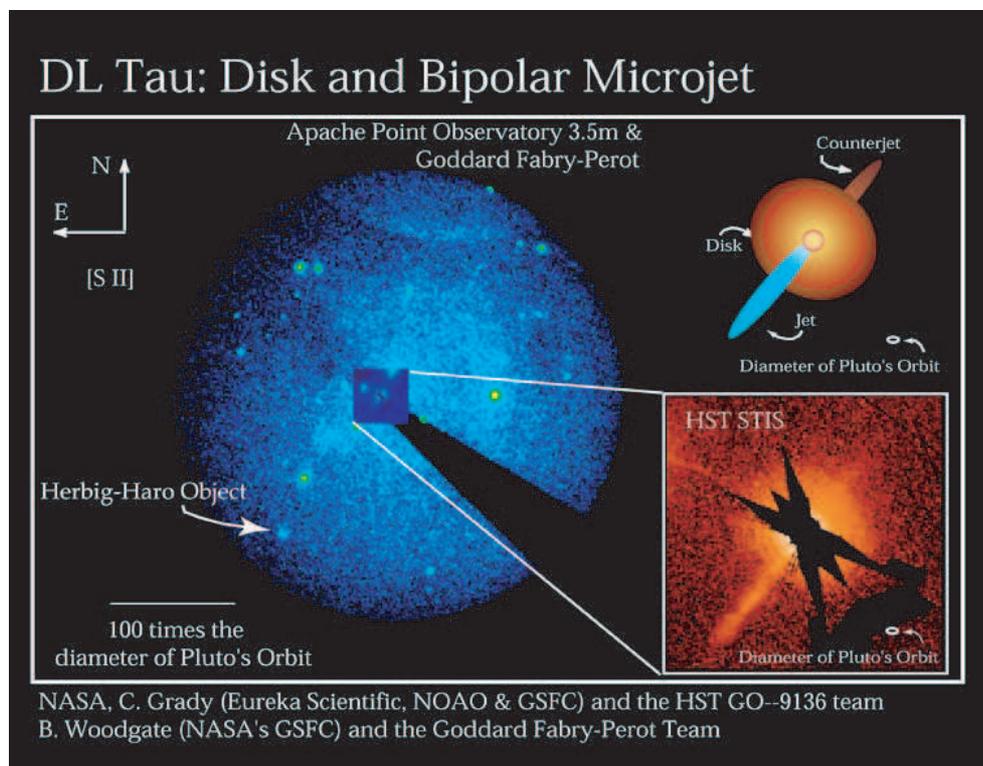


Figura 1.9: Imagem do disco de acreção e do jacto bipolar no sistema DL Tau [créditos na imagem].

Eventualmente também se podem formar os denominados objectos Herbig–Haro (HHO), isto é, nebulosidades que nascem da excitação por choques da energia liberada por estrelas da pré-sequência principal e o gás interestelar ou inclusive anteriores ejeções da própria estrela (Figs. 1.8 e 1.9).

O estudo deste tipo de sistemas é, na actualidade, uma das linhas de investigação principais do Observatório Astronómico R.M. Aller. Segundo o modelo actual, as estrelas T–Tauri representam a fase mais prematura na cadeia de evolução T Tau–UV Ceti–RS CVn. A transição entre estas fases não está bem definida e, portanto, tampouco a sua classificação; porém, sim se sabe que uma das diferenças mais significativas está na sua massa, a qual unicamente se pode determinar directamente mediante o cálculo das

suas órbitas em sistemas binários (Tamazian et al. 2002; Woitas et al. 2003; Tamazian 2004).

Nos últimos anos tem-se abordado o estudo de um conjunto de estrelas variáveis com componentes de tipos tardios cuja variabilidade era suspeita devido a diferenças na grandeza de mais de 0.5 unidades em diferentes épocas de observação. De 18 estrelas observadas descobriram-se 5 novas estrelas variáveis, entre as quais destaca a COU 14 (Docobo, Tamazian e Melikyan 1999), provavelmente um estrela T-Tauri que mostrou numerosos erupções (pertencente às denominadas estrelas *flare*). Em outro sistema detectou-se uma polarização de quase o 4%, o qual representa uma clara evidência da existência de um disco em redor dela.

### Estrelas LBV

A Variáveis Luminosas Azuis (LBV) são estrelas massivas durante um breve, mas violento, estágio evolutivo da pós-sequência principal. Durante aproximadamente  $10^5$  anos perdem as camadas externas que lhe restam, ricas em hidrogénio, antes de se converterem em estrelas Wolf-Rayet. Uma das suas características mais destacáveis é o facto de sofrerem, numa escala de anos, explosões (denominadas ‘típicas’ ou ‘tipo S Doradus’) que produzem variações no brilho de entre 1 e 2 grandezas. Durante estes ciclos de variabilidade a estrela desloca-se horizontalmente no diagrama HR expandindo o seu raio e mantendo constante a luminosidade. No mínimo de brilho a estrela é relativamente quente ( $\sim 20\,000 - 30\,000$  K) e pequena, enquanto no máximo é relativamente fria ( $\sim 8\,000$  K) e grande.

Estas variações do raio até num factor 10, apesar de serem pouco conhecidas, parece que não estão relacionadas com a perda de massa, quantificada entre  $10^{-4}$  e  $10^{-6} M_{\odot}$ . Os ciclos de variabilidade da perda de massa também não são bem conhecidos. Por outra parte, embora se disponha de recentes modelos de ventos guiados para estrelas normais tipo O e B que estabelecem um comportamento monótono da perda de massa com a temperatura efectiva, é de esperar que a perda de massa nas estrelas



Figura 1.10: Comparação de tamanhos entre a estrela mais grande e luminosa conhecida, a LBV 1806-20 e o Sol. A sua massa, se ela é realmente uma estrela simples e não um sistema múltiplo, é de ao menos  $150 M_{\odot}$ , com um raio de  $200 R_{\odot}$  [créditos na imagem].

LBV difira da das estrelas normais O e B. Isto justifica-se fundamentalmente pelo facto de as LBV estarem mais evoluídas e terem, portanto, uma massa menor (Vink e de Koter 2002).

### Estrelas Wolf–Rayet

São um tipo de estrelas peculiares identificadas por C.J.E. Wolf e G. Rayet em 1867. Podem-se reconhecer facilmente pelo seu espectro já que, a diferença das estrelas normais, este está dominado por amplas linhas de emissão. Dividem-se em três classes:

- **WN:** Amostram linhas de emissão de hélio e nitrogénio, embora também possam aparecer carbono, silício e hidrogénio.

- **WC:** Apresentam um espectro caracterizado pelo domínio das linhas de emissão de carbono e hélio, estando ausentes as de hidrogénio e nitrogénio.
- **WO:** Muito menos comuns que as anteriores, são similares às WC excepto que as linhas de oxigénio são mais destacadas.

Situam-se nos braços espirais da galáxia e perto das regiões HII. A sua massa está compreendida entre 5 e 60  $M_{\odot}$  (a média é aproximadamente de 20  $M_{\odot}$ ), enquanto a sua temperatura superficial varia de 25 000 a 100 000 K. Pela sua associação com estrelas tipo O e pelas peculiares abundâncias observadas na sua superfície, acredita-se que descendem destas.

Sabe-se que sofrem perdas extremas de massa, geralmente de mais de  $10^{-5} M_{\odot}$  por ano, mediante potentes ventos estelares que são acelerados desde a superfície até velocidades terminais que variam desde 800 a mais de 3 000  $\text{km s}^{-1}$ .

Aproximadamente o 50% das estrelas WR estão em sistemas binários. Diferenciam-se três classes de agrupações:

- WR + OB.
- WR + WR.
- WR + objecto compacto (estrela de neutrões ou buraco negro).

Massey (1981) sugeriu que apenas as associações O+O mais massivas evoluem a sistemas WR+O, de maneira que a transferência de massa parece não ser relevante, ao menos nos sistemas de longo período.

A sequência evolutiva das estrelas massivas ( $M \gtrsim 15 M_{\odot}$ ) poderia ser a seguinte (Maeder e Meynet 1987):

$M \gtrsim 50 M_{\odot}$ :

$O \rightarrow OIf \rightarrow BSG \rightarrow LBV \rightarrow WN \rightarrow WC \rightarrow \textit{supernova}$

$50 M_{\odot} \gtrsim M \gtrsim 35 M_{\odot}$ :

$O \rightarrow BSG \rightarrow YSG \rightarrow RSG \rightarrow WN \rightarrow WC \rightarrow \textit{supernova}$

$15 M_{\odot} \gtrsim M$ :

$O \rightarrow RSG \rightarrow \textit{supernova}$

onde BSG, YSG e RSG denotam supergigante azul, amarela e vermelha, respectivamente.

Estes esquemas não são definitivos já que não se conhecem bem certos aspectos que têm a ver com a massa inicial e a composição, e isso sem considerar a influência da duplicidade do sistema, da rotação e dos campos magnéticos. De facto, ao longo de tempo têm sido propostas outras sequências evolutivas.

As estrelas Wolf-Rayet mostram potentíssimos ventos estelares em colisão para os quais, nos últimos anos, tem sido possível elaborar modelos de rádio-emissão (Dougherty et al. 2003a,b; Pittard et al. 2006) a partir de observações de alta resolução (Dougherty et al. 2005). Um sistema protótipo nesta classe de estudo é o da WR 140 (Fig. 1.11).

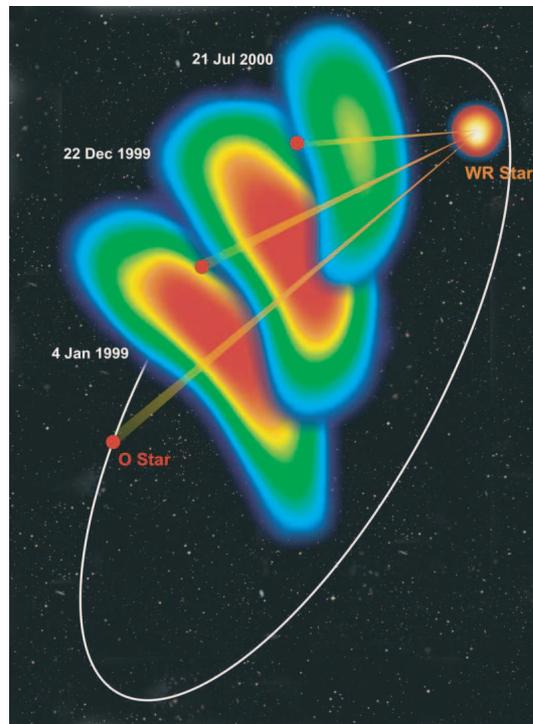


Figura 1.11: Movimento na região de colisão do sistema WR 140 (Dougherty et al. 2005).

### Novas Clássicas

As Novas Clássicas (CN) pertencem à classe das denominadas variáveis eruptivas (CV) e caracterizam-se por sofrer uma única erupção. São sistemas binários fechados formados por uma anã branca e uma estrela da sequência principal que giram em redor do seu centro de massas com um período de menos de 12 horas. Devido à intensa força gravitacional da anã branca, parte do material rico em hidrogénio da sua companheira é arrastado para um disco de acreção. Quando parte deste se deposita na superfície da anã branca tem lugar um aumento da pressão e da temperatura que originam uma explosão termonuclear. A energia liberada ejetta o seu envoltório de hidrogénio não queimado a  $1\,500\text{ km s}^{-1}$  produzindo um incremento de 6 ou 9 magnitudes (Fig. 1.12).

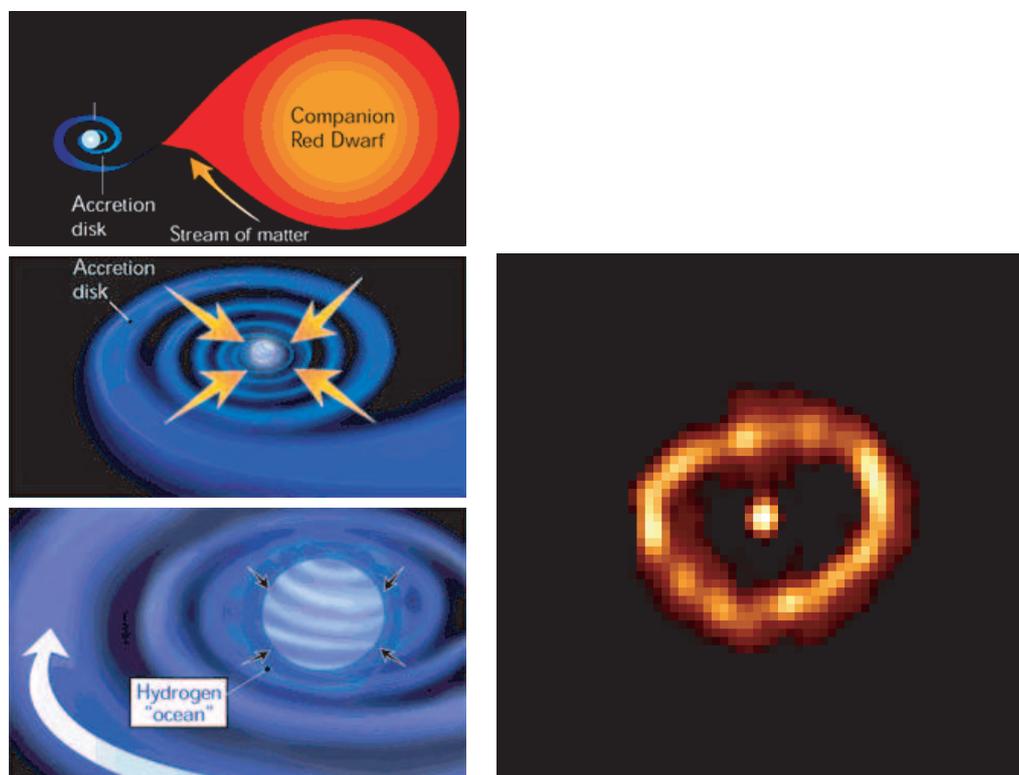


Figura 1.12: Esquerda: Esquema de evolução de uma nova clássica. Direita: Imagem do hidrogênio não queimado que é rapidamente expulso no sistema Nova Cygni 1992 (Paresce et al. 1995).

É possível que todas as CN sejam em realidade novas recorrentes (RN), isto é, novas nas quais se observaram mais de uma explosão. Tal assimilação sustentar-se-ia no facto de que, enquanto as RN apresentam períodos de recorrência entre 10 e 100 anos, se estima que o período entre sucessivas explosões varia entre os 30 000 anos para uma anã branca de  $1.3 M_{\odot}$  e os 100 000 anos para uma anã branca de  $0.6 M_{\odot}$ .

Do ponto de vista da dinâmica orbital do sistema, Edwards e Pringle (1987) sugeriram que tal explosão poderia produzir um aumento da excentricidade do sistema binário. Inclusive, uma cuidadosa observação permitiria detectar e medir a escala de tempo em que os efeitos de maré provocam a posterior circularização.

## 1.4 A 'Hipótese dos Grandes Números'

Que o parâmetro gravitacional  $\mu$  seja variável pode interpretar-se de duas formas: tal e como se fiz em § 1.2, isto é, supondo que o que realmente varia é a massa do sistema, ou bem que a variável é a *constante* gravitacional newtoniana  $G$ . Porém, do ponto de vista conceptual ambas interpretações são muito diferentes, sobretudo pelas conotações cosmológicas desta última.

As motivações para considerar que a constante gravitacional de Newton varia são diversas. Assim, foi Milne (1933) quem no intuito de propor uma teoria da gravitação com dois tempos padrão, um para processos gravitacionais e outro para os atômicos, predisse que  $G \propto t$ . Porém, uma das propostas mais sugestivas quanto às suas implicações é a denominada 'Hipótese dos Grandes Números' de Dirac (1937, 1938), isto é, a de que a existência de determinados grandes números adimensionais ( $\sim 10^{39}$ ) que aparecem em certas combinações das constantes físicas e de algumas quantidades cosmológicas não é uma casualidade, senão uma manifestação de uma relação subjacente entre elas.

Esta relação requer que  $e^2 G^{-1} m_N$  (onde  $e$  é a carga do electrão,  $m_N$  a massa do protão e  $G$  a constante gravitacional) varie linearmente com o tempo. Assim, Dirac propõe que tal relação estaria dada por  $G \propto t^{-1}$ .

Considerando a proposta de Dirac (1938), Vinti (1974) dá uma solução exacta para o problema de dois corpos para órbitas quase-elípticas tomando

$$G(t) = \frac{A}{k + t'} \quad (1.9)$$

onde  $t$  é a idade do Universo e  $A$  e  $k$  são duas constantes universais ( $k$  introduz-se para evitar singularidades na solução).

Num trabalho posterior (Vinti 1977) formula uma cosmologia newtoniana com a constante gravitacional variável segundo (1.9). A conclusão

mais importante é que este modelo cosmológico corresponde ao de um universo aberto.

Posteriormente também se realizam generalizações de cosmologias newtonianas das que se obtêm universos acelerados com  $G \propto t^{-n}$ .

Restringindo-nos à gravitação newtoniana<sup>1</sup>, a equivalência entre o problema gravitacional de Newton com  $G$  dependente do tempo e o problema de massa variável (com  $G$  constante) tem sido considerada, entre outros, por Savedoff e Vila (1964), Vinti (1974), Saari (1977) e McVittie (1978); e mais recentemente, no contexto da mecânica relativista, por Duval, Gibbons e Horváthy (1991).

## 1.5 Algumas novas contribuições ao problema

### 1.5.1 Reinterpretação da lei de Jeans

#### A teoria de Eddington e a conjectura de Jeans

Em 1924 Eddington publicou um artigo em *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (MNRAS) intitulado “On the Relation between the Masses and Luminosities of the Stars” no qual se recolhia o que actualmente se denomina teoria de Eddington da estrutura interna das estrelas. A partir dela deduzia-se uma surpreendente relação entre a massa e a luminosidade de uma estrela.

Esta teoria recebeu uma dura crítica de Jeans (1925a) quem, no intuito de reabilitar a teoria da evolução estelar da sequência gigante-anã, chegou a afirmar:

“... it is found that there is no general relation between the masses and luminosities of the stars —the supposed “mass–luminosity” law disappears entirely as a theoretical law, so that

---

<sup>1</sup>Nas teorias tensoriais da gravitação também é possível definir uma variação similar.

a star of given mass can always adjust itself to radiate energy at any rate which happens to be required by the generation of energy in its interior.”

Segundo Jeans, uma estrela evoluiria deslocando-se livremente sobre o diagrama massa–luminosidade, de maneira que seria altamente improvável que seguisse precisamente a curva definida pela relação estabelecida por Eddington. Esta crítica foi contundentemente contestada por Eddington (1925) e, embora Jeans voltou a insistir num artigo posterior (Jeans 1925b), finalmente a discussão ficou aí, vindo a teoria de Eddington a marcar o caminho para posteriores estudos no campo da astrofísica estelar.

Mas voltando ao começo desta história, é pouco depois de Eddington publicar o seu famoso artigo inicial quando Jeans (1924) publica na mesma revista (MNRAS) o trabalho intitulado “Cosmogonic problems associated with a secular decrease of mass”. Nele estabelece a sua conhecida lei de perda de massa conjecturando que existe certa relação entre a energia da radiação estelar emitida por uma estrela e a sua perda de massa. Curiosamente, neste artigo, que é prévio a polémica descrita anteriormente, Jeans justifica a sua conjectura referindo-se ao artigo de Eddington (1924):

“This conjecture has gained enormously in probability since Eddington has shown that, as a matter both of theory and of observation, the radiation from a star is approximately a function only of the star’s mass.”

Sem entrar em detalhes sobre o mecanismo exacto que produz a perda de massa, Jeans supõe que, segundo a teoria da relatividade de Einstein (1905), se uma energia  $E$  escapa como radiação, a estrela deve perder uma massa equivalente  $\frac{E}{c^2}$ , sendo  $c$  a velocidade da luz. Deduz que a emissão total de radiação  $L$  está ligada à perda de massa mediante

$$L = -c^2 \frac{dm}{dt}. \quad (1.10)$$

Por outra lado, baseando-se na teoria de Eddington, sabe que a emissão  $L$  de uma estrela é proporcional a uma certa potência da sua massa

$$L \propto m^n. \quad (1.11)$$

TABLE I.								
<i>Mass and Absolute Magnitude (<math>\mu=2.11, T_e=5200^\circ</math>).</i>								
$r-\beta$ .	M.	$m$ .	$r-\beta$ .	M.	$m$ .	$r-\beta$ .	M.	$m$ .
'001	'1284	14'143	'04	'879	5'211	'26	3'774	-0'052
'0015	'1574	13'173	'05	1'004	4'645	'28	4'137	-0'312
'002	'1820	12'484	'06	1'123	4'178	'30	4'529	-0'562
'0025	'2036	11'950	'07	1'240	3'777	'35	5'675	-1'156
'003	'2233	11'513	'08	1'354	3'426	'40	7'117	-1'718
'004	'2583	10'823	'09	1'468	3'111	'45	8'984	-2'264
'005	'2895	10'286	'10	1'582	2'825	'50	11'46	-2'805
'006	'3176	9'848	'12	1'812	2'322	'55	14'84	-3'354
'008	'3683	9'154	'14	2'050	1'884	'60	19'62	-3'919
'010	'4135	8'615	'16	2'297	1'494	'65	26'66	-4'516
'015	'5117	7'632	'18	2'557	1'138	'70	37'67	-5'162
'02	'5968	6'929	'20	2'831	0'812	'75	56'15	-5'882
'025	'6739	6'381	'22	3'124	0'507	'80	90'63	-6'714
'03	'746	5'929	'24	3'437	0'220			

Add to  $m$  the temperature-term,  $-2 \log_{10}(T_e/5200)$ .

Figura 1.13: Tabela de massas e magnitudes absolutas obtidas por Eddington (1924).

A partir da Tabela de massas e magnitudes absolutas que Eddington tinha obtido (ver Fig. 1.13), Jeans estabelece que para estrelas muito massivas  $n \approx 1.4$  e para estrelas de massa muito baixa  $n \approx 4.4$ , enquanto para estrelas com massas intermédias o expoente variará entre 1.4 e 4.4. Em particular, para um amplo intervalo com magnitudes entre 1 e  $-5$ , verifica-se  $n \approx 3$ . De maneira geral, tendo em conta (1.10) e (1.11), estabelece a lei já definida em § 1.2.2

$$\dot{m} = -\alpha m^n,$$

conhecida como lei de Jeans<sup>2</sup>, onde  $n$  é o expoente na relação de massa–luminosidade e  $\alpha$  é um pequeno parâmetro, em princípio, constante. A hipótese de um  $\alpha$  variável já tinha sido apontada por Jeans (1924) associando-a ao tipo de lei matemática de perda de massa. Do ponto de vista astrofísico, Wood et al. (2002) têm sugerido que, como a actividade decresce com a idade, é de esperar que a perda de massa também diminua com o tempo. Em particular, para estrelas tipo solar, sugeriram uma variação dada pela lei de potências

$$\dot{M} \propto t^{-2.00 \pm 0.52}.$$

Aplicada ao caso do Sol suporia que o seu vento estelar no passado longínquo teria sido 1 000 vezes mais massivo que o actual.

### O expoente $n$ e a relação massa–luminosidade empírica

Os valores de  $n$  que Jeans assumiu para a sua lei de perda de massa baseiam-se na relação de massa–luminosidade descoberta por Eddington que se mostra na Figura 1.14.

Assim, estabeleceu um intervalo de valores possíveis em função da massa da estrela. No entanto, da mesma Figura 1.14 se conclui que o ajuste para massas maiores de  $3 M_{\odot}$  foi realizado exclusivamente a partir de estrelas fora da sequência principal, nomeadamente Cefeidas e binárias eclipsantes. Respeito à zona de baixas massas falaremos de seguido.

Do ponto de vista actual, a característica essencial das estrelas pertencentes à sequência principal é o facto de estarem numa fase análoga do seu desenvolvimento e possuírem, portanto, estruturas internas similares. Nesta fase evolutiva a massa determina a produção de energia no interior, alcançada mediante a fusão de hidrogénio em hélio, que pela sua vez determina a luminosidade da estrela. Neste contexto observa-se que durante

---

<sup>2</sup>Também referida habitualmente na literatura como lei de Jeans–Eddington ou, mais geralmente, como lei de Eddington–Jeans.

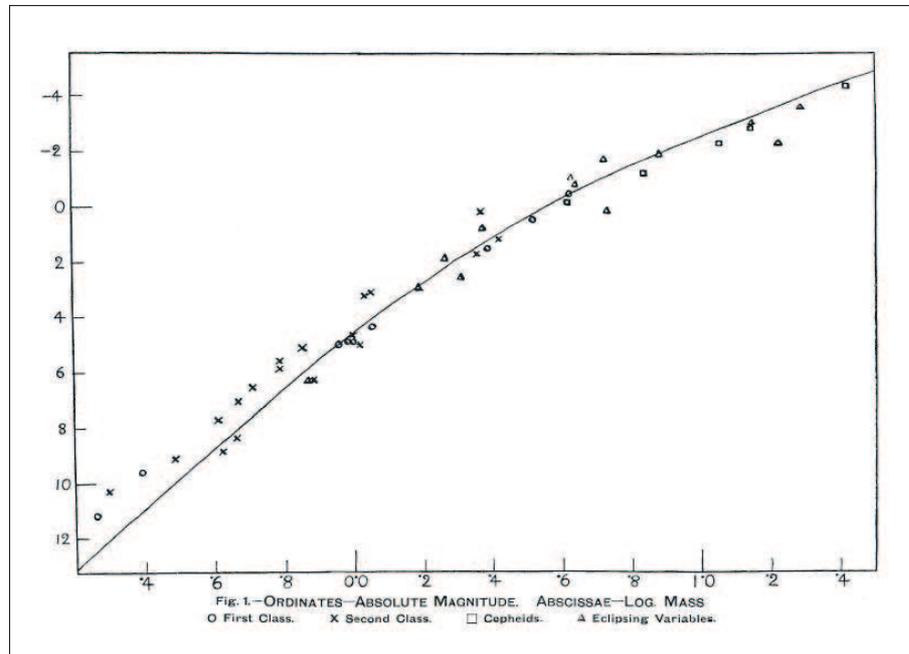


Figura 1.14: Relação de massa–luminosidade teórica frente às observações obtida por Eddington (1924).

a fase de sequência principal é verificada a chamada relação de massa–luminosidade. O ajuste que se mostra na Figura 1.15 foi realizado por Pogge (2006) a partir de 121 estrelas binárias para as quais se conhecem com suficiente certeza as suas massas (Popper 1980). Numa primeira aproximação pode-se ajustar uma função

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^4,$$

embora um ajuste mais preciso, válido para  $M > 0.4 M_{\odot}$ , dá um expoente de  $3.92 \pm 0.04$  (Pogge 2006).

Outros autores (Unsöld e Baschek 2001) fornecem, para estrelas com  $M \gtrsim 0.2 M_{\odot}$ , a fórmula empírica

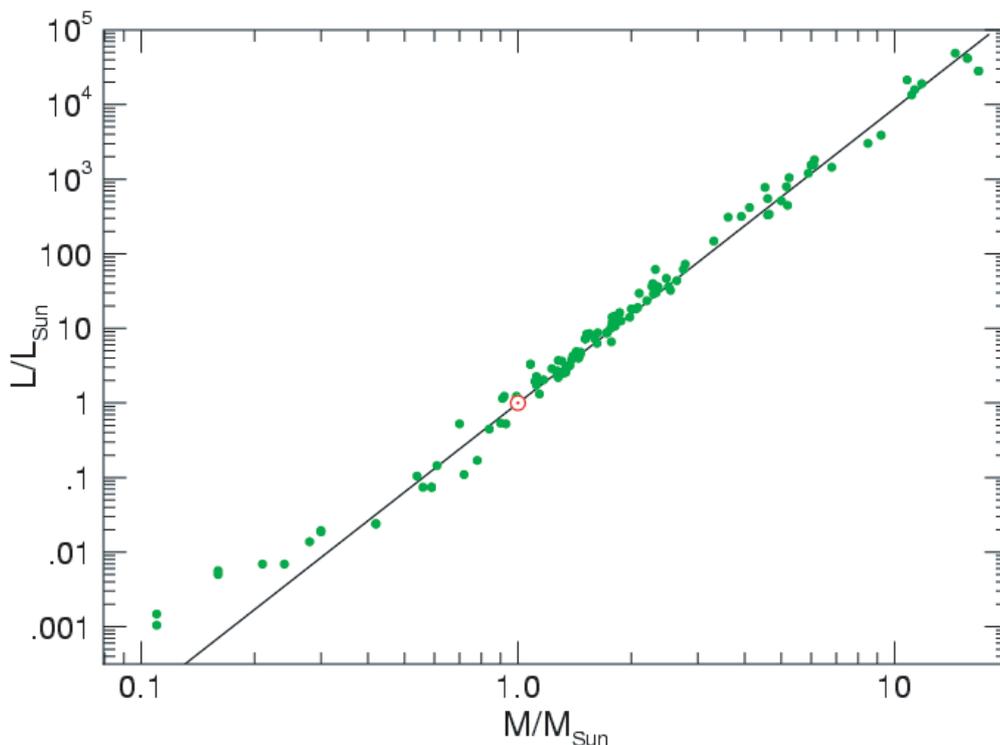


Figura 1.15: Relação de massa–luminosidade empírica. O círculo vermelho representa a posição do Sol (Pogge 2006).

$$\log \frac{L}{L_{\odot}} = 3.8 \log \frac{M}{M_{\odot}} + 0.08.$$

Mesmo é possível aproximar relações com pendentes menores (Schatzman e Praderie 1993) para estrelas com massas baixas,  $n \sim 2.5$ , e para estrelas muito massivas,  $n \sim 1$ .

Esta relação não é verificada nem pelas anãs brancas nem pelas estrelas gigantes e supergigantes, situadas na parte inferior e superior, respectivamente, do diagrama HR (ver Fig. 1.16). Assim, as primeiras apresentam uma massa média de  $0.58 M_{\odot}$ , enquanto as últimas, situadas em caminhos evolutivos relativamente diferentes, possuem uma massa média de  $1.1 M_{\odot}$ .

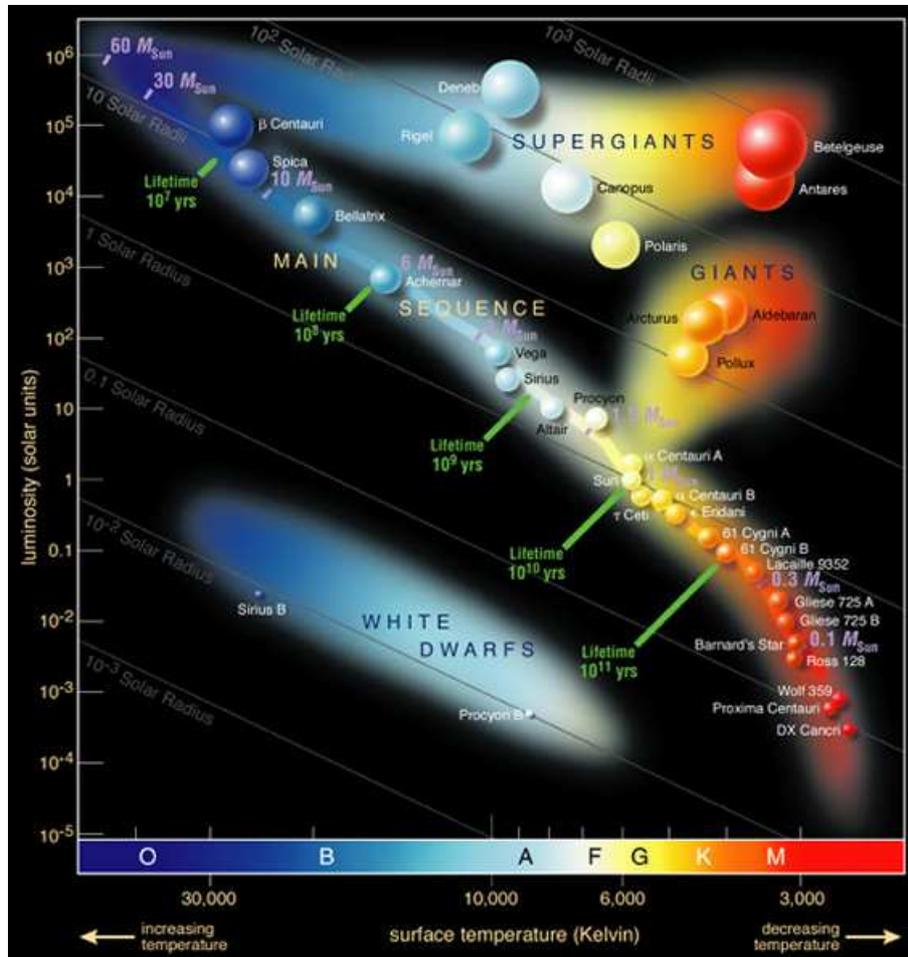


Figura 1.16: Diagrama HR [Pearson Education, Addison–Wesley].

O que parece claro é que o expoente  $n$  da lei de Jeans deve ser recalibrado, especialmente no caso das estrelas de mais baixa massa. Na Tabela 1.2 recolhem-se os valores dados por Jeans e os que aqui se propõem.

### O factor $\alpha$ e a razão de perda de massa

O outro parâmetro que aparece na lei de Jeans, o factor  $\alpha$ , tem-se vinculado tradicionalmente ao ritmo de perda de massa estelar em unidades de massas solares por ano. Porém, estritamente, as suas unidades estarão

Tabela 1.2: VALORES DO EXPONENTE  $n$  SEGUNDO A MASSA.

JEANS (1924)		PROPOSTOS	
Massa	$n$	Massa [ $M_{\odot}$ ]	$n$
Alta	1.4	$> 3$	1.0–3.0
Média	3.0	0.5–3	3.5–4.0
Baixa	4.4	$< 0.5$	2.5–3.5

relacionadas com as constantes de proporcionalidade que aparecem em (1.10) e (1.11), e dependerão do valor do expoente  $n$ .

Em qualquer caso, do ponto de vista prático será interessante dispor de um algoritmo que permitisse obter o valor de  $\alpha$  a partir da razão de perda de massa estelar, que designaremos por  $\gamma$  (em unidades de massas solares por ano). Para isso seguiremos os seguintes passos:

1. Suporemos que a perda de massa total da estrela para cada par  $(n, \alpha)$  na lei de Jeans coincide com a que se obtém supondo que a estrela perde massa a ritmo constante com velocidade  $\gamma$ .
2. Igualando ambas as expressões ao final do período de integração considerado obtém-se a equivalência de  $\alpha$  em função de  $\gamma$ .

Tendo em conta que a relação de massa–luminosidade em que se baseia a lei de Jeans é válida apenas para estrelas da sequência principal, consideraremos que o intervalo de integração corresponde à vida da estrela nesta fase. Este período, conhecido como escala de tempo nuclear,  $\tau_N$ , corresponde, para estrelas não excessivamente massivas, até  $10 M_{\odot}$ , ao tempo em que o hidrogénio da parte central da estrela se consome; e pode aproximar-se mediante (Schatzman e Praderie 1993):

$$\begin{aligned}\tau_{pp}^{SP} &\cong 1.6 \cdot 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-2} \text{ anos} && M < 1.4 M_{\odot}, \\ \tau_{CNO}^{SP} &\simeq 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-3} \text{ anos} && M > 1.2 M_{\odot},\end{aligned}\tag{1.12}$$

ou, de modo aproximado, para qualquer estrela da sequência principal:

$$\tau^{SP} \sim 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-2.5} \text{ anos.}$$

Os subíndices *pp* e *CNO* de (1.12) fazem referência às duas principais séries de reacções de fusão nuclear que se produzem no interior das estrelas.

A primeira delas, a cadeia protão–protão (*pp*), é o mecanismo de transformação de hidrogénio em hélio para uma estrela com uma massa da ordem, ou menor, da do Sol. O efeito neto é a conversão de 4 núcleos de hidrogénio (protões) num núcleo de hélio–4. A sequência de produção mais comum, que produz um 85% da energia de fusão liberada pelo Sol é PPI (ver Fig. 1.17), enquanto as outras duas, PPII e PPIII, apenas produzem o 15% da energia.

Por outro lado, o ciclo do carbono–nitrogénio–oxigénio (*CNO*) é o mecanismo dominante em estrelas mais massivas que o Sol. Inicia-se com a fusão de um núcleo de hidrogénio com outro de carbono-12, o qual age como catalisador da reacção, e continua com a produção sucessiva de núcleos de nitrogénio, carbono e oxigénio (ver Fig. 1.17). A razão de que a produção de energia mediante esta reacção seja desprezível para estrelas com massas inferiores a  $1.2 M_{\odot}$  reside no facto de que para a fusão do protão com o núcleo de carbono precisam-se energias maiores que as da cadeia *pp* e, portanto, temperaturas muito mais elevadas. Estas altas temperaturas apenas têm lugar no núcleo de estrelas massivas.

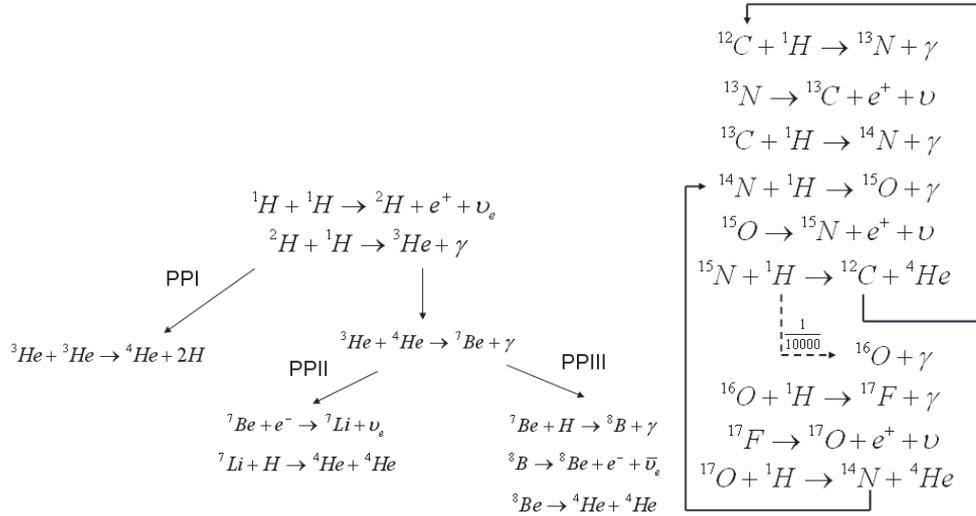


Figura 1.17: Cadeia protão-protão (esquerda) e ciclo CNO (direita).

Continuando com a determinação do parâmetro  $\alpha$ , concluímos que a partir dos parâmetros de perda de massa de uma estrela, em particular, do ritmo de perda de massa,  $\gamma$ , é possível obter o correspondente valor do pequeno parâmetro  $\alpha$  que aparece na lei de Jeans.

Para estabelecer o valor de  $\gamma$  consideraremos a parametrização de Nieuwenhuijzen e de Jager (1990) que dá o valor do ritmo de perda de massa para qualquer estrela no diagrama HR

$$-\dot{M} = 9.6310^{-15} \left( \frac{L}{L_{\odot}} \right)^{1.42} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{0.16} \left( \frac{R}{R_{\odot}} \right)^{0.81} M_{\odot} \text{ ano}^{-1}, \quad (1.13)$$

onde  $\dot{M}$  é o parâmetro que se denotou por  $\gamma$ ; por outro lado,  $M$ ,  $L$  e  $R$ , são a massa, a luminosidade e o raio da estrela, respectivamente.

Tomando uma série de dados padrão ( $M$ ,  $L$  e  $R$ ) para estrelas de idade zero da sequência principal (Karttunen et al. 2000) construímos a Tabela 1.3. Nela aparecem os valores de  $\gamma$  obtidos tendo em conta a parametrização (1.13) e os correspondentes a  $\alpha$  alcançados após aplicarmos os passos descritos ao começo desta secção.

Tabela 1.3: PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS E RITMOS DE PERDA DE MASSA PARA ESTRELAS DE IDADE ZERO DA SEQUÊNCIA PRINCIPAL.

M [M <sub>⊙</sub> ]	L [L <sub>⊙</sub> ]	R [R <sub>⊙</sub> ]	$\tau_N^{SP}$ [10 <sup>6</sup> anos]	$\gamma$ [M <sub>⊙</sub> ano <sup>-1</sup> ]	$\alpha$	$n$
0.5	0.038	0.44	64 000	$8 \cdot 10^{-18}$	$5 \cdot 10^{-17}$	2.5
1.0	0.74	0.87	16 000	$1 \cdot 10^{-15}$	$1 \cdot 10^{-15}$	4.0
1.5	5.4	1.2	3 000	$2 \cdot 10^{-14}$	$5 \cdot 10^{-15}$	3.5
3	93	1.7	400	$2 \cdot 10^{-12}$	$4 \cdot 10^{-14}$	3.5
5	630	2.2	80	$4 \cdot 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{-13}$	3.0
9	4 500	3.5	14	$1 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-11}$	2.0
15	21 000	4.7	3	$1 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-10}$	1.5
30	140 000	6.6	0.4	$3 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-8}$	1.0

Assumindo que estes casos são o suficientemente representativos fazemos um ajuste mediante o método de mínimos quadrados a fim de obter o parâmetro  $\alpha$  que aparece na lei de Jeans em função do ritmo de perda de massa  $\gamma$ . Na Figura 1.18 representam-se os logaritmos dos valores da Tabela 1.3 e a curva cúbica que melhor os ajusta:

$$\log \alpha = a + b \log \gamma + c \log^2 \gamma + d \log^3 \gamma, \quad (1.14)$$

sendo

$$\begin{cases} a = 9.86, \\ b = 4.09, \\ c = 0.247, \\ d = 0.00569. \end{cases}$$

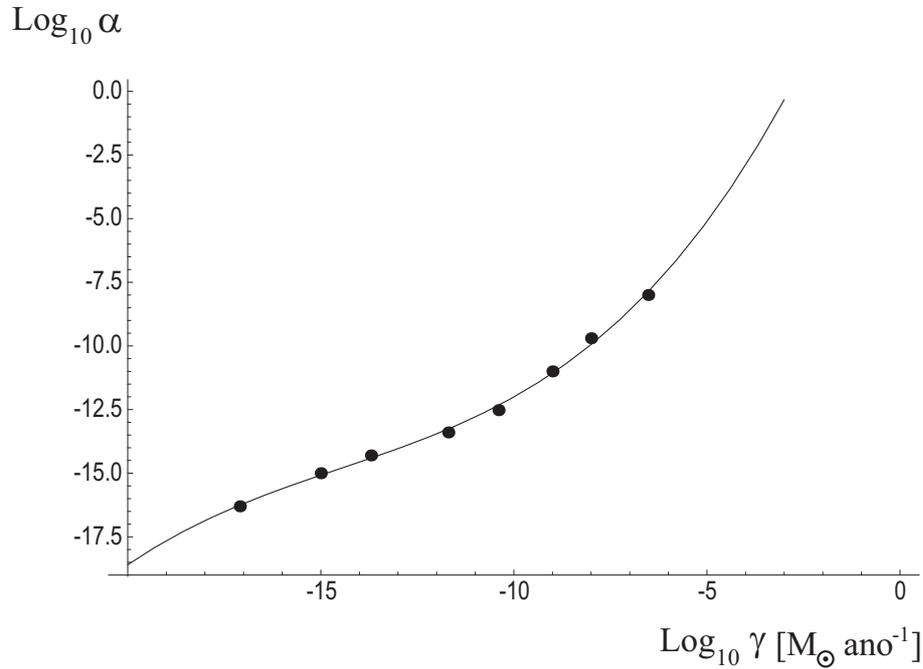


Figura 1.18: Relação entre  $\gamma$  e  $\alpha$ . A curva corresponde ao ajuste dado em (1.14).

## 1.5.2 O efeito periastro

É sabido que em sistemas binários fechados as forças de maré provocam a circularização da órbita (Zahn 1977, 1989; Zahn e Bouchet 1989) numa escala de tempo denominada tempo de circularização (Verbunt e Phinney 1995)

$$\tau_{\text{circ}} = -\frac{e}{\dot{e}}$$

onde  $e$  é a excentricidade e  $\dot{e}$  representa a sua variação temporal.

Apesar disso, em certos sistemas binários fortemente interactuantes onde existe uma estrela gigante evoluída que perde massa, observaram-se, inesperadamente, excentricidades relativamente altas ( $0.1 \lesssim e \lesssim 0.4$ ). Para explicar este fenómeno postulou-se um eventual incremento da perda de massa nas passagens pelo periastro como um mecanismo de aumento

da excentricidade numa escala de tempo mais curta que a circularização (Soker 2000).

Contudo, esta ideia de ligar a perda de massa descontínua com o aumento da excentricidade não é nova. Em outro contexto, o das explosões de novas clássicas, já Edwards e Pringle (1987) consideraram que as expulsões de massa que aconteciam durante estes episódios conduziam à geração de uma pequena excentricidade na órbita do sistema. Já anteriormente Martin (1964) tinha proposto uma lei dependente da distância que apresentava aumentos da perda de massa no periastro do tipo

$$\dot{m} = \frac{k(t)}{r^2}.$$

Também existem sistemas binários fechados que sugerem um aumento da massa ejectada quando a época de máxima velocidade de expansão da fotosfera coincide com a época de passagem pelo periastro (Valls-Gabaud 1988).

Contudo, o tratamento matemático que até o momento se tem dado a este problema não é em absoluto satisfatório e algumas das aproximações inclusive carecem do rigor suficiente. Por esta razão, nos últimos anos, temos analisado este problema com o intuito de levar a cabo uma formulação do mesmo no contexto do problema de Gylden–Meščerskij.

Consideraremos, basicamente, um sistema binário em que sobreposta à perda de massa temporal existe uma outra componente de tipo gravitacional. Assim, a sua grandeza dependerá fundamentalmente da distância entre as duas estrelas, embora também, em menor medida, de outros factores como a própria massa da estrela, o seu raio, a sua classe espectral, etc. No caso habitual de que o sistema apresente certa excentricidade, então o seu efeito será maior no lugar da órbita onde a distância entre as componentes é mínima, isto é, no periastro. Daí que, tradicionalmente, se tenha denominado este fenómeno como ‘efeito periastro’, apesar de que uma denominação mais adequada seja talvez a de ‘efeito de proximidade’,

dada a sua dependência fundamental com a distância. Contudo, neste trabalho, manteremos a denominação mais habitual, utilizando assim o nome de efeito periastro para nos referir, por extensão, ao fenômeno de perda de massa adicional de tipo gravitacional que se produz em sistemas binários (independentemente da excentricidade do sistema).

O problema será abordado utilizando, ora métodos analíticos típicos da formulação hamiltoniana, como são as técnicas perturbativas baseadas em transformações de Lie, ora métodos numéricos tipo Runge–Kutta. Os resultados obtidos têm sido já difundidos em diversas reuniões científicas e publicações (Andrade e Docobo 2001, 2002; Docobo 2003; Andrade e Docobo 2003a,b). Como um dos resultados mais notáveis está o de demonstrar, no trabalho intitulado *Orbital Dynamics Analysis of Binary Systems in Mass-Loss Scenarios* (Andrade e Docobo 2003b), que este fenômeno pode produzir variações seculares na excentricidade que eventualmente conduziriam à rotura do sistema, sobretudo no caso de sistemas altamente excêntricos. Aliás, também se tem estudado a estabilidade orbital, nomeadamente para sistemas estelares triplos, considerando o efeito que a perda de massa tem sobre os critérios de estabilidade mais utilizados para esta classe de sistemas (Andrade e Docobo 2004).

Como veremos em detalhe, uma das consequências mais importantes do ponto de vista dinâmico de algumas destas leis de perda de massa é a criação de variações seculares na evolução temporal dos elementos orbitais. Pela sua vez, estas variações influem nas propriedades físicas das estrelas, como poderia ser o caso do magnetismo nas estrelas tipo Ap, estrelas da classe espectral B9-A0 com intensos campos dipolares magnéticos cujo eixo está inclinado com respeito ao eixo de rotação (Budaj 1999).



# Capítulo 2

## O problema de Gylden–Meščerskij perturbado

*“Seek simplicity and distrust it.” \**

ALFRED WHITEHEAD (1861–1947)

### 2.1 Introdução

As equações do movimento de um problema de dois corpos com massa dependente do tempo, o conhecido como problema de Gylden–Meščerskij, são obtidas na sua formulação hamiltoniana considerando diferentes cenários perturbados:

i) ‘Efeito periastro’ Produz-se um incremento adicional da perda de massa por interacção gravitacional que, em sistemas excêntricos, será mais intensa nas proximidades do periastro.

Consideram-se leis de perda de massa com efeito periastro em função

---

\* “Procura a simplicidade e, depois, desconfia dela.” *The Concept of Nature*, 1926.

de certo pequeno parâmetro  $\beta$  que dará conta da intensidade desta perturbação.

**ii) Componentes elipsoidais** Normalmente, as estrelas estarão rotando com certa velocidade angular que, em geral, não será a mesma para cada uma. Se uma delas é um rotador rápido, adquirirá forma elipsoidal.

Outro caso que pode ser modelado neste contexto é o de um disco de acreção massivo em que se considera o conjunto estrela+disco como um único objecto com forma achatada.

Considera-se a segunda ordem do desenvolvimento do potencial gravitacional em série de harmónicos esféricos tomando o factor de forma dinâmico  $J_2$  como pequeno parâmetro.

**iii) Efeitos relativistas** Sobretudo em sistemas fechados será necessário considerar termos relativistas no potencial gravitacional. Realiza-se uma aproximação pós-newtoniana tomando como pequeno parâmetro o inverso ao quadrado da velocidade da luz  $c^{-2}$ .

**iv) Outras classes de perturbações** Analisam-se um problema de massa não estacionária com uma perturbação dependente do argumento da latitude e um problema de massa variável com uma perturbação na direcção da velocidade orbital.

A formulação do efeito periastro realiza-se no contexto do problema de Gyldén–Meščerskij, de modo que, à perda de massa dependente do tempo, se considera sobreposta uma perda adicional em função da distância.

Por outro lado, as perturbações produzidas pelo achatamento polar de alguma das componentes e os efeitos relativistas obtêm-se para massa estacionária. Será no Capítulo 4, quando se exponham as aplicações práticas, onde se terá em conta a variabilidade da massa também nestes casos perturbados.

## 2.2 Formulação hamiltoniana

Existem diversos conjuntos de variáveis apropriadas para tratar esta classe de problemas, nomeadamente sistemas de variáveis canónicas. Neste estudo far-se-á uso de dois desses sistemas que a seguir se passam a descrever:

**Variáveis polares–nodais** ( $r, \theta, \nu; p_r, p_\theta, p_\nu$ ): foram introduzidas por Jacobi e utilizadas explicitamente mais tarde por Whittaker<sup>1</sup>. Podem-se construir a partir das variáveis cartesianas usuais mediante uma transformação de Mathieu ou mediante uma extensão canónica a partir de coordenadas cartesianas rectangulares.

Há que ter em conta que não resultam adequadas para estudar certas trajectórias: colisões ( $r \equiv 0$ ), órbitas rectilíneas ( $p_\theta \equiv 0$ ) ou órbitas equatoriais ( $p_\theta \equiv |p_\nu|$ ).

- $r$  é a distância radial desde o centro de massas até o móbil.
- $\theta$  é o argumento da latitude do móbil.
- $\nu$  representa o ângulo do nodo ascendente.
- $p_r$  é a velocidade radial do móbil.
- $p_\theta$  representa o módulo do vector momento angular.
- $p_\nu$  é a componente polar do vector momento angular.

Para movimentos não perturbados: os momentos  $p_\nu$  e  $p_\theta$  e o ângulo do nodo  $\nu$  são constantes; a distância radial  $r$  e a velocidade radial  $p_r$  variam periodicamente; e o argumento da latitude  $\theta$  é uma sobreposição de uma função linear do tempo e um termo periódico. Em todos os casos as variações periódicas são pequenas, proporcionais à excentricidade.

---

<sup>1</sup>Até há relativamente pouco tempo o nome mais habitual era o de variáveis de Hill ou variáveis de Hill–Whittaker.

**Variáveis de Delaunay** ( $\ell, g, h; L, G, H$ ): constituem um conjunto de variáveis acção–ângulo definidas a partir das anteriores mediante uma transformação canónica de contacto onde a função geratriz é uma solução particular da equação de Hamilton–Jacobi.

São um dos sistemas de variáveis mais utilizados em mecânica celeste devido, sobretudo, a que a expressão da função hamiltoniana do problema de Kepler apresenta uma forma muito simplificada. Porém, estas variáveis também não são apropriadas para colisões, órbitas rectilíneas, órbitas equatoriais nem órbitas circulares.

- $\ell$  é a denominada anomalia média.
- $g$  é o argumento do periastro,  $g = \theta - f$  (sendo  $f$  a anomalia verdadeira).
- $h$  é o ângulo do nodo,  $h \equiv v$ .
- $L$  está relacionadas com a energia do sistema mediante  $\mathcal{H}_0 = -\frac{\mu^2}{2L^2}$  (onde  $\mathcal{H}_0$  é a hamiltoniana do problema de dois corpos).
- $G$  é o módulo do momento angular,  $G \equiv p_\theta$ .
- $H$  é a componente polar do momento angular,  $H = p_v$ .

A hamiltoniana do problema expressar-se-á em variáveis polares–nodais como

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0(r, \theta, v; p_r, p_\theta, p_v; \mu(t)) + \mathcal{P}(\beta, J_2, c^{-2}),$$

sendo

$$\mathcal{H}_0(r; p_r, p_\theta; \mu(t)) = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu(t)}{r},$$

a hamiltoniana do problema de Gyldén–Meščerskij. A função perturbadora  $\mathcal{P}$  para cada problema perturbado será a que se obterá nas seguintes secções deste capítulo.

## 2.3 Perturbações por efeito periastro

### 2.3.1 Hipótese

No Capítulo 1 descrevemos certas divergências que se observam em sistemas binários fechados, nomeadamente excentricidades relativamente altas onde, pela acção das forças de maré, seria de esperar uma órbita praticamente circular. Perante a evidência observacional supomos que deve existir algum mecanismo de incremento da excentricidade que contra-arreste os processos de circularização conhecidos já desde há tempo (Zahn 1977, 1989; Zahn e Bouchet 1989) mantendo assim a excentricidade do sistema num intervalo de valores relativamente alto.

Propõe-se que este mecanismo consiste, basicamente, num incremento da perda de massa por efeito gravitacional, de maneira que, para sistemas excêntricos, seja mais importante nas proximidades do periastro (ver Fig. 2.1). Sustentamos esta hipótese no facto de que num sistema fechado, e mais ainda no caso de estrelas muito massivas, o efeito gravitacional sobre o material que se encontra na superfície estelar não é em absoluto desprezível. Esta intensificação da interacção gravitacional estimulará a perda de massa de uma ou das duas componentes, dependendo da sua morfologia, aumentando a perda de massa em forma de ventos estelares. Do mesmo modo, a medida que as estrelas se afastam para o apoastro, esta componente da perda de massa diminuirá.

O efeito periastro será, portanto, mais relevante em sistemas binários que apresentem menores separações entre ambas componentes. De facto, deve verificar-se  $\beta \rightarrow 0$  quando  $a \rightarrow \infty$ . A intensidade deste efeito dependerá da grandeza do parâmetro  $\beta$  e, em menor medida, virá também caracterizada por outros factores tal e como se expus no Capítulo 1. Em geral, considerar-se-á uma dependência da forma:

$$\beta \propto \frac{1}{a}.$$

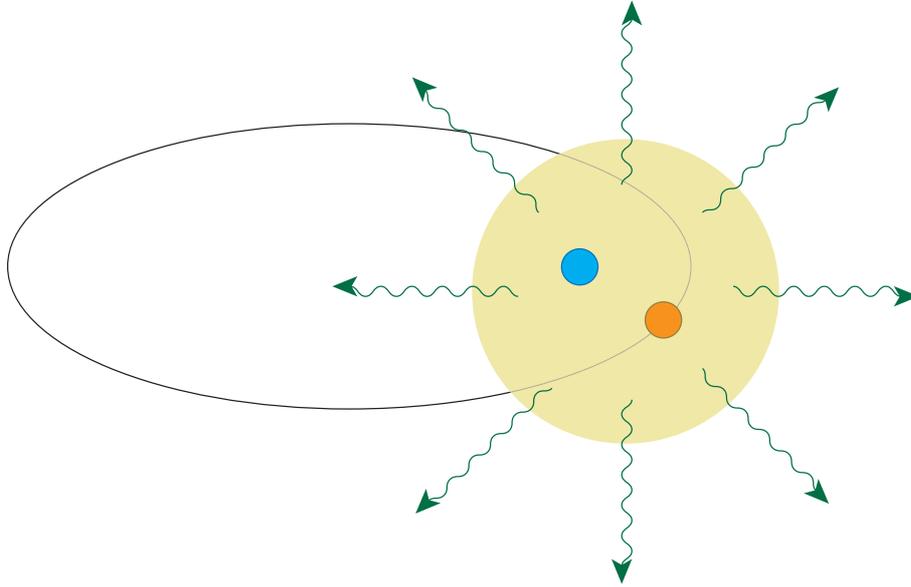


Figura 2.1: Representação do efeito periastro num sistema excêntrico.

Na prática, tal incremento da perda de massa por efeito periastro deve supor-se sobreposto à perda de massa dependente do tempo em forma de ventos estelares. Desta maneira, dependendo de qual das componentes seja a predominante, do ponto de vista da dinâmica orbital, o que teremos será um problema de Gyldén–Meščerskij perturbado pelo efeito periastro ou efeito periastro com perda de massa dependente do tempo (ver Tab. 2.1). De facto, a formulação numérica que utilizaremos permitirá um tratamento simétrico de ambas as variações de massa.

Tabela 2.1: TIPOLOGIA DO PROBLEMA DE DOIS CORPOS (ONDE  $\mu$  É O PARÂMETRO GRAVITACIONAL,  $t$  O TEMPO E  $r$  A DISTÂNCIA).

Kepler	$\mu$
Gyldén–Meščerskij	$\mu(t)$
Gyldén–Meščerskij + efeito periastro	$\mu(t, r)$

### 2.3.2 Leis de perda de massa com efeito periastro

A classe de leis de perda de massa que dão conta do efeito periastro é relativamente extensa, mas esta investigação centra-se no estudo de aquelas que dão lugar a novos comportamentos na evolução dos elementos orbitais, tais como a variação secular da excentricidade. Estas caracterizam-se pela sua dependência com a distância e o momento angular do sistema (variável).

Uma lei relativamente simples desta classe que, aliás, produz variações seculares nos elementos orbitais é a seguinte (Andrade e Docobo 2003a,b)

$$\dot{\mu}(r; p_\theta; t) = -\alpha_1 \mu_1^{n_1}(t) - \alpha_2 \mu_2^{n_2}(t) - \beta \frac{p_\theta}{r^2}, \quad (2.1)$$

onde o primeiro termo representa a perda de massa dependente do tempo para a primeira componente, e de maneira análoga o seguinte termo para a segunda. Consideraremos que cada uma delas vem dada pela lei de Jeans, onde  $\mu_1(t)$  e  $\mu_2(t)$  são funções do tempo, uniformemente decrescentes, contínuas e diferenciáveis;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $n_1$  e  $n_2$  são quatro números reais, os dois pequenos parâmetros,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , próximos a zero e os dois expoentes,  $n_1$  e  $n_2$ , entre 1 e 4, aproximadamente. Por último, o terceiro termo introduz o efeito periastro, onde  $r$  é a distância entre ambas as componentes,  $p_\theta$  o momento angular do sistema e  $\beta$  outro pequeno parâmetro próximo a zero.

Assim, na expressão (2.1), se  $\beta = 0$ , a perda de massa do sistema será exclusivamente dependente do tempo, via a lei de Jeans. No caso mais geral, teremos uma lei de perda de massa dependente do tempo mediante a lei de Jeans, do momento angular do sistema e do inverso ao quadrado da distância. Uma análise de (2.1) permite inferir que será precisamente o valor dos pequenos parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\beta$  o que, além de fixar a ordem da perda de massa, determinará qual das suas componentes predominará. A perda de massa do sistema deixará, portanto, de ser unicamente em função explícita do tempo.

Em resumo, com a lei relativamente simples (2.1) será possível caracterizar suficientemente o movimento e a evolução dos elementos orbitais de

sistemas submetidos a perda de massa dependente do tempo mais efeito periastro.

### 2.3.3 Formulação hamiltoniana

A hamiltoniana do problema expressar-se-á em variáveis polares–nodais como

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0(r; p_r, p_\theta; \mu(t)) + \mathcal{P}(r; p_\theta), \quad (2.2)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(r; p_r, p_\theta; \mu(t)) &= \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu(t)}{r}, \\ \mathcal{P}(r; p_\theta) &= \beta \frac{\theta}{r}, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{H}_0$  é a hamiltoniana do problema de Gyldén–Meščerskij e  $\mathcal{P}$  a perturbação por efeito periastro.

Esta classe de hamiltonianas não são abordáveis mediante técnicas analíticas baseadas em transformações de Lie, de modo que, no Capítulo 4, levaremos a cabo a sua integração numérica indicando, no entanto, outras possíveis vias quanto ao tratamento analítico.

Existe certa analogia entre este processo e a perda de energia que sofre um satélite artificial ao atravessar a atmosfera terrestre (ver Fig. 2.2). Não obstante, neste último caso sim resulta possível aplicar técnicas baseadas em transformações de Lie (para sistemas não canónicos) como, por exemplo, no estudo analítico de órbitas de transferência geostacionária (Barrio e Palacián 2003).

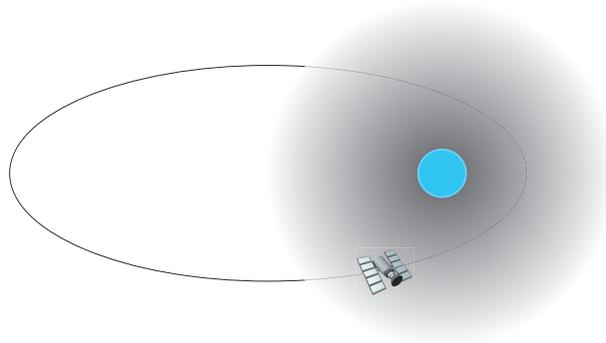


Figura 2.2: Representação do atrito atmosférico que sofre um satélite artificial na atmosfera terrestre.

## 2.4 Componentes elipsoidais

### 2.4.1 Morfologia estelar

A forma das estrelas pode ver-se deformada com respeito à simetria de uma esfera perfeita fundamentalmente por duas razões:

- *Interação gravitacional:* Num sistema binário fechado as intensas forças de maré provocam desvios da esfericidade que, em geral, não são simétricos com respeito ao equador.
- *Rotação rápida:* A força centrífuga provoca um deslocamento da massa que origina formas elipsoidais equatorialmente simétricas.

### 2.4.2 Desenvolvimento do potencial em série de harmónicos esféricos

A geometria do campo gravitacional externo de um corpo com simetria aproximadamente esférica pode ser desenvolvido em série convergente de harmónicos esféricos como uma solução especial da equação diferencial de Laplace (Cid e Ferrer 1997; Torge 2001)

$$\Delta V = 0,$$

na forma

$$V = \frac{\mu}{r} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^n [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \operatorname{sen} m\lambda] P_{nm}(\cos \vartheta) \right],$$

onde o primeiro termo (grau zero) é o potencial de uma esfera homogénea.  $R$  é o raio equatorial médio do corpo,  $P_{nm}$  são os polinómios de Legendre associados de grau  $n$  e ordem  $m$ ,  $\lambda$  a longitude e  $\vartheta$  é a co-latidade. Aliás, os integrais de massa  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$ , que se denominam coeficientes dos harmónicos esféricos, classificam-se, segundo o grau e a ordem, em:

- Harmónicos zonais ( $m = 0$ ).
- Harmónicos tesserais ( $1 \leq m < n$ ).
- Harmónicos sectoriais ( $n = m$ ).

Na prática todos estes coeficientes tomam valores reais que dependem das inhomogeneidades que apresente o potencial gravitacional do corpo. No caso em que o seu achatamento polar seja notável cobrarão especial importância os harmónicos esféricos zonais (como é habitual, os coeficientes correspondentes denotar-se-ão como  $J_n \equiv -C_{n0}$ ). Em particular, consideraremos o denominado factor<sup>2</sup> de forma dinâmico  $J_2$ . Para ter em conta outros efeitos, inclusive aqueles que rompem a simetria equatorial, será preciso considerar harmónicos esféricos de graus e ordens superiores. Assim, por exemplo, o harmónico correspondente a  $J_3$  pode interpretar-se geometricamente como uma diferença entre o achatamento polar nos hemisférios norte e sul.

<sup>2</sup>Por exemplo, no caso da Terra o harmónico esférico mais importante é o correspondente a  $J_2$ , umas 1000 vezes maior que o resto.

Neste trabalho considerar-se-á o potencial de um corpo com simetria equatorial sem ter em conta desvios de tipo axial. Em particular, restringir-nos-emos ao problema zonal com  $J_2$ , desprezando multipolos de ordem superior<sup>3</sup>. Contudo, no caso de ser precisos harmónicos de grau e ordem superior, o tratamento analítico seria similar ao que aqui se desenvolve.

Em resumo, o potencial gravitacional que consideraremos virá dado por

$$V = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^2 J_2 \left( \frac{3}{2} \sin^2 i \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (2.3)$$

onde, por razões que têm a ver com a escolha do centro do sistema de referência no centro de massas, os coeficientes dos harmónicos esféricos de grau 1 são nulos.

## 2.5 Efeitos relativistas

### 2.5.1 Aproximação pós-newtoniana

O movimento de dois corpos massivos no campo gravitacional mútuo foi obtido por primeira vez por Einstein, Infeld e Hoffmann (1938) (EIH) e posteriormente refinado e simplificado por Einstein e Infeld (1949). A precisão obtida foi a da primeira aproximação pós-newtoniana da teoria da relatividade geral —ver, por exemplo, Logunov e Mestvirishvili (1989)—, a qual se caracteriza pelo facto de as equações EIH se reduzirem às de Newton no limite  $c \rightarrow \infty$ . Do ponto de vista matemático esta redução denomina-se contracção da álgebra de Lorentz à de Galileu, e estuda-se na teoria de deformações de álgebras de Lie<sup>4</sup>.

<sup>3</sup>O que na teoria do satélite artificial se denomina ‘Problema Principal’.

<sup>4</sup>Uma redução similar acontece na mecânica quântica quando  $\hbar \rightarrow 0$ , contraindo-se a álgebra de Lie de operadores quânticos à álgebra comutativa de funções sobre o espaço de fases.

## 2.5.2 Lagrangiana do movimento relativo de dois corpos (massivos)

A lagrangiana do sistema vem dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{PN}, \quad (2.4)$$

sendo  $\mathcal{L}_N$  o contributo newtoniano e  $\mathcal{L}_{PN}$  a primeira aproximação pós-newtoniana da teoria da relatividade geral, onde se verifica

$$\frac{\mathcal{L}_{PN}}{\mathcal{L}_N} \sim \frac{1}{c^2}.$$

Recentemente, a terceira aproximação pós-newtoniana para duas massas pontuais tem sido derivada utilizando metodologias diferentes por dois grupos independentes (Damour, Jaranowski e Schäfer 2000; Blanchet e Faye 2000) e provada a sua equivalência (Damour, Jaranowski e Schäfer 2001). No entanto, neste trabalho utilizar-se-á a primeira aproximação pós-newtoniana para objectos não pontuais, a qual dá conta, com a suficiente precisão, dos efeitos relativistas mais relevantes para a dinâmica de um sistema estelar.

A lagrangiana para o movimento de uma partícula de prova  $m_2$  no campo gravitacional externo gerado por outra partícula  $m_1$  obtém-se a partir de (2.4) segundo

$$\mathcal{L}_2 = \lim_{m_2 \rightarrow 0} \left( \frac{\mathcal{L}}{m_2} \right). \quad (2.5)$$

É possível obter  $\mathcal{L}_2$  a partir de um princípio variacional (Richardson e Kelly 1988) de modo que

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} ds = 0, \quad (2.6)$$

onde  $ds$  é o intervalo espaço-temporal invariante

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu},$$

sendo  $g_{\mu\nu}$  o tensor métrico de Riemann do campo gravitacional externo definido no contínuo espaço-temporal de quatro dimensões  $x^\mu$ . Como é habitual, segue-se a notação de Einstein em que os índices repetidos indicam soma sobre os mesmos.

No caso de que o campo gravitacional seja fraco é possível decompor o tensor de Riemann como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

sendo  $\eta_{\mu\nu}$  o tensor métrico<sup>1</sup> de Minkowski do espaço vazio da relatividade especial com as componentes

$$\begin{aligned} \eta_{00} &= 1, \\ \eta_{0k} &= 0, \\ \eta_{ik} &= -\delta_{ik}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

e  $h_{\mu\nu}$  a métrica que dá conta dos desvios a respeito do espaço vazio e que verifica

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} h_{\mu\nu} &= 0, \\ \lim_{c \rightarrow \infty} h_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned}$$

A última destas propriedades permite gerar  $h_{\mu\nu}$  e, portanto, também  $g_{\mu\nu}$ , como uma série de potências de  $\frac{1}{c}$ , a partir da qual se obtêm as equações do problema de dois corpos em aproximação pós-newtoniana.

Parametrizando as trajectórias espaço-temporais  $x^\nu$  por meio de  $x^0 = ct$ , a equação (2.6) pode escrever-se como

$$\delta \int_{x_1^0}^{x_2^0} \left( \frac{ds}{dx^0} \right) dx^0 = 0 \Rightarrow \delta \int_{x_1^0}^{x_2^0} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dx^0} \frac{dx^\nu}{dx^0} \right)^{\frac{1}{2}} dx^0 = 0.$$

Esta não é mais que a acção do sistema, que em termos de  $t$  se expressa como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_2 dt = 0,$$

sendo o integrando a lagrangiana

$$\mathcal{L}_2 = \left( g_{00} + 2 \frac{g_{0i}}{c} \frac{dx^i}{dt} + \frac{g_{ij}}{c^2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde, graças a (2.7) e (2.8), o tensor de Riemann é substituído por

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 + h_{00}, \\ g_{0i} &= h_{0i}, \\ g_{ij} &= -\delta_{ij} + h_{ij}. \end{aligned}$$

Por razões de consistência entre a teoria geral da relatividade e a teoria newtoniana clássica, as expansões em função de  $\frac{1}{c}$  das componentes de  $h_{\mu\nu}$  devem ter a seguinte forma

$$\begin{aligned} h_{00} &= \frac{h_{00}^{(2)}}{c^2} + \frac{h_{00}^{(4)}}{c^4} + \dots, \\ h_{0i} &= \frac{h_{0i}^{(3)}}{c^3} + \frac{h_{0i}^{(5)}}{c^5} + \dots, \\ h_{ij} &= \frac{h_{ij}^{(2)}}{c^2} + \frac{h_{ij}^{(4)}}{c^4} + \dots \end{aligned}$$

Obtém-se assim a lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \left( 1 - \frac{1}{c^2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt} + h_{00} + 2 \frac{h_{0i}}{c} \frac{dx^i}{dt} + \frac{h_{ij}}{c^2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{c^2} \left[ c^2 + \frac{1}{2} \left( -\dot{x}^i \dot{x}^i + h_{00}^{(2)} + \frac{1}{c^2} h_{00}^{(4)} + \frac{2}{c^2} h_{0i}^{(3)} \dot{x}^i + \frac{1}{c^2} h_{ij}^{(2)} \dot{x}^i \dot{x}^j \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8c^2} \left[ (\dot{x}^i \dot{x}^i)^2 + (h_{00}^{(2)})^2 - 2h_{00}^{(2)} \dot{x}^i \dot{x}^i \right] \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned}$$

Reescalando por  $-c^2$  e ordenando termos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i - \frac{1}{2} h_{00}^{(2)} - \frac{1}{2c^2} \left[ h_{00}^{(4)} + 2h_{0i}^{(3)} \dot{x}^i + h_{ij}^{(2)} \dot{x}^i \dot{x}^j \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (\dot{x}^i \dot{x}^i)^2 - \frac{1}{4} (h_{00}^{(2)})^2 + \frac{1}{2} h_{00}^{(2)} \dot{x}^i \dot{x}^i \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Seguindo o procedimento de Landau e Lifshitz (1962) obtém-se

$$\begin{aligned} h_{00}^{(2)} &= -\frac{2Gm_1}{r}, \\ h_{00}^{(4)} &= 2\left(\frac{Gm_1}{r}\right)^2 - \frac{3Gm_1\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1}{\vec{r}}, \\ h_{0i}^{(3)} &= \frac{7Gm_1\dot{x}_1^i}{2r} + \frac{Gm_1(\dot{\vec{r}}_1 \cdot \vec{r})y_1^i}{2r^3}, \\ h_{ij}^{(2)} &= -\frac{2\delta_{ij}Gm_1}{r}. \end{aligned}$$

Finalmente, dado que a lagrangiana  $\mathcal{L}_1$  para o corpo 1 se pode obter tendo em conta que (2.9) é invariante sob a transformação  $m_1\vec{r}_1 \rightleftharpoons m_2\vec{r}_2$  e que se deve verificar (2.5) e a correspondente relação para  $m_1$ , obtém-se a lagrangiana do movimento relativo das duas massas

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r} + \frac{1-3\sigma}{8c^2}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^2 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\mu}{r}\right)^2 \\ &+ \frac{\mu}{2rc^2}\left[(3+\sigma)\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\sigma}{r^2}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^2\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \mu &= G(m_1 + m_2), \\ \sigma &= \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \end{aligned}$$

Tomando  $\sigma = 0$  recupera-se a lagrangiana de Schwarzschild para o movimento de uma partícula de prova sem massa.

## 2.6 O problema de dois corpos elipsoidais em aproximação pós-newtoniana

Dada a natureza destas duas perturbações: componentes elipsoidais e efeitos relativistas no potencial gravitacional, realizaremos a sua análise conjuntamente. Desse modo, utilizaremos a primeira aproximação pós-newtoniana para estudar o movimento de dois corpos massivos (Richardson e Kelly 1988), considerando o caso em que um dos corpos não é esférico, senão que apresenta certo achatamento polar (Heimberger, Soffel e Ruder 1990).

A hamiltoniana do problema virá dada por

$$\mathcal{H} = \vec{v}\vec{p} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \vec{p}^2 - V - \frac{1}{c^2} \left[ \sigma_0 \vec{p}^4 + \sigma_1 V \vec{p}^2 + \sigma_2 V^2 + \sigma_3 \frac{V}{r^2} (\vec{r} \cdot \vec{p})^2 \right], \quad (2.11)$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1 - 3\sigma}{8} \\ \sigma_1 &= \frac{3 + \sigma}{2} \\ \sigma_2 &= -\frac{1}{2} \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2} \\ \sigma &= \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

O potencial gravitacional  $V$  é o definido em (2.3), enquanto a lagrangiana  $\mathcal{L}$  é a obtida em (2.10).

Resulta conveniente obter a hamiltoniana expressada em função de um conjunto de variáveis canónicas conjugadas: as variáveis acção-ângulo, onde as variáveis acção serão constantes do movimento e as variáveis ângulo aumentarão linearmente com o tempo.

Em particular, a parte perturbativa correspondente ao  $J_2$  virá dada por

$$\begin{aligned}
 V_2 &= -J_2 \frac{\mu R^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{1}{2} \right) = \\
 &= -J_2 \frac{\mu^4 R^2}{L^6} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left[ \frac{3}{4} \operatorname{sen}^2 i - \frac{3}{4} \operatorname{sen}^2 i \cos(2\theta) - \frac{1}{2} \right] = \\
 &= -J_2 \frac{\mu^4 R^2}{L^6} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left[ \frac{1}{4} - \frac{3 H^2}{4 G^2} - \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{H^2}{G^2} \right) \cos 2(f + g) \right]. \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

Substituindo (2.13) em (2.11) e desprezando todos os termos que se desviam da simetria axial, multipolos em momentos de ordens superiores e termos maiores à segunda ordem no factor de forma dinâmico  $J_2$  obtém-se

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \vec{p}^2 - \frac{\mu}{r} + J_2 \frac{\mu R^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{c^2} \left[ \sigma_0 \vec{p}^4 + \sigma_1 \frac{\mu}{r} \vec{p}^2 + \sigma_2 \frac{\mu^2}{r^2} + \sigma_3 \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \cdot \vec{p})^2 \right] \\
 &\quad + J_2 \frac{R^2}{c^2} \left( \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \sigma_1 \frac{\mu}{r^3} \vec{p}^2 + 2 \sigma_2 \frac{\mu^2}{r^4} + \sigma_3 \frac{\mu}{r^5} (\vec{r} \cdot \vec{p})^2 \right].
 \end{aligned}$$

Utilizando a relação

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

onde

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} = a(1 - e \cos E),$$

$$a = \frac{L^2}{\mu},$$

$$e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2},$$

e também

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = \frac{\mu e r}{G} \operatorname{sen} f,$$

ao fazer as substituições necessárias obtém-se a hamiltoniana deste problema

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{\mu^2}{2L^2} + J_2 \frac{\mu^4 R^2}{L^6} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left[ \frac{1}{4} - \frac{3H^2}{4G^2} - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{H^2}{G^2}\right) \cos 2(f + g) \right] \\ & - \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L^4} \left[ \sigma_0 + \left[ -4\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_3 \left( \frac{L^2}{G^2} - 1 \right) \operatorname{sen}^2 f \right] \frac{a}{r} + (4\sigma_0 + 2\sigma_1 + \sigma_2) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] \\ & + \frac{J_2 \mu^6 R^2}{c^2 L^8} \left[ \frac{1}{4} - \frac{3H^2}{4G^2} - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{H^2}{G^2}\right) \cos 2(f + g) \right] \\ & \cdot \left[ \left[ -\sigma_1 + \sigma_3 \mu \left( \frac{L^2}{G^2} - 1 \right) \operatorname{sen}^2 f \right] \left(\frac{a}{r}\right)^3 + 2(\sigma_1 + \sigma_2) \left(\frac{a}{r}\right)^4 \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde  $f$  e  $\frac{a}{r}$  são funções de  $\ell$ ,  $L$  e  $G$ .

O termo  $-\frac{\mu^2}{2L^2}$  representa a ordem zero, enquanto a ordenação para o resto de termos segundo a ordem não é tão evidente como no caso do problema do satélite<sup>5</sup>, por citar uma analogia. Em geral, podem-se considerar duas situações:

1. Se  $J_2$  é relativamente pequeno, então os termos correspondentes a  $J_2$  e  $c^{-2}$  representam a primeira ordem, enquanto o termo  $J_2 \cdot c^{-2}$  seria a segunda ordem.
2. Se  $J_2$  é grande, então este termo seria a primeira ordem,  $c^{-2}$  a segunda e  $J_2 \cdot c^{-2}$  a terceira.

## 2.7 Outras classes de perturbações

### 2.7.1 Forças perturbativas na direcção do movimento orbital

#### Esquema perturbativo de Hadjidemetriou

As equações de Lagrange, que fornecem a variação temporal dos elementos orbitais, foram obtidas mediante técnicas perturbativas para o problema de Gyldén–Meščerskij por Hadjidemetriou (1963). De seguido realizaremos um sumário da sua metodologia, uma extensão da qual seerá aplicada posteriormente a um caso perturbado do problema de Gyldén–Meščerskij.

O que ele faz é considerar o problema de dois corpos com massa lentamente decrescente como um problema de Kepler perturbado para o qual determina a aceleração que a força perturbadora origina. Posteriormente substitui as suas componentes nas conhecidas equações de Gauss da teoria de perturbações.

---

<sup>5</sup>Para a Terra,  $J_2 = 1.08263 \cdot 10^{-3}$  no *World Geodetic System 1984*.

Supõe-se o movimento relativo de um ponto material  $P_2$  em redor a outro  $P_1$ . Quando a massa é constante, a órbita define-se mediante

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r},$$

que se corresponde com a equação de uma cónica (uma elipse no caso ligado). Porém, se a massa decresce, a órbita agora perturbada já não voltará a descrever mais uma elipse.

Partindo de um instante  $t = t_0$  em que  $P_2$  se desloca com velocidade relativa  $\vec{v}$ , se a massa se faz constante, o raio vector  $\vec{r}$ , o vector velocidade  $\vec{v}$  e a massa  $\mu$  definem um órbita representada por uma cónica  $c$  (órbita osculatriz). Mas se a massa varia a trajectória seria  $c_1$ , como se mostra na Figura 2.3.

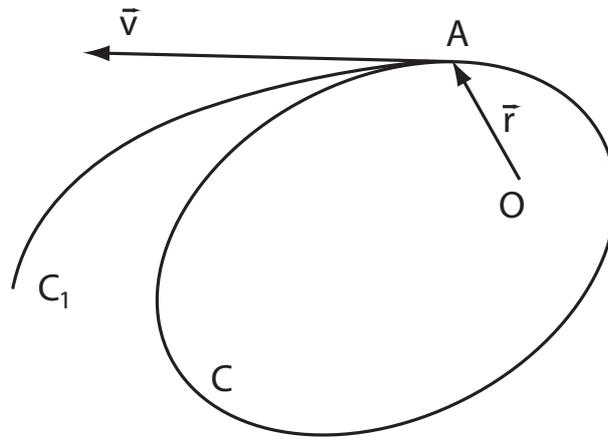


Figura 2.3: Esquema da posição inicial da estrela no ponto  $A$  deslocando-se com velocidade  $\vec{v}$  com respeito à outra componente  $O$  (Hadjidemetriou 1963).

Se agora se estabelece um vector velocidade  $\vec{v}_1$  que verifica:

1.  $\vec{v}_1(t_0) = \vec{v}(t_0)$
2.  $\vec{v}_1$  deve ser tal que se  $P_2$  se deslocasse com tal velocidade então, apesar do facto de que a massa total varie, a órbita sempre seria idêntica à

órbita osculatriz em  $t = t_0$ , isto é, o semieixo maior e a excentricidade devem permanecer constantes.

A velocidade  $\vec{v}_1$  depende do tempo através de  $\vec{r}$  e de  $\mu$

$$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_1[\vec{r}(t), \mu(t)],$$

com a aceleração dada por

$$\gamma_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \left( \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right)_{\mu=cte} + \left( \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right)_{\vec{r}=cte}.$$

O primeiro termo é o vector aceleração se a massa fosse constante, e corresponde à atracção gravitacional

$$\left( \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right)_{\mu=cte} = -\frac{\mu(t_0)}{r^3(t_0)} \vec{r}(t_0).$$

O outro somando representa a variação de velocidade se admitimos que a massa varia permanecendo os restantes elementos constantes. Para compreender isto, suponha-se um conjunto de órbitas idênticas orientadas de tal maneira que os seus semieixos maiores sejam paralelos e que, no instante  $t = t_0$ , todas as componentes ocupem a mesma posição relativa nas suas órbitas. Isto implica que se todas as órbitas estão sobrepostas, as posições e as direcções das velocidades de todas as componentes coincidirão. Porém, se as massas variam, os módulos dos vectores velocidade seriam diferentes, já que vêm dados pela relação

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (2.15)$$

Pode-se assim obter o termo  $\left( \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right)_{\vec{r}=cte}$  derivando a expressão anterior

$$2v \frac{dv}{dt} = \frac{d\mu}{dt} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\ln \mu) v,$$

donde se obtém

$$\left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}\right)_{\vec{r}=\text{cte}, t=t_0} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt}(\ln \mu) \right]_{t=t_0} \vec{v}(t_0).$$

Este termo corresponde à perturbação que se está a procurar, já que é o responsável do afastamento da órbita kepleriana em  $t = t_0$ . Como o razoamento é válido para qualquer  $t$ , a perturbação que produz a variação isotrópica da massa do sistema será

$$\vec{\mathcal{P}} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \vec{v}. \quad (2.16)$$

Quer dizer, a perda isotrópica de massa de um sistema binário é equivalente a uma força que impulsa o corpo em sentido tangente à sua órbita proporcionalmente à velocidade do movimento e à derivada logarítmica da massa.

Ao substituir esta força perturbativa nas equações que fornecem a variação dos elementos orbitais dadas por Contopoulos (1959), Hadjidemetriou obteve as equações de Lagrange correspondentes ao problema de Gylden–Meščerskij.

### **Aplicação a um problema de perda de massa em função do tempo e da posição na órbita**

Hadjidemetriou (1966b) demonstrou que alguns problemas cuja força perturbadora depende da distância se podem transformar equivalentemente num problema de dois corpos com massa variável, dependente exclusivamente do tempo, e aplicar assim os resultados clássicos da teoria.

Neste contexto suponhamos que num sistema binário a massa total varia de acordo com a lei de perda de massa definida em § 2.3 segundo

$$\dot{\mu}(r; p_\theta; t) = \dot{\mu}(t) - \beta \frac{p_\theta}{r^2}, \quad (2.17)$$

onde o primeiro termo, o da perda de massa em função unicamente do tempo, vem dado pela lei de Jeans

$$\dot{\mu}(t) = -\alpha \mu^n(t).$$

Se consideramos que a perda de massa é isotrópica e substituimos (2.17) em (2.16) obteremos a correspondente força perturbativa produzida pela perda de massa dependente do tempo

$$\vec{\mathcal{P}} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t, \theta)} - \frac{\beta}{\mu(t, \theta) r^2} p_\theta \right] \vec{v}.$$

O primeiro termo é similar ao obtido por Hadjidemetriou (1963) para o problema de Gyldén–Meščerskij. Aliás, aparece um novo contributo também na direcção da velocidade orbital, que é directamente proporcional ao momento angular do sistema e inversamente proporcional ao quadrado da distância e à massa total do sistema. Formalmente este termo supõe uma perturbação ao anterior, já que no caso em que o pequeno parâmetro  $\beta$  seja nulo recupera-se a expressão de Hadjidemetriou para o problema de Gyldén–Meščerskij.

Para obter as variações dos elementos orbitais devidas a esta força tangencial há que resolver o sistema (Contopoulos 1959)

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2va^2}{\mu} \mathcal{P}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{2(1-e^2)\cos E}{1-e\cos E} \frac{\mathcal{P}}{v'}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\sin E}{1-e\cos E} \frac{\mathcal{P}}{v'}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde  $\mathcal{P}$  é o módulo da força perturbativa, considerada positiva na direcção do movimento, e  $E$  a anomalia excêntrica.

A força perturbativa pode-se descompor em duas partes, de maneira que uma é a responsável da perda de massa dependente do tempo segundo o problema de Gyldén–Meščerskij

$$\vec{\mathcal{P}}_{GM} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t, \theta)} \vec{v},$$

enquanto a outra dá conta da perda de massa em função da posição na órbita

$$\vec{\mathcal{P}}_P = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\mu(t, \theta) r^2} p_\theta \vec{v}. \quad (2.19)$$

Para o cálculo das variações seculares por revolução dos elementos orbitais integra-se sobre a variável anomalia verdadeira ao longo de uma revolução:

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial\sigma}{\partial f} df$$

onde  $\sigma$  representa qualquer dos elementos orbitais. Distinguiremos entre a variação secular por revolução devida ao termo do problema de Gyldén–Meščerskij e a devida à perturbação,  $\Delta\sigma_{GM}$  e  $\Delta\sigma_P$ , respectivamente. A variação secular total será

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_{GM} + \Delta\sigma_P.$$

As variações seculares dos elementos orbitais devidos à componente  $\vec{\mathcal{P}}_{GM}$  foram obtidos por Hadjidemetriou (1963) num artigo que apresenta alguns erros tipográficos. A partir das equações de Lagrange, considerando que o movimento da linha das apsides  $\frac{\dot{\mu}(t)}{e}$  é desprezível, obteve

$$\begin{aligned}\Delta a_{GM} &= -2\pi c^3 \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu^3(t)} \quad (\text{sem corrigir}), \\ \Delta e_{GM} &= 0.\end{aligned}$$

No entanto, a expressão correcta para o semieixo maior, após a integração sobre a anomalia verdadeira, resulta ser

$$\Delta a_{GM} \simeq -\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \sqrt{\frac{a^5}{\mu(t)}}.$$

Portanto, o semieixo maior aumenta secularmente (considerando que  $\dot{\mu}(t) < 0$ ) ao tempo que a excentricidade permanece constante. Aliás, o incremento por revolução no semieixo maior é independente do valor da excentricidade enquanto apresenta uma forte dependência com o próprio valor do semieixo.

Para o argumento do periastro determina-se analogamente a variação secular por revolução a partir de

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{GM} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\text{sen } E}{1-e\cos E} \frac{\mathcal{P}_{GM}}{v} = -\frac{\dot{\mu}}{\mu} \frac{\text{sen } f}{e}.$$

E integrando da mesma maneira que para os elementos orbitais anteriores a expressão

$$\left(\frac{d\omega}{df}\right)_{GM} \simeq -\frac{\dot{\mu}}{\mu^3} \frac{G^3}{e} \frac{\text{sen } f}{(1+e\cos f)^2},$$

obtém-se a variação secular do argumento do periastro

$$\Delta\omega_{GM} \simeq 0.$$

Portanto, para o argumento do periastro não existirão variações seculares.

O que se fará agora será determinar quais são as variações seculares nestes mesmos elementos orbitais devidas à perturbação dada por (2.19). Assim, substituindo esta perturbação e a relação (2.15) em (2.18) obtém-se a variação temporal para o semieixo maior

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_P = \frac{2v a^2}{\mu} \mathcal{P}_P = \beta \frac{(1 + e \cos f)^2}{G(1 - e^2)^2} (1 + 2e \cos f + e^2).$$

Chega-se então a:

$$\left(\frac{da}{df}\right)_P \simeq \beta \frac{a}{\mu(1 - e^2)} (1 + 2e \cos f + e^2)$$

E integrando para uma revolução completa com respeito à anomalia verdadeira  $f$  como variável independente obtém-se a variação secular do semieixo maior por revolução

$$\Delta a_P \simeq \beta \frac{a}{\mu} \frac{1 + e^2}{1 - e^2}.$$

Agora o valor da variação secular por revolução depende linearmente do semieixo maior  $a$ , ao invés que no caso onde unicamente há perda de massa em função do tempo, apresenta uma forte dependência com a excentricidade.

Para a evolução secular da excentricidade tem-se que a variação temporal vem dada por

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_P = \frac{2(1 - e^2) \cos E}{1 - e \cos E} \frac{\mathcal{P}_P}{v} = \beta \frac{G}{\mu a^2 (1 - e^2)^2} (1 + e \cos f)^2 (e + \cos f),$$

onde temos tido em conta que

$$\begin{aligned}\cos E &= \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f}, \\ \text{sen } E &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos f} \text{sen } f.\end{aligned}$$

Novamente, integrando para uma revolução completa

$$\left(\frac{de}{df}\right)_P \simeq \beta \frac{1}{\mu} (e + \cos f).$$

E a correspondente variação secular da excentricidade virá dada por

$$\Delta e_P \simeq \beta \frac{e}{\mu}.$$

Assim, ao termos em conta a perturbação, a excentricidade aumenta secularmente em relação directamente proporcional ao seu próprio valor.

Finalmente, a variação temporal no caso do argumento do periastro resulta

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_P = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\text{sen } E}{1 - e \cos E} \frac{\mathcal{P}_P}{v} = \beta \frac{1}{e\mu} \frac{G}{a^2 \eta^4} (1 + e \cos f)^2 \text{sen } f.$$

Analogamente, a partir de

$$\left(\frac{d\omega}{df}\right)_P \simeq \beta \frac{1}{e\mu} \text{sen } f$$

determina-se a variação secular do argumento do periastro

$$\Delta\omega_p \simeq 0.$$

De modo que, o mesmo que no caso com massa variável unicamente dependente do tempo, também não aparecem variações seculares do argumento do periastro.

Tabela 2.2: VARIAÇÕES SECULARES DOS ELEMENTOS ORBITAIS DEVIDAS À PERDA DE MASSA EM FUNÇÃO DO TEMPO (GYLDÉN–MEŠČERSKIJ) E À PERTURBAÇÃO CONSIDERADA.

VARIAÇÃO SECULAR	GYLDÉN–MEŠČERSKIJ	EFEITO PERIASTRO
$\Delta a$	$-\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \sqrt{\frac{a^5}{\mu(t)}}$	$\beta \frac{a}{\mu} \frac{1+e^2}{1-e^2}$
$\Delta e$	0	$\beta \frac{e}{\mu}$
$\Delta\omega$	0	0

Um resumo dos resultados para o problema de Gyldén–Meščerskij e dos obtidos aqui para esta perturbação mostra-se na Tabela 2.2. À vista destes resultados podem-se enunciar as consequências mais destacadas que a inclusão de uma perturbação deste tipo tem na variação secular dos elementos orbitais:

- Semieixo maior: No caso perturbado aparece uma tendência a crescer muito dependente da excentricidade, que se sobreporá ao crescimento secular no caso sem perturbar.
- Excentricidade: A diferença do que acontece com o problema de massa variável em função do tempo em que, desprezando o movimento da linha das apsides, Hadjidemetriou tinha obtido que não existia nenhuma tendência secular para a excentricidade, no caso

perturbado existirá uma tendência a aumentar secularmente. Este crescimento dependerá do próprio valor da excentricidade, aumentando linearmente com esta em cada revolução.

- Argumento do periastro: Em ambos os casos apresenta unicamente variações periódicas e nenhuma tendência secular.

É necessário notar que as diferentes formulações que se realizam para a mesma lei de variação de massa, a exposta em § 2.3 (ver também § 2.7.2) e a levada a cabo nesta subsecção, conduzem a diferentes problemas mecânicos e, portanto, a comportamentos diferentes na evolução dos elementos orbitais.

### 2.7.2 Perturbações externas: um caso particular

Como vimos em § 2.3, existem certos sistemas hamiltonianos que apresentam sérias dificuldade para a sua integração analítica. Por exemplo, o sistema descrito pela hamiltoniana (2.2) em variáveis polares–nodais

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu(t, \theta)}{r}, \quad (2.20)$$

onde

$$\mu(t, \theta) = \mu(t) - \beta \theta.$$

Formalmente, esta é a hamiltoniana de um sistema em que existe perda de massa por efeito periastro tal e como se deduz da expressão anterior. Como se indicou em § 2.3 o seu tratamento analítico resulta difícil, e mesmo a obtenção da hamiltoniana em variáveis de Delaunay com o fim de determinar as equações de Lagrange que dão as variações dos elementos orbitais não é em absoluto trivial. De facto, é a própria dependência funcional da massa, onde aparece a variável  $\theta$  explicitamente, a que complica a obtenção da função geratriz da transformação canónica.

Porém, a hamiltoniana (2.20) é também a de um problema de Gylden-Meščerskij (sem efeito periastro) onde se tem uma perturbação ‘externa’ que depende de  $\theta$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu(t)}{r} + \beta \frac{\theta}{r}. \quad (2.21)$$

É importante notar que agora a massa do sistema  $\mu(t)$  unicamente apresenta variação em função do tempo. Neste novo cenário sim é possível aplicar algumas técnicas analíticas com o fim de obter uma descrição do comportamento do sistema. Em particular, realizaremos uma transformação canónica para obter a hamiltoniana em variáveis de Delaunay e a partir daí as equações do movimento.

### Hamiltoniana em variáveis canónicas de Delaunay

A transformação canónica que se levará a cabo permitirá a transformação da hamiltoniana dada no conjunto de variáveis polares-nodais (2.21) em outra nova que virá dada nas variáveis de Delaunay. Considera-se a transformação canónica no espaço de fases de 6 dimensões

$$\mathcal{S} : (r, \theta, v; p_r, p_\theta, p_v; \mu(t)) \longrightarrow (\ell, g, h; L, G, H), \quad (2.22)$$

com o domínio de validade dado pelo subconjunto de  $\mathbb{R}^6$

$$\Delta_D = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \times (0, +\infty) \times [0, L) \times (-G, +G).$$

Esta função geratriz  $\mathcal{S}$ , de *segundo tipo* na terminologia de Goldstein (1980), obtém-se como solução completa da equação de Hamilton–Jacobi (Stiefel e Scheifele 1971) e está definida implicitamente por

$$\mathcal{S}(r, \theta, v; L, G, H; \mu(t)) = \theta G + v H + \int_{r_0}^r \sqrt{Q} dr, \quad (2.23)$$

que depende das coordenadas do sistema antigo e dos momentos do novo. A quantidade  $r_0$  é o menor zero positivo da equação em  $r$  para  $Q = 0$ .

O integrando vem dado pela raiz quadrada de

$$Q \equiv Q_{DG}(r, -, -; L, G, -; \mu(t)) = \frac{2\mu(t)}{r} - \frac{\mu^2(t)}{L^2} - \frac{G^2}{r^2},$$

onde  $r_0 = r_0(L, G; \mu(t))$  é a menor raiz positiva da equação em  $r$  dada por  $Q = 0$ . O subíndice  $DG$  faz referência ao conjunto de variáveis canônicas de Delaunay generalizadas ou também, neste contexto, de Delaunay–Gyldén.

A transformação gerada por  $\mathcal{S}$  precisa o cálculo das quadraturas

$$I_m = \int_{r_0}^r \frac{1}{r^m \sqrt{Q}} dr, \quad m = 0, 1, 2.$$

A primeira,  $I_0$ , está relacionada com a forma integral da equação de Kepler e para a sua determinação precisa a introdução de uma anomalia tipo excêntrica  $E$ , em termos da qual também se obtém  $I_1$ . Para a resolução de  $I_2$  haverá que considerar a equação polar da cônica em coordenadas polares planas, introduzindo assim uma anomalia tipo verdadeira  $f$ .

As equações de transformação geradas por (2.22) e (2.23) são

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} = \sqrt{Q}, & \ell &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial L} = \frac{\mu^2(t)}{L^3} I_0, \\ p_\theta &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} = G, & g &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial G} = \theta - G I_2, \\ p_v &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial v} = H, & h &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial H} = v. \end{aligned}$$

Para obter as quadraturas e completar as equações de transformação definem-se as quantidades subsidiárias

$$\begin{aligned} a &\equiv a(L; t), & \text{tal que } L^2 &= \mu a, \\ p &\equiv p(G; t), & \text{tal que } G^2 &= \mu p, \\ \eta &\equiv \eta(L, G), & \text{tal que } G &= L \eta, \\ e &\equiv e(L; G), & \text{tal que } e^2 + \eta^2 &= 1, \end{aligned}$$

e obtém-se a descomposição de  $Q$

$$Q = \frac{\mu(t) a e^2}{r^2} \left[ 1 - \left( \frac{a-r}{a e} \right)^2 \right], \quad r_0 = a(1-e). \quad (2.24)$$

Utilizando uma variável de integração auxiliar tipo anomalia excêntrica  $E \equiv E(r; L, G; \mu(t))$  para fazer a substituição de  $r$  por  $E$

$$\begin{aligned} \frac{a-r}{a e} &= \cos E \Rightarrow r(E) = a(1 - e \cos E), \\ dr &= a e \operatorname{sen} E dE, \end{aligned}$$

a expressão (2.24) transforma-se em

$$Q = \frac{\mu(t) e^2 \operatorname{sen} E}{a(1 - e \cos E)^2} = \frac{\mu(t) a e^2 \operatorname{sen}^2 E}{r^2(E)},$$

de modo que a quadratura  $I_0$  virá dada por

$$I_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu(t)}} (E - e \operatorname{sen} E) = \frac{L^3}{\mu^2(t)} (E - e \operatorname{sen} E).$$

Então, a equação de Delaunay para  $\ell$  é a *equação de Kepler*:

$$\ell = E - e \operatorname{sen} E.$$

Para o cálculo da quadratura  $I_2$  introduz-se outra variável auxiliar de integração tipo anomalia verdadeira  $f \equiv f(r; L, G; \mu(t))$  definida por

$$r(f) = \frac{p}{1 + e \cos(f)},$$

com o qual  $Q$  se transforma em

$$Q = \frac{\mu(t) e^2}{p} \operatorname{sen}^2 f,$$

de modo que a quadratura  $I_2$  será

$$I_2 = \frac{f}{G}.$$

Obtêm-se assim as fórmulas de transformação

$$\ell = E - e \operatorname{sen} E,$$

$$g = \theta - f,$$

$$h = v,$$

$$L = \sqrt{\mu(t)a},$$

$$G = p_\theta,$$

$$H = G \cos i = p_v,$$

A hamiltoniana original (2.2) é expressada mediante estas variáveis de Delaunay generalizadas de acordo com a teoria geral de transformações canônicas definidas por uma função geratriz dependente do tempo

$$\mathcal{H}^* \equiv \mathcal{H}^*(\ell, g, -; L, G, -; t) = -\frac{\mu^2(t)}{2L^2} + \mathcal{P}^* + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}.$$

Das expressões (2.22) e (2.23), o resto da transformação canônica é

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = \dot{\mu}(t) I_1 - \frac{\mu(t)\dot{\mu}(t)}{L^2} I_0, \quad (2.25)$$

$$\text{com } \dot{\mu}(t) \equiv \frac{d\mu(t)}{dt}.$$

Por último, a quadratura  $I_1$  determina-se como

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{r_0}^r \frac{dr}{r\sqrt{Q}} = \int_0^E \frac{a e \operatorname{sen} E r(E)}{r(E) L e \operatorname{sen} E} dE = \int_0^E \frac{a}{L} dE = \\ &= E \sqrt{\frac{a}{\mu(t)}} = \frac{L}{\mu(t)} E. \end{aligned}$$

Portanto, o resto da transformação (2.25) expressar-se-á finalmente como

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} L e \operatorname{sen} E.$$

E a hamiltoniana transformada nestas variáveis de Delaunay

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^* &\equiv \mathcal{H}^*(\ell, g, -; L, G, -; t) = \\ &= -\frac{\mu^2(t)}{2L^2} + \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} L e \operatorname{sen} E + \beta \frac{\mu(t)}{G^2} (f + g) (1 + e \cos f), \end{aligned}$$

onde o último termo é a perturbação nas novas variáveis.

### Equações canônicas do movimento

As equações canônicas do movimento que regem o movimento de dois corpos com massa decrescente submetidos à perturbação dada em (2.21) serão

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial L} = \frac{\mu^2(t)}{L^3} + \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \left( e \operatorname{sen} E + \frac{\eta}{e} \operatorname{sen} f \right) \\ &\quad + \beta \frac{1}{e L G^2} \operatorname{sen} f (2 + e \cos f) [1 + e \cos f - (f + g) e \operatorname{sen} f], \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial G} = -\frac{\dot{\mu}(t) \operatorname{sen} f}{\mu(t) e} \\ &\quad - \beta \frac{\mu(t)}{e G^3} \left[ 2e(f + g)(1 + e \cos f) + \operatorname{sen} f (2 + e \cos f) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot [1 + e \cos f - (f + g) e \operatorname{sen} f] \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \ell} = -\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} L \frac{e \cos E}{1 - e \cos E} \\ &\quad -\beta \frac{\mu(t)}{G^2 \eta^3} (1 + e \cos f)^2 [1 + e \cos f - (f + g)e \sin f], \\ \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial g} = -\beta \frac{\mu(t)}{G^2} (1 + e \cos f),\end{aligned}$$

onde  $\eta = \sqrt{1 - e^2}$ .

Este sistema de equações transforma-se no obtido por Deprit (1983) para o problema de Gylden–Meščerskij sem perturbar tomando  $\beta = 0$ . A diferença do sistema obtido por Deprit, a última das equações implica que o momento angular do sistema não é uma constante do movimento. Se sendo  $\beta = 0$  fazemos  $\dot{\mu} = 0$ , então obtêm-se as equações do movimento para o problema de Kepler.

### Equações de Lagrange e variações seculares

Para deduzir directamente as equações que ligam a variação dos elementos orbitais, as denominadas equações de Lagrange, teremos que substituir as equações canónicas do movimento obtidas no apartado anterior nas expressões:

$$\begin{aligned}da &= 2 \frac{a}{L} dL - \frac{a}{\mu} d\mu, \\ de &= \frac{1 - e^2}{e} \left( \frac{dL}{L} - \frac{dG}{G} \right),\end{aligned}$$

$$dE = \frac{a}{r} d\ell + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{sen} f de,$$

$$df = \frac{1}{1-e^2} \operatorname{sen} f de + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{a}{r} dE.$$

Obtêm-se assim

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\dot{\mu}}{\mu} a \frac{1+2e \cos f + e^2}{1-e^2}$$

$$-\beta \frac{2}{G \eta^4} (1+e \cos f)^2 [1+e \cos f - (f+\omega) e \operatorname{sen} f],$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\dot{\mu}}{\mu} (e + \cos f)$$

$$-\beta \frac{\mu}{G^3} (1+e \cos f)^2 \left[ \cos f + \frac{e + \cos f}{1+e \cos f} - (f+\omega) \operatorname{sen} f \right],$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\dot{\mu}}{\mu} \frac{\operatorname{sen} f}{e}$$

$$-\beta \frac{\mu}{e G^3} \left[ 2e(f+\omega)(1+e \cos f) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen} f (2+e \cos f) \cdot (1 - (f+\omega) e \operatorname{sen} f) \right],$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{G(1+e \cos f)^2}{a^2(1-e^2)^2} + \frac{\dot{\mu}}{\mu} \frac{\operatorname{sen} f}{e}$$

$$+\beta \frac{\mu}{e G^3} \left[ 2e(f+\omega)(1+e \cos f) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen} f (2+e \cos f) \cdot (1 - (f+\omega) e \operatorname{sen} f) \right],$$

onde  $a$  e  $e$  estão ligadas com  $\mu \equiv \mu(t)$  através do momento angular do sistema segundo

$$G = \sqrt{\mu(t) a (1 - e^2)}.$$

A partir da análise destas equações é possível obter o comportamento qualitativo do sistema com respeito aos elementos orbitais, além das suas variações seculares por revolução. As provocadas pela perda de massa unicamente dependente do tempo foram obtidas já em 2.7.1. Agora calcularemos, a partir dos termos factorizados por  $\beta$ , aquelas introduzidas pela perturbação que se está a considerar.

- Semieixo maior: A perturbação provoca o efeito contrário ao caso em que se perde massa unicamente em função do tempo, isto é, uma diminuição secular

$$\Delta a_p \simeq -\beta \frac{2a}{\mu} \frac{1}{1-e} < 0.$$

- Excentricidade: A evolução secular correspondente à perturbação virá dada por

$$\Delta e_p \simeq -\beta \frac{1+e-\sqrt{1-e^2}}{\mu e} < 0,$$

de modo que esta tenderá a diminuir a excentricidade do sistema.

Supondo, como é habitual, que a influência do termo perturbativo é menor que a do termo a ordem zero, dado neste caso pela hamiltoniana do problema de Gylden–Meščerskij —o qual é de por si um problema de Kepler perturbado—, a tendência global do semieixo maior será a aumentar secularmente. Porém, no caso da excentricidade, as variações periódicas produzidas pelo termo à ordem zero, terão sobreposta uma componente que fará que a excentricidade diminua secularmente. Estas variações seculares aparecem resumidas na Tabela (2.3).

Tabela 2.3: VARIAÇÕES SECULARES DOS ELEMENTOS ORBITAIS DEVIDAS À PERDA DE MASSA EM FUNÇÃO DO TEMPO (GYLDÉN–MEŠČERSKIJ) E DEVIDAS À PERTURBAÇÃO CONSIDERADA.

VARIAÇÃO SECULAR	GYLDÉN–MEŠČERSKIJ	PERTURBAÇÃO
$\Delta a$	$-\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \sqrt{\frac{a^5}{\mu(t)}}$	$-\beta \frac{2a}{\mu} \frac{1}{1-e}$
$\Delta e$	0	$-\beta \frac{1+e-\sqrt{1-e^2}}{\mu e}$

## Capítulo 3

# Método canónico de perturbações $N$ -paramétrico baseado em transformações de Lie

*“Although this may seem a paradox,  
all exact science is dominated by the  
idea of approximation.” \**

BERTRAND RUSSELL (1872–1970)

### 3.1 Introdução

A necessidade de resolver equações diferenciais não lineares aparece no estudo de muitos problemas dinâmicos. Dado que, em geral, a solução exacta não se pode obter por meio dos métodos clássicos de integração, faz-se necessário utilizar métodos analíticos ou numéricos alternativos.

---

\* “Embora possa parecer um paradoxo, toda a ciência exacta é dominada pela ideia de aproximação.” Citado em *The Viking Book of Aphorisms*, 1966.

Aos primeiros pertencem os métodos canónicos de perturbações baseados em desenvolvimentos assintóticos e aplicáveis a sistemas diferenciais perturbados.

Na segunda metade do século passado foram desenvolvidos diferentes métodos baseados na teoria de transformações de Lie com o fim de tratar diferentes problemas perturbados. A primeira versão destes, a qual utiliza uma família de difeomorfismos dependente de um pequeno parâmetro foi dada por Hori (1966) e Deprit (1969). Apesar de que ambos métodos são equivalentes (Campbell e Jefferys 1970; Henrard e Roels 1974), não são idênticos. Mais tarde, Kamel (1970) e Henrard (1970) fizeram generalizações destes para sistemas arbitrários de equações diferenciais.

A grande generalidade das transformações de Lie permite resolver problemas perturbados que são muito difíceis de abordar utilizando outras técnicas. Aliás, as transformações de Lie definem de maneira natural um tipo de transformações canónicas em séries de potências de um pequeno parâmetro. As teorias de perturbações baseadas nesta técnica (Budría 1980; Pétriz 1980) permitem obter soluções aproximadas de sistemas de equações diferenciais não lineares que podem ser tomados como uma perturbação de um sistema integrável. A intenção é que o sistema canónico transformado possua alguma propriedade especial: ser mais facilmente integrável, carecer de alguma das variáveis, ser separável, etc.

Todos estes métodos estão baseados na determinação de uma transformação canónica de Lie do tipo:

$$x = e^{\varepsilon Y} y = y + \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} x^{(n)} y,$$

dada por uma função geratriz  $\mathcal{W}(t, x, \varepsilon)$ .

Apesar de que algumas extensões destes métodos foram dadas para dois (Ribera 1981; Abad e Ribera 1984; Varadi 1985) e três parâmetros (Ahmed 1993; Andrade 2002, 2003), até agora não se tinha realizado a generalização completa. Assim, com o propósito de mostrar o comportamento

dinâmico de alguns sistemas complexos susceptíveis de serem descritos em função de um número arbitrário de pequenos parâmetros, constrói-se neste capítulo um método canónico baseado em transformações de Lie com um número indefinido de parâmetros.

### 3.2 Transformação de uma hamiltoniana mediante um grupo $N$ -paramétrico de transformações completamente canónicas

Consideremos um sistema dinâmico com  $n$  graus de liberdade definido pela hamiltoniana  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\vec{x}, t; \varepsilon)$ , onde  $\vec{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{X}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , sendo  $\mathbf{x}$  as coordenadas e  $\mathbf{X}$  os momentos. O sistema canónico associado que descreve a evolução dinâmica do sistema é

$$\dot{\vec{x}} = J \nabla_{\vec{x}} \mathcal{H},$$

onde  $J$  é a matriz simpléctica ( $J^{-1} = J^T = -J$ )

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix},$$

com  $0_n$  e  $I_n$  as matrizes nula e unidade de ordem  $n$ , respectivamente.

Suponhamos que a hamiltoniana se pode desenvolver em série de potências de um parâmetro  $N$ -dimensional  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$  pertencente a uma vizinhança  $U_0$  da origem  $(0, 0, \dots, 0)$  de  $\mathbb{R}^N$ , com  $N \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\vec{x}, t; \varepsilon) &= \mathcal{H}_0(\vec{x}, t) + \sum_{j_N \geq 1} \frac{1}{j_N!} \sum_{j_{N-1}=0}^{j_N} \dots \\ &\dots \sum_{j_2=0}^{j_3} \sum_{j_1=0}^{j_2} \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2-j_1} \dots \varepsilon_N^{j_N-j_{N-1}} \mathcal{H}_{j_1, j_2-j_1, \dots, j_N-j_{N-1}}(\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde

$$\mathcal{H}_{j_1, j_2-j_1, \dots, j_N-j_{N-1}}(\vec{x}, t) \equiv \binom{j_N}{j_{N-1}} \dots \binom{j_2}{j_1} \frac{\partial_1^j}{\partial \varepsilon_1^{j_1}} \frac{\partial^{j_2-j_1}}{\partial \varepsilon_2^{j_2-j_1}} \dots \frac{\partial^{j_N-j_{N-1}}}{\partial \varepsilon_N^{j_N-j_{N-1}}} \mathcal{H}(\vec{x}, t; 0).$$

Agora consideremos o grupo de Lie  $N$ -paramétrico de transformações canônicas  $G_N$  do espaço de fases estendido  $\mathbb{R}^{2n+N}$  do tipo

$$\vec{x} = e^{Y_\varepsilon} \vec{y},$$

onde o operador  $Y_\varepsilon$  está definido mediante os colchetes de Poisson como

$$Y_\varepsilon = \{-; \mathcal{W}_\varepsilon\},$$

sendo  $\mathcal{W}_\varepsilon(\vec{y}, t)$  a função geratriz da transformação. Esta pode-se expressar em série de potências como

$$\mathcal{W}_\varepsilon(\vec{y}, t; \varepsilon) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \mathcal{W}^i(\vec{y}, t; \varepsilon_i). \quad (3.2)$$

onde

$$\mathcal{W}^i(\vec{y}, t; \varepsilon_i) = \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon_i^j}{j!} \mathcal{W}_{j+1}^i(\vec{y}, t), \quad i = 1, \dots, N.$$

A sua canonicidade pode-se demonstrar tendo em conta que a função geratriz é soma de  $N$  partes independentes, de modo que cada uma delas é solução das equações de Hamilton de um sistema dinâmico de hamiltoniana  $\mathcal{W}^i$  e tempo  $\varepsilon_i$ .

Além disso, podemos escrever  $Y_\varepsilon$  como

$$Y_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i Y_i,$$

com  $Y_i = \{-; \mathcal{W}^i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

PROPOSIÇÃO 1:

O transformado da hamiltoniana (3.1) vem dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^*(\vec{y}, t; \varepsilon) &= \mathcal{H}_0(\vec{y}, t) + \sum_{j_N \geq 1} \frac{Y_\varepsilon^{j_N}}{j_N!} \mathcal{H}_0(\vec{y}, t) + \\ &+ \sum_{j_N \geq 1} \left[ \frac{1}{j_N!} \sum_{j_{N-1}=0}^{j_N} \dots \sum_{j_2=0}^{j_3} \sum_{j_1=0}^{j_2} \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2-j_1} \dots \varepsilon_N^{j_N-j_{N-1}} \cdot \right. \\ &\left. \cdot \left[ \mathcal{H}_{j_1, j_2-j_1, \dots, j_N-j_{N-1}}(\vec{y}, t) + \sum_{i \geq 1} \frac{Y_\varepsilon^i}{i!} \mathcal{H}_{j_1, j_2-j_1, \dots, j_N-j_{N-1}}(\vec{y}, t) \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

DEMONSTRAÇÃO 1:

A expansão (3.1) pode pôr-se como

$$\mathcal{H}(\vec{x}, t; \varepsilon) = \mathcal{H}_0(\vec{x}, t) + \sum_{j_N \geq 1} F_{j_N}(\vec{x}, t; \varepsilon), \quad (3.4)$$

onde

$$F_{j_N}(\vec{x}, t; \varepsilon) \equiv \frac{1}{j_N!} \sum_{j_{N-1}=0}^{j_N} \dots \sum_{j_2=0}^{j_3} \sum_{j_1=0}^{j_2} \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2-j_1} \dots \varepsilon_N^{j_N-j_{N-1}} \cdot \mathcal{H}_{j_1, j_2-j_1, \dots, j_N-j_{N-1}}(\vec{x}, t). \quad (3.5)$$

Pode-se demonstrar (tal e como faz Ribera (1981) para 2 parâmetros) que  $\forall j_N \geq 1$ , a função  $F_{j_N}(\vec{x}, t; \varepsilon)$  é uma função homogênea de grau  $j_N$  nas variáveis  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$ .

Aliás,  $F$  é um campo escalar diferenciável definido em  $\mathbb{R}^{2n+N}$ ; a sua transformada também é um campo escalar que se pode pôr na forma

$$F^*(\vec{y}, t; \varepsilon) \equiv \sum_{j_N \geq 0} \frac{Y_\varepsilon^{j_N}}{j_N!} F(\vec{y}, t). \quad (3.6)$$

Então, de (3.4) e (3.6) chega-se:

$$\mathcal{H}^*(\vec{y}, t; \varepsilon) = \mathcal{H}_0^*(\vec{y}, t; \varepsilon) + \sum_{j_N \geq 1} F_{j_N}^*(\vec{y}, t; \varepsilon), \quad (3.7)$$

mas também

$$\mathcal{H}_0^*(\vec{y}, t; \varepsilon) = \sum_{j_N \geq 0} \frac{Y_\varepsilon^{j_N}}{j_N!} \mathcal{H}_0(\vec{y}, t) = \mathcal{H}_0(\vec{y}, t) + \sum_{j_N \geq 1} \frac{Y_\varepsilon^{j_N}}{j_N!} \mathcal{H}_0(\vec{y}, t). \quad (3.8)$$

Por outro lado, de (3.5) e (3.6) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 F_{j_N}^*(\vec{y}, t; \varepsilon) &\equiv \frac{1}{j_N!} \sum_{j_{N-1}=0}^{j_N} \dots \sum_{j_2=0}^{j_3} \sum_{j_1=0}^{j_2} \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2-j_1} \dots \varepsilon_N^{j_N-j_{N-1}} \cdot \\
 &\quad \cdot \mathcal{H}_{j_1, j_2-j_1, \dots, j_N-j_{N-1}}^*(\vec{y}, t) = \\
 &= \frac{1}{j_N!} \sum_{j_{N-1}=0}^{j_N} \dots \sum_{j_2=0}^{j_3} \sum_{j_1=0}^{j_2} \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2-j_1} \dots \varepsilon_N^{j_N-j_{N-1}} \cdot \\
 &\quad \cdot \sum_{i \geq 0} \frac{Y_\varepsilon^i}{i!} \mathcal{H}_{j_1, j_2-j_1, \dots, j_N-j_{N-1}}(\vec{y}, t) = \\
 &= \frac{1}{j_N!} \sum_{j_{N-1}=0}^{j_N} \dots \sum_{j_2=0}^{j_3} \sum_{j_1=0}^{j_2} \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2-j_1} \dots \varepsilon_N^{j_N-j_{N-1}} \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \mathcal{H}_{j_1, j_2-j_1, \dots, j_N-j_{N-1}}(\vec{y}, t) + \sum_{i \geq 1} \frac{Y_\varepsilon^i}{i!} \mathcal{H}_{j_1, j_2-j_1, \dots, j_N-j_{N-1}}(\vec{y}, t) \right]
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Se substituirmos (3.8) e (3.9) em (3.7) resulta (3.3), tal e como se pretendia provar.  $\blacktriangle$

A denominada função resto da transformação canónica não conservativa é

$$\mathcal{R}(\vec{y}, t; \varepsilon) = - \sum_{j_{N-1} \geq 1} \frac{Y_\varepsilon^{j_{N-1}-1}}{j_{N-1}!} \mathcal{W}_{\varepsilon t}, \tag{3.10}$$

onde

$$\mathcal{W}_{\varepsilon t} \equiv \frac{\partial \mathcal{W}_\varepsilon}{\partial t}.$$

Esta função verifica

$$\nabla_{\vec{y}} \mathcal{R} = -J \vec{y}_t.$$

Após a transformação o novo sistema canônico resulta

$$\dot{\vec{y}} = J \nabla_{\vec{y}} \mathcal{K},$$

onde a hamiltoniana está dada por

$$\mathcal{K}(\vec{y}, t; \varepsilon) = \mathcal{H}^*(\vec{y}, t; \varepsilon) + \mathcal{R}(\vec{y}, t; \varepsilon), \quad (3.11)$$

a qual, como se viu, pode desenvolver-se em série de potências dos parâmetros como

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\vec{y}, t; \varepsilon) &= \mathcal{K}_0(\vec{y}, t) + \sum_{j_N \geq 1} \frac{1}{j_N!} \sum_{j_{N-1}=0}^{j_N} \dots \\ &\dots \sum_{j_2=0}^{j_3} \sum_{j_1=0}^{j_2} \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2-j_1} \dots \varepsilon_N^{j_N-j_{N-1}} \mathcal{K}_{j_1, j_2-j_1, \dots, j_N-j_{N-1}}(\vec{y}, t). \end{aligned}$$

### 3.3 Desenvolvimento da função geratriz em série de potências de $N$ parâmetros

Suponha-se, tal e como se viu em (3.2), que as componentes  $\mathcal{W}^i$  da função geratriz  $\mathcal{W}_\varepsilon$  se podem desenvolver em série de potências das componentes do parâmetro  $N$ -dimensional  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$ :

$$\mathcal{W}_\varepsilon(\vec{y}, t; \varepsilon) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \mathcal{W}^i(\vec{y}, t; \varepsilon_i),$$

onde

$$\mathcal{W}^i(\vec{y}, t; \varepsilon_i) = \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon_i^j}{j!} \mathcal{W}_{j+1}^i(\vec{y}, t) \quad i = 1, \dots, N.$$

Tendo em conta os razoamentos prévios podemos pôr o operador  $Y_\varepsilon$  como

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \{-; \mathcal{W}^i\} = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \left\{ -; \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon_i^j}{j!} \mathcal{W}_{j+1}^i \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon_i^j}{j!} \{-; \mathcal{W}_{j+1}^i\} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon_i^{j+1}}{j!} \{-; \mathcal{W}_{j+1}^i\}, \end{aligned}$$

ou também na forma

$$Y_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon_i^{j+1}}{j!} \mathcal{L}_{j+1}^i$$

se definimos o *operador de Lie*

$$\mathcal{L}_j^i = \{-; \mathcal{W}_j^i\}.$$

Em geral, tem-se

$$\mathcal{L}_{j_1, \dots, j_n}^{i_1, \dots, i_n} = \left\{ \left\{ \dots \{-; \mathcal{W}_{j_n}^{i_n}\}; \dots \right\}; \mathcal{W}_{j_1}^{i_1} \right\}.$$

Para o mesmo caso, pode-se provar por indução que

$$Y_\varepsilon^n = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N \sum_{j_1, \dots, j_n \geq 0} \frac{\varepsilon_{i_1}^{j_1+1} \varepsilon_{i_2}^{j_2+1} \dots \varepsilon_{i_n}^{j_n+1}}{j_1! j_2! \dots j_n!} \mathcal{L}_{j_1+1, j_2+1, \dots, j_n+1}^{i_1, i_2, \dots, i_n}.$$

### 3.4 Aplicação: método 4-paramétrico

Particularizando para 4 parâmetros e utilizando o código para *Mathematica*<sup>®</sup> que se mostra no Apêndice A, obtêm-se, até à segunda ordem, as correspondentes relações que, uma vez substituídas em (3.3) fornecem as expressões para a hamiltoniana transformada

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^* = & \mathcal{H}_0^* + \varepsilon_1 \mathcal{H}_{1000}^* + \varepsilon_2 \mathcal{H}_{0100}^* + \varepsilon_3 \mathcal{H}_{0010}^* + \varepsilon_4 \mathcal{H}_{0001}^* \\
& + \frac{\varepsilon_1^2}{2} \mathcal{H}_{2000}^* + \frac{\varepsilon_2^2}{2} \mathcal{H}_{0200}^* + \frac{\varepsilon_3^2}{2} \mathcal{H}_{0020}^* + \frac{\varepsilon_4^2}{2} \mathcal{H}_{0002}^* \\
& + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \mathcal{H}_{1100}^* + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{2} \mathcal{H}_{1010}^* + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_4}{2} \mathcal{H}_{1001}^* \\
& + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{2} \mathcal{H}_{0110}^* + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_4}{2} \mathcal{H}_{0101}^* + \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_4}{2} \mathcal{H}_{0011}^* + O(\varepsilon^3), \quad (3.12)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0^* &= \mathcal{H}_0, \\
\mathcal{H}_{1000}^* &= \mathcal{L}_1^1 \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{1000}, \\
\mathcal{H}_{0100}^* &= \mathcal{L}_1^2 \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{0100}, \\
\mathcal{H}_{0010}^* &= \mathcal{L}_1^3 \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{0010}, \\
\mathcal{H}_{0001}^* &= \mathcal{L}_1^4 \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{0001}, \\
\mathcal{H}_{2000}^* &= 2\mathcal{L}_2^1 \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_{11}^{11} \mathcal{H}_0 + 2\mathcal{L}_1^1 \mathcal{H}_{1000} + \mathcal{H}_{2000}, \\
\mathcal{H}_{0200}^* &= 2\mathcal{L}_2^2 \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_{11}^{22} \mathcal{H}_0 + 2\mathcal{L}_1^2 \mathcal{H}_{0100} + \mathcal{H}_{0200}, \\
\mathcal{H}_{0020}^* &= 2\mathcal{L}_2^3 \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_{11}^{33} \mathcal{H}_0 + 2\mathcal{L}_1^3 \mathcal{H}_{0010} + \mathcal{H}_{0020}, \\
\mathcal{H}_{0002}^* &= 2\mathcal{L}_2^4 \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_{11}^{44} \mathcal{H}_0 + 2\mathcal{L}_1^4 \mathcal{H}_{0001} + \mathcal{H}_{0002},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{1100}^* &= (\mathcal{L}_{11}^{12} + \mathcal{L}_{11}^{21}) \mathcal{H}_0 + 2\mathcal{L}_1^1 \mathcal{H}_{0100} + 2\mathcal{L}_1^2 \mathcal{H}_{1000} + \mathcal{H}_{1100}, \\
\mathcal{H}_{1010}^* &= (\mathcal{L}_{11}^{13} + \mathcal{L}_{11}^{31}) \mathcal{H}_0 + 2\mathcal{L}_1^1 \mathcal{H}_{0010} + 2\mathcal{L}_1^3 \mathcal{H}_{1000} + \mathcal{H}_{1010}, \\
\mathcal{H}_{1001}^* &= (\mathcal{L}_{11}^{14} + \mathcal{L}_{11}^{41}) \mathcal{H}_0 + 2\mathcal{L}_1^1 \mathcal{H}_{0001} + 2\mathcal{L}_1^4 \mathcal{H}_{1000} + \mathcal{H}_{1001}, \\
\mathcal{H}_{0110}^* &= (\mathcal{L}_{11}^{23} + \mathcal{L}_{11}^{32}) \mathcal{H}_0 + 2\mathcal{L}_1^2 \mathcal{H}_{0010} + 2\mathcal{L}_1^3 \mathcal{H}_{0100} + \mathcal{H}_{0110}, \\
\mathcal{H}_{0101}^* &= (\mathcal{L}_{11}^{24} + \mathcal{L}_{11}^{42}) \mathcal{H}_0 + 2\mathcal{L}_1^2 \mathcal{H}_{0001} + 2\mathcal{L}_1^4 \mathcal{H}_{0100} + \mathcal{H}_{0101}, \\
\mathcal{H}_{0011}^* &= (\mathcal{L}_{11}^{34} + \mathcal{L}_{11}^{43}) \mathcal{H}_0 + 2\mathcal{L}_1^3 \mathcal{H}_{0001} + 2\mathcal{L}_1^4 \mathcal{H}_{0010} + \mathcal{H}_{0011}.
\end{aligned}$$

E ao fazer a substituição anterior em (3.10) obtém-se a função resto

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \varepsilon_1 \mathcal{R}_{1000} + \varepsilon_2 \mathcal{R}_{0100} + \varepsilon_3 \mathcal{R}_{0010} + \varepsilon_4 \mathcal{R}_{0001} \\
&\quad + \frac{\varepsilon_1^2}{2} \mathcal{R}_{2000} + \frac{\varepsilon_2^2}{2} \mathcal{R}_{0200} + \frac{\varepsilon_3^2}{2} \mathcal{R}_{0020} + \frac{\varepsilon_4^2}{2} \mathcal{R}_{0002} \\
&\quad + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \mathcal{R}_{1100} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{2} \mathcal{R}_{1010} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_4}{2} \mathcal{R}_{1001} \\
&\quad + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{2} \mathcal{R}_{0110} + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_4}{2} \mathcal{R}_{0101} + \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_4}{2} \mathcal{R}_{0011} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \tag{3.13}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{1000} &= \mathcal{W}_{1f'}^1, \\
\mathcal{R}_{0100} &= \mathcal{W}_{1f'}^2, \\
\mathcal{R}_{0010} &= \mathcal{W}_{1f'}^3, \\
\mathcal{R}_{0001} &= \mathcal{W}_{1f'}^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{2000} &= \mathcal{L}_1^1 \mathcal{W}_{1t}^1 + 2\mathcal{W}_{2t'}^1, \\
\mathcal{R}_{0200} &= \mathcal{L}_1^2 \mathcal{W}_{1t}^2 + 2\mathcal{W}_{2t'}^2, \\
\mathcal{R}_{0020} &= \mathcal{L}_1^3 \mathcal{W}_{1t}^3 + 2\mathcal{W}_{2t'}^3, \\
\mathcal{R}_{0002} &= \mathcal{L}_1^4 \mathcal{W}_{1t}^4 + 2\mathcal{W}_{2t'}^4, \\
\mathcal{R}_{1100} &= L_1^2 \mathcal{W}_{1t}^1 + L_1^1 \mathcal{W}_{1t'}^2, \\
\mathcal{R}_{1010} &= L_1^3 \mathcal{W}_{1t}^1 + L_1^1 \mathcal{W}_{1t'}^3, \\
\mathcal{R}_{1001} &= L_1^4 \mathcal{W}_{1t}^1 + L_1^1 \mathcal{W}_{1t'}^4, \\
\mathcal{R}_{0110} &= L_1^3 \mathcal{W}_{1t}^2 + L_1^2 \mathcal{W}_{1t'}^3, \\
\mathcal{R}_{0101} &= L_1^4 \mathcal{W}_{1t}^2 + L_1^2 \mathcal{W}_{1t'}^4, \\
\mathcal{R}_{0011} &= L_1^4 \mathcal{W}_{1t}^3 + L_1^3 \mathcal{W}_{1t'}^4.
\end{aligned}$$

Por outro lado, a nova função hamiltoniana até à segunda ordem será

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \mathcal{K}_0 + \varepsilon_1 \mathcal{K}_{1000} + \varepsilon_2 \mathcal{K}_{0100} + \varepsilon_3 \mathcal{K}_{0010} + \varepsilon_4 \mathcal{K}_{0001} \\
&+ \frac{\varepsilon_1^2}{2} \mathcal{K}_{2000} + \frac{\varepsilon_2^2}{2} \mathcal{K}_{0200} + \frac{\varepsilon_3^2}{2} \mathcal{K}_{0020} + \frac{\varepsilon_4^2}{2} \mathcal{K}_{0002} \\
&+ \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \mathcal{K}_{1100} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{2} \mathcal{K}_{1010} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_4}{2} \mathcal{K}_{1001} \\
&+ \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{2} \mathcal{K}_{0110} + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_4}{2} \mathcal{K}_{0101} + \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_4}{2} \mathcal{K}_{0011} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.14)
\end{aligned}$$

### 3.4.1 Relações

Finalmente haverá que substituir as expressões (3.12), (3.13) e (3.14) na relação (3.11) e igualar os termos da mesma ordem. Deste modo, obtém-se uma cadeia de equações denominada *equações homológicas*.

**Termo independente:**

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{K}_0. \quad (3.15)$$

**Coeficiente  $\varepsilon_1$ :**

$$\mathcal{L}_1^1 \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{1000} + \mathcal{W}_{1t}^1 = \mathcal{K}_{1000}. \quad (3.16)$$

**Coeficiente  $\varepsilon_2$ :**

$$\mathcal{L}_1^2 \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{0100} + \mathcal{W}_{1t}^2 = \mathcal{K}_{0100}. \quad (3.17)$$

**Coeficiente  $\varepsilon_3$ :**

$$\mathcal{L}_1^3 \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{0010} + \mathcal{W}_{1t}^3 = \mathcal{K}_{0010}. \quad (3.18)$$

**Coeficiente  $\varepsilon_4$ :**

$$\mathcal{L}_1^4 \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{0001} + \mathcal{W}_{1t}^4 = \mathcal{K}_{0001}. \quad (3.19)$$

**Coeficiente  $\varepsilon_1^2$ :**

$$\mathcal{L}_2^1 \mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{11}^{11} \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_1^1 \mathcal{H}_{1000} + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{2000} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^1 \mathcal{W}_{1t}^1 + \mathcal{W}_{2t}^1 = \frac{1}{2} \mathcal{K}_{2000}. \quad (3.20)$$

**Coeficiente  $\varepsilon_2^2$ :**

$$\mathcal{L}_2^2 \mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{11}^{22} \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_1^2 \mathcal{H}_{0100} + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{0200} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^2 \mathcal{W}_{1t}^2 + \mathcal{W}_{2t}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{K}_{0200}. \quad (3.21)$$

**Coeficiente  $\varepsilon_3^2$ :**

$$\mathcal{L}_2^3 \mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{11}^{33} \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_1^3 \mathcal{H}_{0010} + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{0020} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^3 \mathcal{W}_{1t}^3 + \mathcal{W}_{2t}^3 = \frac{1}{2} \mathcal{K}_{0020}. \quad (3.22)$$

**Coeficiente  $\varepsilon_4^2$ :**

$$\mathcal{L}_2^4 \mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{11}^{44} \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_1^4 \mathcal{H}_{0001} + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{0002} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^4 \mathcal{W}_{1t}^4 + \mathcal{W}_{2t}^4 = \frac{1}{2} \mathcal{K}_{0002}. \quad (3.23)$$

**Coeficiente  $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ :**

$$\frac{1}{2} (\mathcal{L}_{11}^{12} + \mathcal{L}_{11}^{21}) \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_1^1 \mathcal{H}_{0100} + \mathcal{L}_1^2 \mathcal{H}_{1000} + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{1100} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^2 \mathcal{W}_{1t}^1 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^1 \mathcal{W}_{1t}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{K}_{1100}. \quad (3.24)$$

**Coeficiente  $\varepsilon_1 \varepsilon_3$ :**

$$\frac{1}{2} (\mathcal{L}_{11}^{13} + \mathcal{L}_{11}^{31}) \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_1^1 \mathcal{H}_{0010} + \mathcal{L}_1^3 \mathcal{H}_{1000} + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{1010} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^3 \mathcal{W}_{1t}^1 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^1 \mathcal{W}_{1t}^3 = \frac{1}{2} \mathcal{K}_{1010}. \quad (3.25)$$

**Coeficiente  $\varepsilon_1 \varepsilon_4$ :**

$$\frac{1}{2} (\mathcal{L}_{11}^{14} + \mathcal{L}_{11}^{41}) \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_1^1 \mathcal{H}_{0001} + \mathcal{L}_1^4 \mathcal{H}_{1000} + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{1001} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^4 \mathcal{W}_{1t}^1 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^1 \mathcal{W}_{1t}^4 = \frac{1}{2} \mathcal{K}_{1001}. \quad (3.26)$$

**Coeficiente  $\varepsilon_2 \varepsilon_3$ :**

$$\frac{1}{2} (\mathcal{L}_{11}^{23} + \mathcal{L}_{11}^{32}) \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_1^2 \mathcal{H}_{0010} + \mathcal{L}_1^3 \mathcal{H}_{0100} + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{0110} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^3 \mathcal{W}_{1t}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^2 \mathcal{W}_{1t}^3 = \frac{1}{2} \mathcal{K}_{0110}. \quad (3.27)$$

**Coeficiente  $\varepsilon_2\varepsilon_4$ :**

$$\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{11}^{24} + \mathcal{L}_{11}^{42})\mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_1^2\mathcal{H}_{0001} + \mathcal{L}_1^4\mathcal{H}_{0100} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{0101} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_1^4\mathcal{W}_{1t}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_1^2\mathcal{W}_{1t}^4 = \frac{1}{2}\mathcal{K}_{0101}. \quad (3.28)$$

**Coeficiente  $\varepsilon_3\varepsilon_4$ :**

$$\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{11}^{34} + \mathcal{L}_{11}^{43})\mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_1^3\mathcal{H}_{0001} + \mathcal{L}_1^4\mathcal{H}_{0010} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{0011} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_1^4\mathcal{W}_{1t}^3 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_1^3\mathcal{W}_{1t}^4 = \frac{1}{2}\mathcal{K}_{0011}. \quad (3.29)$$

### 3.4.2 Equações homológicas

Das relações correspondentes aos termos puros (3.15-3.23) obtêm-se, por indução, as denominadas equações homológicas:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(\vec{y}, t) &= \mathcal{H}_0(\vec{y}, t), \\ \mathcal{K}_{n000} &= n \left[ \{\mathcal{H}_0; \mathcal{W}_n^1\} + \frac{\partial \mathcal{W}_n^1}{\partial t} \right] + \mathcal{A}_{n000}, \\ \mathcal{K}_{0n00} &= n \left[ \{\mathcal{H}_0; \mathcal{W}_n^2\} + \frac{\partial \mathcal{W}_n^2}{\partial t} \right] + \mathcal{A}_{0n00}, \\ \mathcal{K}_{00n0} &= n \left[ \{\mathcal{H}_0; \mathcal{W}_n^3\} + \frac{\partial \mathcal{W}_n^3}{\partial t} \right] + \mathcal{A}_{00n0}, \\ \mathcal{K}_{000n} &= n \left[ \{\mathcal{H}_0; \mathcal{W}_n^4\} + \frac{\partial \mathcal{W}_n^4}{\partial t} \right] + \mathcal{A}_{000n}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde, até à segunda ordem, se definem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{1000} &= \mathcal{H}_{1000}, \\
\mathcal{A}_{0100} &= \mathcal{H}_{0100}, \\
\mathcal{A}_{0010} &= \mathcal{H}_{0010}, \\
\mathcal{A}_{0001} &= \mathcal{H}_{0001}, \\
\mathcal{A}_{2000} &= \mathcal{H}_{2000} + \{\mathcal{K}_{1000} + \mathcal{H}_{1000}; \mathcal{W}_1^1\}, \\
\mathcal{A}_{0200} &= \mathcal{H}_{0200} + \{\mathcal{K}_{0100} + \mathcal{H}_{0100}; \mathcal{W}_1^2\}, \\
\mathcal{A}_{0020} &= \mathcal{H}_{0020} + \{\mathcal{K}_{0010} + \mathcal{H}_{0010}; \mathcal{W}_1^3\}, \\
\mathcal{A}_{0002} &= \mathcal{H}_{0002} + \{\mathcal{K}_{0001} + \mathcal{H}_{0001}; \mathcal{W}_1^4\}.
\end{aligned}$$

Deste modo, os últimos termos da parte direita de (3.30) são combinações lineares de colchetes de Poisson aninhados onde aparecem os termos conhecidos  $(\mathcal{H}_{j000})_{1 \leq j \leq n}$ ,  $(\mathcal{H}_{0j00})_{1 \leq j \leq n}$ ,  $(\mathcal{H}_{00j0})_{1 \leq j \leq n}$ ,  $(\mathcal{H}_{000j})_{1 \leq j \leq n}$ ,  $(\mathcal{W}_j^1)_{1 \leq j \leq n-1}$ ,  $(\mathcal{W}_j^2)_{1 \leq j \leq n-1}$ ,  $(\mathcal{W}_j^3)_{1 \leq j \leq n-1}$  e  $(\mathcal{W}_j^4)_{1 \leq j \leq n-1}$ .

As equações (3.30) fornecem recursivamente os termos da função geratriz  $\mathcal{W}_n^1$ ,  $\mathcal{W}_n^2$ ,  $\mathcal{W}_n^3$  e  $\mathcal{W}_n^4$ , após ter eleito convenientemente os termos da nova hamiltoniana  $\mathcal{K}_{n000}$ ,  $\mathcal{K}_{0n00}$ ,  $\mathcal{K}_{00n0}$  e  $\mathcal{K}_{000n}$ .

### 3.4.3 Termos mistos

Devido a que se está a tratar com hamiltonianas multiparamétricas aparecerão termos mistos que obrigam a eleger cuidadosamente a nova hamiltoniana. Assim, as relações que determinam os termos da nova hamiltoniana obtêm-se a partir dos coeficientes (3.24-3.29).

Estes vêm dados por:

$$\mathcal{K}_{1100} = \mathcal{L}_1^2(\mathcal{K}_{1000} + \mathcal{H}_{1000}) + \mathcal{L}_1^1(\mathcal{K}_{0100} + \mathcal{H}_{0100}) + \mathcal{H}_{1100},$$

$$\mathcal{K}_{1010} = \mathcal{L}_1^3(\mathcal{K}_{1000} + \mathcal{H}_{1000}) + \mathcal{L}_1^1(\mathcal{K}_{0010} + \mathcal{H}_{0010}) + \mathcal{H}_{1010},$$

$$\mathcal{K}_{1001} = \mathcal{L}_1^4(\mathcal{K}_{1000} + \mathcal{H}_{1000}) + \mathcal{L}_1^1(\mathcal{K}_{0001} + \mathcal{H}_{0001}) + \mathcal{H}_{1001},$$

$$\mathcal{K}_{0110} = \mathcal{L}_1^3(\mathcal{K}_{0100} + \mathcal{H}_{0100}) + \mathcal{L}_1^2(\mathcal{K}_{0010} + \mathcal{H}_{0010}) + \mathcal{H}_{0110},$$

$$\mathcal{K}_{0101} = \mathcal{L}_1^4(\mathcal{K}_{0100} + \mathcal{H}_{0100}) + \mathcal{L}_1^2(\mathcal{K}_{0001} + \mathcal{H}_{0001}) + \mathcal{H}_{0101},$$

$$\mathcal{K}_{0011} = \mathcal{L}_1^4(\mathcal{K}_{0010} + \mathcal{H}_{0010}) + \mathcal{L}_1^3(\mathcal{K}_{0001} + \mathcal{H}_{0001}) + \mathcal{H}_{0011}.$$

### 3.5 Comentários

1. As transformações de Lie fornecem uma potente ferramenta para a resolução de equações diferenciais não lineares. Em particular, os métodos canônicos de perturbações construídos a partir delas são muito adequados para o tratamento de sistemas hamiltonianos dependentes de pequenos parâmetros.
2. Aliás, o método  $N$ -paramétrico aqui apresentado permite resolver problemas formulados como sobreposição de um número arbitrário de perturbações num único passo.



# Capítulo 4

## Integração de diferentes casos representativos

*“Der ganzen modernen Weltanschauung liegt die Täuschung zugrunde, dass die sogenannten Naturgesetze die Erklärungen der Naturerscheinungen seien.” \**

LUDWIG WITGENSTEIN (1889–1951)

### 4.1 Introdução

Para pôr em conexão a perda de massa como problema matemático com a perda de massa estelar e a influência desta na dinâmica orbital em sistemas binários e múltiplos é preciso fixar as condições físicas do sistema a estudar.

---

\* “A concepção moderna do mundo baseia-se na ilusão de que as chamadas leis da natureza são a explicação dos fenómenos naturais.” *Logisch-philosophische Abhandlung*, 1921.

Assim, teremos que estabelecer qual é exactamente a lei de perda de massa em função do tempo e quantificar o valor dos seus parâmetros. Para a integração dos sistemas hipotéticos que abordamos neste capítulo utiliza-se a já comentada lei de Jeans

$$\dot{m} = -\alpha m^n, \quad (4.1)$$

onde os valores de  $\alpha$  e  $n$  se determinam a partir do que se estabeleceu em § 1.5.1.

Dada a natureza do problema de Gylden–Meščerskij com efeito periastro, com um tratamento analítico mais difícil do ponto de vista das teorias de perturbações aqui utilizadas, em § 4.2 citam-se algumas das dificuldades que se encontram e esboça-se algum intuito de resolução. Finalmente, resolve-se numericamente um caso ilustrativo da complexa casuística que este problema exhibe, a qual poderia explicar algumas das situações anómalas observadas em certos sistemas binários reais.

Por último, aborda-se a integração do problema de Gylden–Meščerskij ao qual se sobrepõem algumas das perturbações descritas e formuladas no Capítulo 2. Como passo prévio, resolvemos analiticamente o problema do movimento relativo em primeira aproximação pós-newtoniana de um sistema binário, considerando assim os efeitos relativistas mais notáveis. Posteriormente, realiza-se uma integração numérica para explorar os diferentes cenários que se apresentam em função dos valores que tomam os pequenos parâmetros que entram em jogo.

## 4.2 Sistema binário com efeito periastro

### 4.2.1 Tratamento analítico: dificuldades e resultados factíveis

O método canónico de perturbações baseado em transformações de Lie que se construiu no Capítulo 3 é idóneo para a resolução formal de sistemas canónicos perturbados dependentes de um número arbitrário de pequenos parâmetros. Não obstante, há casos em que, por diferentes razões, a sua aplicação não é possível:

1. A hamiltoniana original apresenta termos seculares em função de alguma das anomalias.
2. Não é possível obter novas hamiltonianas totalmente livres da variável que se pretende eliminar, já que esta reaparece nos termos mistos.

No Capítulo 2 vimos que a partir de uma lei de perda de massa do tipo

$$\dot{\mu}(r; p_{\theta}; t) = -\alpha \mu^n(t) - \beta \frac{p_{\theta}}{r^2}$$

se obtinha a hamiltoniana em variáveis polares–nodais

$$\mathcal{H}(r, \theta; p_r, p_{\theta}; \mu(t)) = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_{\theta}^2}{r^2} \right) - \frac{\mu(t)}{r} + \beta \frac{\theta}{r}, \quad (4.2)$$

ou, equivalentemente, em variáveis de Delaunay

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^* &\equiv \mathcal{H}^*(\ell_D, g_D, -; L_D, G_D, -; t) = \\ &= -\frac{\mu^2(t)}{2L_D^2} + \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} L_D e \sin E + \beta \frac{\mu(t)}{G_D^2} (f + g_D) (1 + e \cos f). \end{aligned}$$

Este resulta ser um dos casos em que não é possível a integração analítica mediante as técnicas de perturbação antes comentadas, já que os termos seculares em função da anomalia verdadeira e do argumento do periastro impedem a sua aplicação. Pelo momento esta é uma das maiores dificuldades que aparecem na resolução analítica deste problema.

### 4.2.2 Integração numérica

De maneira alternativa à aproximação analítica é possível analisar o comportamento do sistema realizando uma integração numérica (Calvo e Palacios 1997) com a ajuda de um manipulador algébrico, neste caso *Mathematica*<sup>®</sup> 5.1.

Recupera-se a função hamiltoniana em variáveis polares–nodais dada por (4.2) para, a partir dela, obter as equações canónicas do movimento

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_\theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\beta}{r}, \\
 \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{\mu(t)}{r^2} + \beta \frac{\theta}{r^2}, \\
 \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{r^2}, \\
 \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r.
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Estas equações, junto com a que representa a perda de massa do sistema em função do tempo

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = -\alpha \mu^n,
 \tag{4.4}$$

formam um sistema diferencial de cinco equações. No caso de as duas componentes do sistema perderem massa segundo diferentes leis teríamos um sistema diferencial de seis equações. A sua integração mediante a aplicação de um método de Runge–Kutta permite obter as variáveis polares-nodais, isto é, coordenadas ( $r$  e  $\theta$ ) e momentos ( $p_r$  e  $p_\theta$ ), e a partir destes os elementos orbitais, os quais dependerão do tempo e da distância.

Para ilustrar o comportamento das variáveis do problema ao longo do tempo, tomaremos um conjunto de condições iniciais (elementos orbitais) e um valor fixo para o expoente que aparece na equação (4.4). Integramos para um intervalo de 10 unidades temporais um conjunto de casos representativos da casuística deste problema para excentricidades quase nulas (0.01), moderadas (0.3) e altas (0.9). Ao tomarmos  $G = 4 \pi^2 \text{ UA}^3 \text{ M}_\odot^{-1} \text{ anos}^{-2}$  as unidades para o semieixo maior e o período serão, respectivamente, unidades astronómicas e anos.

De seguido, na Tabela 4.1, caracterizam-se por separado os três casos que representam a fenomenologia do problema que queremos estudar. Para que não haja interferências entre os efeitos que cada mecanismo provoca, integra-se cada caso por separado. Contudo, comentam-se alguns curiosos comportamentos dos elementos orbitais para o caso mais geral em que todos os parâmetros de perda de massa são não nulos.

Já para uma perturbação por efeito periastro duas ordens menor que a perda de massa temporal (GMpEP) se percebe uma ligeira tendência secular nas oscilações periódicas produzidas por esta última. Esta tendência faz-se totalmente manifesta quando ambos fenómenos são integrados formalmente à mesma ordem (GM+EP).

Quanto à lei de perda de massa dependente do tempo utilizaremos a lei de Jeans com  $n = 1$ . Sobre esta escolha é preciso dizer que, embora a variação de massa em função unicamente do tempo é muito sensível ao expoente que se utilize na lei de Jeans, o comportamento qualitativo não diferirá substancialmente se tomarmos outros valores.

Tabela 4.1: VALORES DOS PEQUENOS PARÂMETROS PARA OS PROBLEMAS: KEPLER (K), GYLDÉN–MEŠČERSKIJ (GM) E EFEITO PERIASTRO (EP).

CASOS	K	GM	EP
$\alpha$	0	$10^{-6}$	0
$\beta$	0	0	$10^{-6}$

As condições iniciais fixas para todos os casos a integrar mostram-se na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: CONDIÇÕES INICIAIS FIXAS PARA TODOS OS CASOS A INTEGRAR.

ELEMENTOS ORBITAIS INICIAIS		MASSA INICIAL EXPONENTE DA LEI	
$a_0$	1.0 UA	$\mu$	$1.0 M_{\odot}$
$\omega_0$	$0^{\circ}0$	$n$	1

Analisaremos em detalhe o comportamento dos dois elementos orbitais que melhor caracterizam a evolução orbital, isto é, o semieixo maior e a excentricidade —os quais estão ligados à energia e ao momento angular da órbita. Estes são, junto com o período, os elementos orbitais que apresentam variações seculares novas com respeito ao problema de Gyldén–Meščerskij. Também obteremos a variação da distância apocêntrica em relação à pericêntrica, dada por

$$d_{pa} = \frac{1+e}{1-e}.$$

### Variações na massa

Antes de tudo, estuda-se a variação que sofre a massa do sistema ao longo do tempo para cada um dos casos (ver Fig. 4.1).

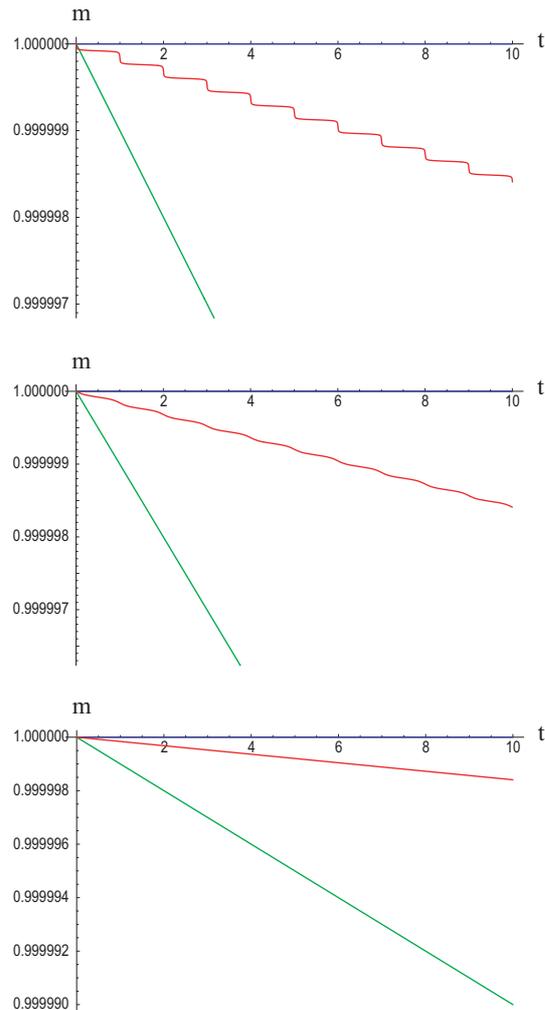


Figura 4.1: Variações na massa para diferentes valores iniciais da excentricidade:  $e_0 = 0.01$  (inferior),  $e_0 = 0.3$  (meio) e  $e_0 = 0.9$  (superior). Representam-se os casos da Tabela 4.2: problema de Kepler (azul), problema de Gylden–Meščerskij (verde) e efeito periastro (vermelho).

Quanto ao efeito periastro, a medida que se consideram excentricidades maiores, comprova-se que é nas passagens pelo periastro onde a massa

do sistema diminui de maneira notável. Graficamente este efeito percebe-se como o aumento sucessivo das oscilações da curva de perda de massa (vermelha) ao final de cada período para excentricidades crescentes.

Da primeira equação de (4.3) deduz-se que a perda de massa por efeito periastro leva associada a perda de momento angular do sistema.

### **Variações na excentricidade**

No problema de Kepler (massa estacionária) a excentricidade permanece constante. No resto de casos, ou bem varia periodicamente (problema de Gylden–Meščerskij) ou aumenta secularmente por efeito periastro (Fig. 4.2). Porém, existem algumas diferenças quantitativas em função do valor da excentricidade inicial. Assim, quando se parte de uma excentricidade inicial próxima a zero o crescimento secular por efeito periastro é muito menor que para valores iniciais maiores (ver Fig. 4.2). Quer dizer, independentemente do valor inicial da excentricidade esta aumentará secularmente, sendo maior este aumento quanto maior é o valor inicial. É de esperar que em sistemas altamente excêntricos onde o efeito periastro seja notável se possam produzir instabilidades que levem à rotura do sistema.

### **Variações no semieixo maior**

Quando se analisa o comportamento do semieixo maior, observa-se que para a perda de massa dependente do tempo existe uma tendência secular a aumentar que, como é sabido, se traduz numa espiral no plano orbital. Porém, quando consideramos as variações por efeito periastro, aparece um decrescimento secular do semieixo (ver Fig. 4.3).

O facto de que estas duas perturbações ajam de maneira oposta leva a que dependendo de qual seja o mecanismo de perda de massa dominante, evolução temporal ou efeito periastro, o resultado neto da tendência secular do semieixo maior seja a aumentar ou a diminuir, respectivamente.

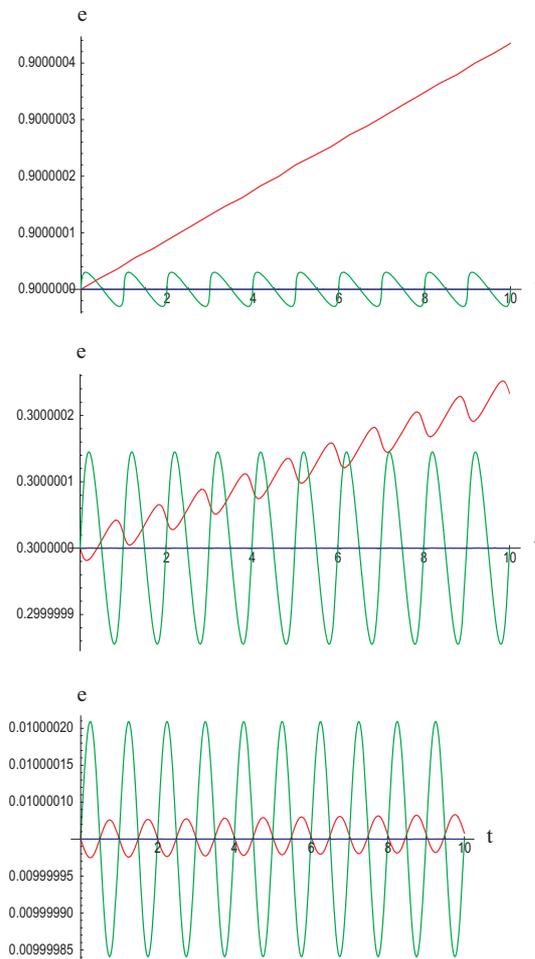


Figura 4.2: Variações na excentricidade para diferentes valores iniciais da excentricidade:  $e_0 = 0.01$  (inferior),  $e_0 = 0.3$  (meio) e  $e_0 = 0.9$  (superior). Representam-se os casos da Tabela 4.2: problema de Kepler (azul), problema de Gylden–Mečerskij (verde) e efeito periastro (vermelho).

Teoricamente existirá um valor para o qual os dois contributos se cancelam de modo que o semieixo permanece secularmente constante. Para o exemplo que se está a considerar (ver Tab. 4.2), se a excentricidade inicial é  $e_0 = 0.3$  e  $\beta = 10^{-6}$ , este valor é  $\alpha \approx 1.5915 \cdot 10^{-7}$ .

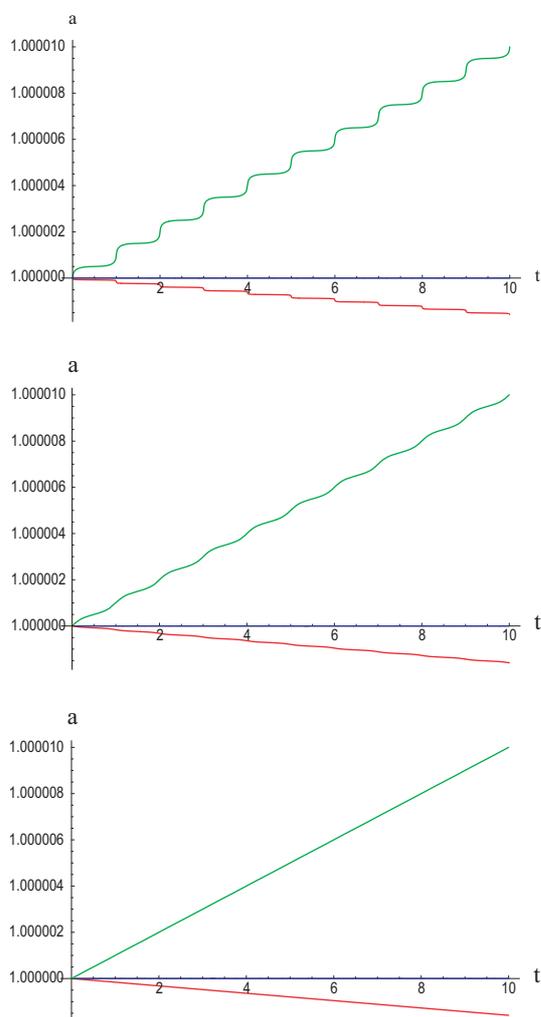


Figura 4.3: Variações no semieixo maior para diferentes valores iniciais da excentricidade:  $e_0 = 0.01$  (inferior),  $e_0 = 0.3$  (meio) e  $e_0 = 0.9$  (superior). Representam-se os casos da Tabela 4.2: problema de Kepler (azul), problema de Gylden–Meščerskij (verde) e efeito periastro (vermelho).

### Variações no período

O período apresenta um comportamento muito similar ao do semieixo maior. Assim, no caso de perda de massa temporal há um aumento secular, enquanto o efeito periastro produz o efeito contrário, isto é, um decréscimo secular do mesmo (ver Fig. 4.4).

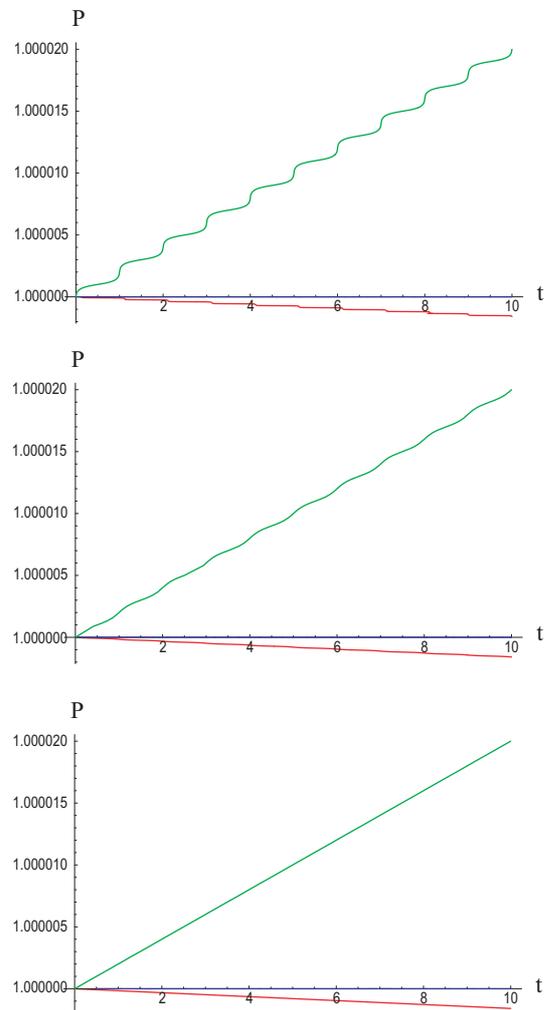


Figura 4.4: Variações no período para diferentes valores iniciais da excentricidade:  $e_0 = 0.01$  (inferior),  $e_0 = 0.3$  (meio) e  $e_0 = 0.9$  (superior). Representam-se os casos da Tabela 4.2: problema de Kepler (azul), problema de Gyldén–Meščerskij (verde) e efeito periastro (vermelho).

Algo similar ao que acontecia para o semieixo no caso de agirem ao mesmo tempo a perda de massa temporal e o efeito periastro sucede também para o período. Dados uns valores iniciais dos elementos orbitais e do resto de variáveis que definem o sistema, existe um valor dos parâmetros que anula as variações seculares. No exemplo que estamos a comentar, para uma excentricidade inicial  $e_0 = 0.3$  e um parâmetro  $\beta = 10^{-6}$ , o valor

do parâmetro de perda de massa temporal que faz com que se anulem as duas tendências é  $\alpha \approx 7.958 \cdot 10^{-8}$ .

### **Variações nas distâncias pericêntrica e apocêntrica**

No problema de Kepler o semieixo maior e a excentricidade permanecem constantes, de maneira que as distâncias pericêntrica e apocêntrica não variam. Sem embargo, no problema de Gylden–Meščerskij as variações destes dois elementos orbitais produzem oscilações nestas distâncias que permanecem limitadas no tempo.

Algo muito diferente acontece quando existe efeito periastro. Na Figura 4.5 mostra-se a evolução da relação entre a distância pericêntrica e a apocêntrica. Esta apresenta uma clara tendência secular a aumentar com o tempo, o qual pela sua vez, condiciona a influência do efeito periastro sobre o sistema.

### **Amortecimento da perturbação por afastamento**

Quando a perda de massa por efeito periastro está sobreposta à que depende do tempo, que acabamos de ver produz aumento secular do semi-eixo, é de esperar que, a medida que a distância entre as componentes do sistema aumente, a intensidade da própria perturbação diminua em função da sua dependência com a inversa deste:

$$\beta \propto \frac{1}{a} \quad (4.5)$$

Tal diminuição, pela sua vez, provocará que os efeitos seculares nos elementos orbitais vão sofrendo certo amortecimento. Para ter em conta este mecanismo de amortecimento na resolução (numérica) do problema, será conveniente introduzir um parâmetro  $\beta$  variável. Segundo a dependência funcional da expressão (4.5), a variação secular dos elementos orbitais por

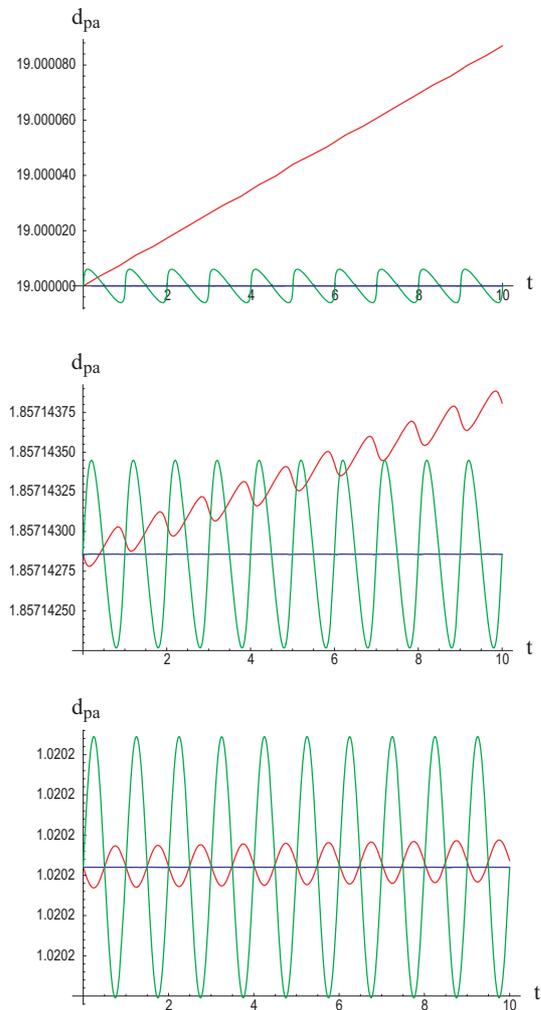


Figura 4.5: Variações na relação entre as distâncias pericêntrica e apocêntrica para diferentes valores iniciais da excentricidade:  $e_0 = 0.01$  (inferior),  $e_0 = 0.3$  (meio) e  $e_0 = 0.9$  (superior). Representam-se os casos da Tabela 4.2: problema de Kepler (azul), problema de Gylden–Meščerskij (verde) e efeito periastro (vermelho).

efeito periastro poderá ser indefinida ou tender assintoticamente para certos valores limite.

### **‘Efeito periastro inverso’**

Um situação diferente à que estamos a tratar é a que tem lugar quando em lugar de perda de massa consideramos que existe ganho de massa. Todas as conclusões apresentadas nesta secção são válidas tendo em conta que o comportamento dos elementos orbitais será agora o inverso. Assim, a órbita tende a se circularizar, enquanto o semieixo e o período aumentam.

Nos Capítulos 5 e 6 analisam-se alguns casos reais em que se supõe que existe ‘efeito periastro inverso’.

## **4.3 Binária com componente elipsoidal considerando efeitos relativistas**

O cenário que se propõe a continuação é o de um sistema binário com perda de massa em função do tempo em que uma das componentes, a primária, apresenta forma elipsoidal —o procedimento para o caso em que as duas estrelas sejam elipsoidais é similar. Aliás, consideram-se efeitos relativistas no desenvolvimento do potencial gravitacional em primeira aproximação pós-newtoniana.

A hamiltoniana do problema, dada por (2.14) mais o termo por perda de massa temporal, será integrada analiticamente para diversos casos particulares em que coexistem, a diferentes ordens, todas as perturbações a considerar.

### **4.3.1 Integração analítica mediante o método canónico de perturbações 4-paramétrico**

Realiza-se a integração analítica da citada hamiltoniana mediante o método canónico de perturbações descrito no Capítulo 3 na sua versão 4-para-

métrica. Sem perda de generalidade, e com o fim de evitar termos mistos na nova hamiltoniana, aplicar-se-á à primeira ordem de perturbações.

A hamiltoniana original virá dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{\dot{\mu}}{\mu} L e \operatorname{sen} E + J_2 \frac{\mu^4 R^2}{L^6} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left[ \frac{1}{4} - \frac{3H^2}{4G^2} - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{H^2}{G^2}\right) \cos 2(f+g) \right] \\ & - \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L^4} \left[ \sigma_0 + \left[ -\sigma' + \sigma_3 \left( \frac{L^2}{G^2} - 1 \right) \operatorname{sen}^2 f \right] \frac{a}{r} + \sigma'' \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde se definem os parâmetros auxiliares

$$\sigma' \equiv 4\sigma_0 + \sigma_1$$

$$\sigma'' \equiv 4\sigma_0 + 2\sigma_1 + \sigma_2$$

com  $\sigma_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ , dados por (2.12).

### Expressão da hamiltoniana em série de pequenos parâmetros

Dada a dependência da função hamiltoniana do problema (4.6) com os 4 pequenos parâmetros  $\alpha_1, \alpha_2$  (relacionados com o tempo),  $J_2$  (factor de forma dinâmico) e  $c^{-2}$ , é razoável considerar a sua expansão em série destes pequenos parâmetros para logo aplicar o método canónico de perturbações na sua versão 4-paramétrica.

O desenvolvimento assintótico para a massa  $\mu(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t)$  virá dado por um desenvolvimento em série de Taylor da forma

$$\mu_i(t) = \mu_{i0} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \mu_{i0}^{(j)} (t - t_0)^j,$$

sendo  $\mu_{i0}$  o valor da massa  $i$  num certo instante inicial  $t_0$  e onde  $\mu_{i0}^{(j)}$  representa a derivada  $j$ -ésima da função  $\mu_i(t)$  relativamente a  $t$  avaliada em  $t = t_0$ .

Tendo em conta que para a lei de variação de massa com o tempo se toma a lei de Jeans, dada em (4.1), a expressão de  $\mu_{i0}^{(j)}$  resulta

$$\mu_{i0}^{(j)} = (-1)^j \alpha_i^j \mu_{i0}^{n_i-j+1} \prod_{s=1}^{\infty} \frac{sn_i - s + 1}{(s-1+j)n_i - (s+j-2)}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Até à segunda ordem obtém-se para a perda de massa dependente do tempo de cada componente

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \mu_{10} + \mu_{10}^{(1)}(t - t_0) + \frac{1}{2} \mu_{10}^{(2)}(t - t_0)^2 = \\ &= \mu_{10} - \alpha_1 \mu_{10}^{n_1}(t - t_0) + \frac{\alpha_1^2}{2} \mu_{10}^{2n_1-1} n_1 (t - t_0)^2 + \mathcal{O}(t^3), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mu_2(t) &= \mu_{20} + \mu_{20}^{(1)}(t - t_0) + \frac{1}{2} \mu_{20}^{(2)}(t - t_0)^2 = \\ &= \mu_{20} - \alpha_2 \mu_{20}^{n_2}(t - t_0) + \frac{\alpha_2^2}{2} \mu_{20}^{2n_2-1} n_2 (t - t_0)^2 + \mathcal{O}(t^3), \end{aligned} \quad (4.8)$$

e a massa total, onde se suprimiram os termos superiores à segunda ordem,

$$\mu(t) = \mu_0 - (\alpha_1 \mu_{10}^{n_1} + \alpha_2 \mu_{20}^{n_2})(t - t_0) + \frac{1}{2} (\alpha_1^2 \mu_{10}^{2n_1-1} n_1 + \alpha_2^2 \mu_{20}^{2n_2-1} n_2)(t - t_0)^2,$$

cuja convergência está garantida para  $|t - t_0| < 1$ .

A partir dos desenvolvimentos (4.7) e (4.8) deduzem-se as expressões de  $\dot{\mu}(t)$ ,  $\mu^2(t)$  e  $\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}$ , esta última como quociente de duas séries, à segunda ordem, respectivamente

$$\dot{\mu}(t) = -\alpha_1 \mu_{10}^{n_1} - \alpha_2 \mu_{20}^{n_2} + \alpha_1^2 \mu_{10}^{2n_1-1} n_1 (t - t_0) + \alpha_2^2 \mu_{20}^{2n_2-1} n_2 (t - t_0), \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \mu^2(t) &= \mu_0^2 - 2\alpha_1 \mu_{10}^{n_1} \mu_0 (t - t_0) - 2\alpha_2 \mu_{20}^{n_2} \mu_0 (t - t_0) \\ &\quad + 2\alpha_1 \alpha_2 \mu_{10}^{n_1} \mu_{20}^{n_2} (t - t_0)^2 \\ &\quad + \alpha_1^2 \mu_{10}^{2n_1-1} (n_1 \mu_0 + \mu_{10}) (t - t_0)^2 \\ &\quad + \alpha_2^2 \mu_{20}^{2n_2-1} (n_2 \mu_0 + \mu_{20}) (t - t_0)^2, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} &= -\alpha_1 \frac{\mu_{10}^{n_1}}{\mu_0} - \alpha_2 \frac{\mu_{20}^{n_2}}{\mu_0} \\ &\quad + \alpha_1^2 \frac{\mu_{10}^{2n_1-1}}{\mu_0^2} (n_1 \mu_0 - \mu_{10}) (t - t_0) \\ &\quad + \alpha_2^2 \frac{\mu_{20}^{2n_2-1}}{\mu_0^2} (n_2 \mu_0 - \mu_{20}) (t - t_0) \\ &\quad - 2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\mu_{10}^{n_1} \mu_{20}^{n_2}}{\mu_0^2} (t - t_0). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Substituindo agora os desenvolvimentos (4.9), (4.10) e (4.11) na hamiltoniana (4.6) obtém-se, à primeira ordem, a função hamiltoniana em potências dos pequenos parâmetros

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \alpha_1 \mathcal{H}_{1000} + \alpha_2 \mathcal{H}_{0100} + J_2 \mathcal{H}_{0010} + \frac{1}{c^2} \mathcal{H}_{0001},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &= -\frac{\mu_0^2}{2L^2}, \\
\mathcal{H}_{1000} &= \frac{\mu_{10}^{n_1}\mu_0}{L^2}(t-t_0) - \frac{\mu_{10}^{n_1}}{\mu_0}L e \operatorname{sen} E, \\
\mathcal{H}_{0100} &= \frac{\mu_{20}^{n_2}\mu_0}{L^2}(t-t_0) - \frac{\mu_{20}^{n_2}}{\mu_0}L e \operatorname{sen} E, \\
\mathcal{H}_{0010} &= \frac{\mu_0^4 R^2}{4G^6}(1+e \cos f)^3 \left[ 1 - 3 \frac{H^2}{G^2} - 3 \left( 1 - \frac{H^2}{G^2} \right) \cos 2(f+g) \right], \\
\mathcal{H}_{0001} &= -\frac{\mu_0^4}{L^4} \left[ \sigma_0 + \left[ -\sigma' + \sigma_3 \left( \frac{L^2}{G^2} - 1 \right) \operatorname{sen}^2 f \right] \frac{L^2}{G^2} (1+e \cos f) \right. \\
&\quad \left. + \sigma'' \frac{L^4}{G^4} (1+e \cos f)^2 \right],
\end{aligned}$$

com  $\mu_0 = \mu_{10} + \mu_{20}$ .

### Eliminação de $\ell$ mediante a aplicação do método canônico 4-paramétrico

Trata-se de realizar uma transformação canônica infinitesimal do tipo

$$(L, G, H, \ell, g, h) \longrightarrow (L^*, G^*, H^*, \ell^*, g^*, h^*),$$

de modo que a nova hamiltoniana

$$\mathcal{H}^* \equiv \mathcal{H}^*(-, g^*, -; L^*, G^*, H^*)$$

seja independente de alguma variável angular e, portanto, mais facilmente integrável. Neste caso eliminam-se os termos periódicos de curto período, isto é, aqueles dependentes de  $\ell$ . Além disso, ao considerarmos unicamente a primeira ordem, os termos de longo período dependentes de  $g^*$  também desaparecem.

As equações homológicas à primeira ordem são

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_0 &= \mathcal{H}_0^*, \\
 \left[ \mathcal{H}_0; \mathcal{W}_1^1 \right] + \frac{\partial \mathcal{W}_1^1}{\partial t} &= \mathcal{H}_{1000}^* - \mathcal{H}_{1000}, \\
 \left[ \mathcal{H}_0; \mathcal{W}_1^2 \right] + \frac{\partial \mathcal{W}_1^2}{\partial t} &= \mathcal{H}_{0100}^* - \mathcal{H}_{0100}, \\
 \left[ \mathcal{H}_0; \mathcal{W}_1^3 \right] + \frac{\partial \mathcal{W}_1^3}{\partial t} &= \mathcal{H}_{0010}^* - \mathcal{H}_{0010}, \\
 \left[ \mathcal{H}_0; \mathcal{W}_1^4 \right] + \frac{\partial \mathcal{W}_1^4}{\partial t} &= \mathcal{H}_{0001}^* - \mathcal{H}_{0001}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

As equações (4.12) permitem obter sucessivamente os correspondentes termos  $\mathcal{W}_1^1, \mathcal{W}_1^2, \mathcal{W}_1^3$  e  $\mathcal{W}_1^4$ , após escolher adequadamente os termos  $\mathcal{H}_{1000}^*, \mathcal{H}_{0100}^*, \mathcal{H}_{0010}^*$  e  $\mathcal{H}_{0001}^*$  da nova hamiltoniana.

Neste caso podem-se tomar as componentes da função geratriz independentes do tempo e, portanto

$$\frac{\partial \mathcal{W}_1^j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

À ordem zero

$$\mathcal{H}_0^* = \mathcal{H}_0.$$

E à primeira ordem para o termo do parâmetro  $\alpha_1$

$$\mathcal{H}_{1000}^* = \{ \mathcal{H}_0; \mathcal{W}_1^1 \} + \mathcal{H}_{1000}, \tag{4.13}$$

onde se escolhe  $\mathcal{H}_{1000}^*$  como o promédio sobre a variável  $\ell^*$  de  $\mathcal{H}_{1000}$ , isto é,

$$\mathcal{H}_{1000}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_{1000}(\ell^*) d\ell^* \equiv \langle \mathcal{H}_{1000} \rangle,$$

donde, em função da anomalia excêntrica

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1000}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_{1000}(E^*) (1 - e^* \cos E^*) dE^* = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\mu_{10}^{n_1} \mu_0}{L^{*2}} (t - t_0) - \frac{\mu_{10}^{n_1}}{\mu_0} L^* e^* \sin E^* \right) (1 - e^* \cos E^*) dE^* = \\ &= \frac{\mu_{10}^{n_1} \mu_0}{L^{*2}} (t - t_0). \end{aligned}$$

Analogamente obtém-se, para  $\alpha_2$

$$\mathcal{H}_{0100}^* = \frac{\mu_{20}^{n_2} \mu_0}{L^{*2}} (t - t_0).$$

E à primeira ordem para o termo do parâmetro  $J_2$

$$\mathcal{H}_{0010}^* = \{\mathcal{H}_0; \mathcal{W}_1^3\} + \mathcal{H}_{0010}, \quad (4.14)$$

onde se escolhe  $\mathcal{H}_{0010}^*$  como o promédio temporal de  $\mathcal{H}_{0010}$ , isto é,

$$\mathcal{H}_{0010}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_{0010}(\ell^*) d\ell^* \equiv \langle \mathcal{H}_{0010} \rangle,$$

donde, em função da anomalia verdadeira,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{0010}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_{0010}(f^*) \frac{L^*}{G^*} \frac{r^2}{a^{*2}} df^* = \\
 &= \frac{\mu_0^4 R^2}{4L^{*6}} \int_0^{2\pi} (1 + e^* \cos f^*) \left[ 1 - 3 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} - 3 \left( 1 - \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \cos 2(f^* + g^*) \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{L^{*2}}{G^{*2}} \frac{L^*}{G^*} df^* = \frac{\mu_0^4 R^2}{4L^{*3} G^{*3}} \left[ 1 - 3 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right].
 \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para o parâmetro  $c^{-2}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{0001}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_{0001}(f^*) \frac{L^*}{G^*} \frac{r^2}{a^{*2}} df^* = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0^4}{L^{*4}} \left[ \sigma_0 \frac{L^*}{G^*} \frac{G^{*4}}{L^{*4}} \frac{1}{(1 + e^* \cos f^*)^2} df^* \right. \\
 &\quad \left. + \left[ -4\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_3 \left( \frac{L^{*2}}{G^{*2}} - 1 \right) \text{sen}^2 f^* \right] \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{L^*}{G^*} \frac{G^{*2}}{L^{*2}} \frac{1}{1 + e^* \cos f^*} df^* + (4\sigma_0 + 2\sigma_1 + \sigma_2) \frac{L^*}{G^*} df^* \right] = \\
 &= -\frac{\mu_0^4}{L^{*4}} \left[ -3\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_3 \left( \frac{L^*}{G^*} - 1 \right) + (4\sigma_0 + 2\sigma_1 + \sigma_2) \frac{L^*}{G^*} \right].
 \end{aligned}$$

Portanto, a hamiltoniana transformada, onde se têm eleito os novos termos sem a variável  $\ell^*$ , será

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_0^* + \alpha_1 \mathcal{H}_{1000}^* + \alpha_2 \mathcal{H}_{0100}^* + J_2 \mathcal{H}_{0010}^* + \frac{1}{c^2} \mathcal{H}_{0001}^*, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0^* &= -\frac{\mu_0^2}{2L^{*2}}, \\
\mathcal{H}_{1000}^* &= \frac{\mu_{10}^{n_1} \mu_0}{L^{*2}} (t - t_0), \\
\mathcal{H}_{0100}^* &= \frac{\mu_{20}^{n_2} \mu_0}{L^{*2}} (t - t_0), \\
\mathcal{H}_{0010}^* &= \frac{\mu_0^4 R^2}{4L^{*3} G^{*3}} \left[ 1 - 3 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right], \\
\mathcal{H}_{0001}^* &= -\frac{\mu_0^4}{L^{*4}} \left[ \sigma_0 - \sigma' + \sigma_3 \left( \frac{L^*}{G^*} - 1 \right) + \sigma'' \frac{L^*}{G^*} \right].
\end{aligned}$$

A função geratriz desta transformação de Lie é

$$\mathcal{W}_1^{(\alpha_1, \alpha_2, J_2, c^{-2})} = \alpha_1 \mathcal{W}_1^1 + \alpha_2 \mathcal{W}_1^2 + J_2 \mathcal{W}_1^3 + c^{-2} \mathcal{W}_1^4.$$

A componente da função geratriz  $\mathcal{W}_1^1$  obtém-se a partir de (4.13) como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \ell^*} \frac{\partial \mathcal{W}_1^1}{\partial L^*} - \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L^*} \frac{\partial \mathcal{W}_1^1}{\partial \ell^*} &= \mathcal{H}_{1000}^* - \mathcal{H}_{1000} \Rightarrow \\
\Rightarrow -\frac{\mu_0^2}{L^{*3}} \frac{\partial \mathcal{W}_1^1}{\partial \ell^*} &= \frac{\mu_{10}^{n_1}}{\mu_0} \sqrt{L^{*2} - G^{*2}} \operatorname{sen} E^* \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{W}_1^1 &= -\int_0^{E^*} \frac{\mu_{10}^{n_1}}{\mu_0^3} L^{*3} \sqrt{L^{*2} - G^{*2}} \operatorname{sen} E^* (1 - e^* \cos E^*) dE^* \Rightarrow \\
&= -\frac{\mu_{10}^{n_1}}{\mu_0^3} L^{*3} \sqrt{L^{*2} - G^{*2}} (1 - \cos E^* - \frac{e^*}{2} \operatorname{sen}^2 E^*),
\end{aligned}$$

onde se teve em conta a conhecida relação obtida a partir da equação de Kepler

$$d\ell^* = (1 - e^* \cos E^*) dE^*.$$

E analogamente para  $\mathcal{W}_1^2$

$$\mathcal{W}_1^2 = -\frac{\mu_{20}^{n_2}}{\mu_0^3} L^{*3} \sqrt{L^{*2} - G^{*2}} \left(1 - \cos E^* - \frac{e^*}{2} \sin^2 E^*\right).$$

A terceira componente calcula-se a partir de (4.14)

$$\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \ell^*} \frac{\partial \mathcal{W}_1^3}{\partial L^*} - \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L^*} \frac{\partial \mathcal{W}_1^3}{\partial \ell^*} = \mathcal{H}_{0010}^* - \mathcal{H}_{0010} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{W}_1^3 &= \int_0^{\ell^*} \frac{L^{*3}}{\mu_0^2} (\mathcal{H}_{0010} - \mathcal{H}_{0010}^*) d\ell^* \\ &= \frac{\mu_0^2 R^2}{L^{*3}} \int \left\{ \left[ \frac{1}{4} - \frac{3H^{*2}}{4G^{*2}} \right] \left[ \left( \frac{a^*}{r} \right)^3 - \frac{L^{*3}}{G^{*3}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \left( \frac{a^*}{r} \right)^3 \cos 2(f^* + g^*) \right\} d\ell^* = \\ &= \frac{\mu_0^2 R^2}{L^{*3}} \int \left\{ \left[ \frac{1}{4} - \frac{3H^{*2}}{4G^{*2}} \right] \left[ \int (1 + e^* \cos f^*) \frac{L^{*2}}{G^{*2}} \frac{L^*}{G^*} df^* - \ell^* \frac{L^{*3}}{G^{*3}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \int (1 + e^* \cos f^*) \frac{L^{*2}}{G^{*2}} \frac{L^*}{G^*} \cos 2(f^* + g^*) d\ell^* \right\}, \end{aligned}$$

E obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1^3 &= \frac{\mu_0^2 R^2}{G^{*3}} \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{3H^{*2}}{4G^{*2}} \right) (f^* - \ell^* + e^* \sin f^*) - \frac{3}{8} \left( 1 - \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[ \sin 2(f^* + g^*) + e^* \sin(f^* + 2g^*) + \frac{e^*}{3} \sin(3f^* + 2g^*) \right] \right]. \end{aligned}$$

A última componente, a correspondente a  $c^{-2}$ , vem dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \ell^*} \frac{\partial \mathcal{W}_1^4}{\partial L^*} - \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L^*} \frac{\partial \mathcal{W}_1^4}{\partial \ell^*} &= \mathcal{H}_{0001}^* - \mathcal{H}_{0001} \Rightarrow \\ \mathcal{W}_1^4 &= \int_0^{\ell^*} \frac{L^{*3}}{\mu_0^2} (\mathcal{H}_{0001} - \mathcal{H}_{0001}^*) d\ell^* \\ &= -\frac{\mu_0^2}{L^*} \int \left\{ \sigma'' \left( \frac{a^*}{r} \right)^2 - \sigma'' \frac{L^*}{G^*} - \sigma' \left( \frac{a^*}{r} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_3 \left( \frac{L^*}{G^*} - 1 \right) \left[ \left( \frac{L^*}{G^*} + 1 \right) \text{sen}^2 f^* - 1 \right] \right\} d\ell^* = \\ &= -\frac{\mu_0^2}{L^*} \left\{ \int \sigma'' \frac{L^*}{G^*} df^* - \sigma'' \ell^* \frac{L^*}{G^*} - \int \sigma' dE^* + \sigma' \ell^* - \sigma_3 \left( \frac{L^*}{G^*} - 1 \right) \ell^* \right. \\ &\quad \left. + \sigma_3 \left( \frac{L^{*2}}{G^{*2}} - 1 \right) \int \text{sen}^2 f^* \frac{L^*}{G^*} \frac{G^{*4}}{L^{*4}} \frac{1}{(1 + e^* \cos f^*)^2} df^* \right\}. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$\frac{\text{sen}^2 f^*}{(1 + e^* \cos f^*)^2} = \frac{a^{*2} \eta^{*2}}{r^2} \frac{\text{sen}^2 E^*}{\eta^{*4} \frac{a^{*2}}{r^2}} = \frac{\text{sen}^2 E^*}{\eta^{*2}} = \frac{L^{*2}}{G^{*2}} \text{sen}^2 E^*,$$

a expressão (4.16) transforma-se em

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1^4 &= -\frac{\mu_0^2}{L^*} \left[ \sigma'' \frac{L^*}{G^*} (f^* - \ell^*) - \sigma' (E^* - \ell^*) - \sigma_3 \left( \frac{L^*}{G^*} - 1 \right) \ell^* \right. \\ &\quad \left. + \sigma_3 \left( 1 - \frac{G^{*2}}{L^*} \right) \left( \frac{E^*}{2} - \frac{1}{4} \text{sen} 2E^* \right) \right]. \end{aligned}$$

A troca de variáveis, à primeira ordem, virá dada por

$$\begin{aligned}
 \ell &= \ell^* + \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial L^*}, & L &= L^* - \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial \ell^*}, \\
 g &= g^* + \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial G^*}, & G &= G^* - \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g^*}, \\
 h &= h^* + \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial H^*}, & H &= H^* - \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial h^*},
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

onde as derivadas parciais com respeito às novas variáveis, obtidas após uma série de cálculos, são

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial \ell^*} &= -\alpha_1 \frac{\mu_{10}^{n_1}}{\mu_0^3} L^{*3} \sqrt{L^{*2} - G^{*2}} \operatorname{sen} E^* \\
 &\quad -\alpha_2 \frac{\mu_{20}^{n_2}}{\mu_0^3} L^{*3} \sqrt{L^{*2} - G^{*2}} \operatorname{sen} E^* \\
 &\quad -J_2 \frac{\mu_0^2 R^2}{L^{*3}} \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{3H^{*2}}{4G^{*2}} \right) \left( \frac{L^{*3}}{G^{*3}} - \frac{a^{*3}}{r^3} \right) - \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \left( \frac{a^{*3}}{r^3} \right) \cos 2(f^* + g^*) \right] \\
 &\quad -c^{-2} \frac{\mu_0^2}{L^*} \left[ \sigma'' \left( \frac{a^*}{r} \right)^2 - \sigma'' \frac{L^*}{G^*} - \sigma' \left( \frac{a^*}{r} - 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma_3 \left( \frac{L^*}{G^*} - 1 \right) \left[ \left( \frac{L^*}{G^*} + 1 \right) \operatorname{sen}^2 f^* - 1 \right] \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g^*} &= -J_2 \frac{3\mu_0^2 R^2}{4G^{*3}} \left( 1 - \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \cos 2(f^* + g^*) + e^* \cos 2(f^* + 2g^*) + \frac{e^*}{3} \cos(3f^* + 2g^*) \right],
 \end{aligned}$$

e também

$$\frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial h^*} = 0,$$

já que a função geratriz é independente de  $h^*$  devido à simetria axial do problema. Portanto, de (4.17) deduz-se que

$$H = H^*.$$

O resto de derivadas parciais da função geratriz vêm dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial L^*} = & \\ & = -\alpha_1 \frac{\mu_{10}^{n_1}}{\mu_0^3} \left[ \frac{L^{*2}(4L^{*2} - 3G^{*2})}{\sqrt{L^{*2} - G^{*2}}} (1 - \cos E^*) + 2L^* (G^{*2} - L^{*2}) \operatorname{sen}^2 E^* \right] \\ & - \alpha_2 \frac{\mu_{20}^{n_2}}{\mu_0^3} \left[ \frac{L^{*2}(4L^{*2} - 3G^{*2})}{\sqrt{L^{*2} - G^{*2}}} (1 - \cos E^*) + 2L^* (G^{*2} - L^{*2}) \operatorname{sen}^2 E^* \right] \\ & + J_2 \frac{\mu_0^2 R^2}{e^* L^{*3} G^*} \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{3H^{*2}}{4G^{*2}} \right) \left[ 1 + \frac{a^*}{r} + \frac{a^{*2}}{r^2} (1 - e^{*2}) \right] \operatorname{sen} f^* \right. \\ & \quad \left. - \frac{3}{8} \left( 1 - \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \left[ 1 - \frac{a^*}{r} - \frac{a^{*2}}{r^2} (1 - e^{*2}) \right] \right] \operatorname{sen}(f^* + 2g^*) \\ & + \left[ \frac{1}{3} + \frac{a^*}{r} + \frac{a^{*2}}{r^2} (1 - e^{*2}) \right] \operatorname{sen}(3f^* + 2g^*) \\ & - c^{-2} \frac{\mu_0^2}{L^* G^*} \left[ \left( \frac{2\sigma'' - (1 - e^{*2})\sigma'}{e^*} \right) \operatorname{sen} f^* + \frac{\sigma''}{2} \operatorname{sen} 2f^* + \sigma' e^* \frac{r}{a^*} \operatorname{sen} f^* \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sigma_3 G^*}{2 L^*} (2e^{*2} - 1) \left( E^* - \frac{\operatorname{sen} 2E^*}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sigma_3 G^{*4}}{2 e^* L^{*3}} \operatorname{sen} f^* (1 - \cos 2E^*) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial G^*} = & \\
 = & +\alpha_1 \frac{\mu_{10}^{n_1}}{\mu_0^3} \frac{L^{*3} G^*}{\sqrt{L^{*2} - G^{*2}}} (1 - \cos E^*) \\
 & +\alpha_2 \frac{\mu_{20}^{n_2}}{\mu_0^3} \frac{L^{*3} G^*}{\sqrt{L^{*2} - G^{*2}}} (1 - \cos E^*) \\
 & + J_2 \frac{\mu^2 R^2}{G^{*4}} \left[ \left( \frac{15 H^{*2}}{4 G^{*2}} - \frac{3}{4} \right) (f^* - \ell^* + e^* \operatorname{sen} f^*) + \frac{3}{8} \left( 3 - 5 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \cdot \right. \\
 & \quad \left. \cdot \left[ \operatorname{sen} 2(f^* + g^*) + e^* \operatorname{sen}(f^* + 2g^*) + \frac{e^*}{3} \operatorname{sen}(3f^* + 2g^*) \right] \right] \\
 & + J_2 \frac{\mu_0^2 R^2}{e^* L^{*2} G^{*2}} \left[ \left( -\frac{1}{4} + \frac{3 H^{*2}}{4 G^{*2}} \right) \left[ 1 + \frac{a^*}{r} + \frac{a^{*2}}{r^2} (1 - e^{*2}) \right] \operatorname{sen} f^* \right. \\
 & \quad + \frac{3}{8} \left( 1 - \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right) \left[ 1 - \frac{a^*}{r} - \frac{a^{*2}}{r^2} (1 - e^{*2}) \right] \operatorname{sen}(f^* + 2g^*) \\
 & \quad \left. + \left[ \frac{1}{3} + \frac{a^*}{r} + \frac{a^{*2}}{r^2} (1 - e^{*2}) \right] \operatorname{sen}(3f^* + 2g^*) \right] \\
 & + c^{-2} \frac{\mu_0^2}{G^{*2}} \left[ \left( \frac{2\sigma'' - (1 - e^{*2})\sigma'}{e^*} \right) \operatorname{sen} f^* + \frac{\sigma''}{2} \operatorname{sen} 2f^* + \sigma''(f^* - \ell^*) \right. \\
 & \quad - \sigma_3 \ell^* + \sigma_3 \frac{G^{*3}}{L^{*2}} \left( E^* - \frac{\operatorname{sen} 2E^*}{2} \right) \\
 & \quad \left. + \sigma_3 \left( 1 - \frac{G^{*2}}{L^*} \right) \frac{1 - e^{*2}}{2e^*} \operatorname{sen} f^* (1 - \cos 2E^*) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial H^*} &= \\ &= -J_2 \frac{\mu_0^2 R^2}{G^{*4}} \cos i^* \left[ \frac{3}{2} (f^* - \ell^* + e^* \sin f^*) - \frac{3}{4} \sin 2(f^* + g^*) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} e^* \sin(f^* + 2g^*) - \frac{e^*}{4} \sin(3f^* + 2g^*) \right], \end{aligned}$$

Por outro lado, como a nova função hamiltoniana  $\mathcal{H}^*$  dada em (4.15) não depende das variáveis angulares  $\ell^*$ ,  $g^*$  e  $h^*$ , as equações canônicas de Hamilton podem ser integradas na forma

$$\begin{aligned} \frac{dL^*}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \ell^*} = 0 \Rightarrow L^* = cte, \\ \frac{dG^*}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial g^*} = 0 \Rightarrow G^* = cte, \\ \frac{dH^*}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial h^*} = 0 \Rightarrow H^* = cte. \end{aligned}$$

O resto de equações canônicas integram-se à primeira ordem. Assim, a anomalia média

$$\begin{aligned} \frac{d\ell^*}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial L^*} &= +\frac{\mu_0^2}{L^{*3}} \\ &\quad -\alpha_1 \frac{2\mu_{10}^{n_1} \mu_0}{L^{*3}} (t - t_0) - \alpha_2 \frac{2\mu_{20}^{n_2} \mu_0}{L^{*3}} (t - t_0) \\ &\quad -J_2 \frac{3\mu_0^4 R^2}{4L^{*4} G^{*3}} \left[ 1 - 3 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right] \\ &\quad +c^{-2} \frac{\mu_0^4}{L^{*5}} \left[ 3(\sigma'' + \sigma_3) \frac{L^*}{G^*} + 4(\sigma_0 - \sigma' - \sigma_3) \right]. \end{aligned}$$

Desta última equação

$$\ell^* = \ell_0^* + \ell_1^* t + \ell_2^* t^2,$$

onde

$$\begin{aligned} \ell_1^* &= +\frac{\mu_0^2}{L^{*3}} + \alpha_1 \frac{2\mu_{10}^{n_1}\mu_0}{L^{*3}} t_0 + \alpha_2 \frac{2\mu_{20}^{n_2}\mu_0}{L^{*3}} t_0 \\ &\quad - J_2 \frac{3\mu_0^4 R^2}{4L^{*4}G^{*3}} \left[ 1 - 3\frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right] + c^{-2} \frac{\mu_0^4}{L^{*5}} \left[ 3(\sigma'' + \sigma_3) \frac{L^*}{G^*} + 4(\sigma_0 - \sigma' - \sigma_3) \right], \\ \ell_2^* &= -\alpha_1 \frac{\mu_{10}^{n_1}\mu_0}{L^{*3}} - \alpha_2 \frac{\mu_{20}^{n_2}\mu_0}{L^{*3}}, \end{aligned}$$

sendo  $\ell_0^*$  uma constante de integração.

Analogamente, para o argumento do periastro

$$\frac{dg^*}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial G^*} = -J_2 \frac{3\mu_0^4 R^2}{4L^{*3}G^{*4}} \left[ 1 - 5\frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right] + c^{-2} \frac{\mu_0^4}{L^{*3}G^{*2}} (\sigma'' + \sigma_3),$$

e integrando

$$g^* = g_0^* + g_1^* t$$

onde

$$g_1^* = -J_2 \frac{3\mu_0^4 R^2}{4L^{*3}G^{*4}} \left[ 1 - 5\frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right] + c^{-2} \frac{\mu_0^4}{L^{*4}G^{*2}} (\sigma'' + \sigma_3),$$

sendo  $g_0^*$  uma constante de integração.

E por último, para o ângulo do nodo

$$\frac{dh^*}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial H^*} = -J_2 \frac{3\mu_0^4 R^2}{2L^{*3} G^{*4}} \frac{H^*}{G^*},$$

e integrando

$$h^* = h_0^* + h_1^* t,$$

onde

$$h_1^* = -J_2 \frac{3\mu_0^4 R^2}{2L^{*3} G^{*4}} \frac{H^*}{G^*},$$

sendo  $h_0^*$  uma constante de integração.

#### CÁLCULO DE EFEMÉRIDES

- Elementos orbitais iniciais:

Parte-se de certos valores iniciais dos elementos orbitais

$$(a_0^*, e_0^*, i_0^*, T_0^*, \omega_0^*, \Omega_0^*)$$

correspondentes a um instante  $t_0$  e com  $\mu_0$  o valor da massa inicial (ver Fig. 4.8 ao final do capítulo).

- Cálculo das variáveis de Delaunay:

Obtêm-se as variáveis de Delaunay correspondentes

$$L_0^* = \sqrt{\mu_0 a_0^*}, \quad \ell_0^* = \sqrt{\frac{\mu_0}{a_0^{*3}}} (t_0 - T_0^*),$$

$$G_0^* = L_0^* \sqrt{1 - e_0^{*2}}, \quad g_0^* = \omega_0^*,$$

$$H_0^* = G_0^* \cos i_0^*, \quad h_0^* = \Omega_0^*.$$

- Aplicação do método à inversa:

Calculam-se as constantes do movimento:  $L^*$ ,  $G^*$ ,  $H^*$ ,  $\ell_0^*$ ,  $g_0^*$  e  $h_0^*$  segundo

$$\begin{aligned} L^* &= L_0^* + \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \ell^*} \right)_0, & \ell_0^* &= \ell_0^* - \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial L^*} \right)_0, \\ G^* &= G_0^* + \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g^*} \right)_0, & g_0^* &= g_0^* - \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial G^*} \right)_0, \\ H^* &= H_0^* + \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial h^*} \right)_0 = H_0^*, & h_0^* &= h_0^* - \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial H^*} \right)_0, \end{aligned}$$

$$\ell^* = \ell_0^* + \ell_1^* t + \ell_2^* t^2,$$

$$g^* = g_0^* + g_1^* t,$$

$$h^* = h_0^* + h_1^* t.$$

- Cálculo dos elementos orbitais:

Obtêm-se os elementos orbitais em qualquer instante  $t$

$$a = \frac{L^2}{\mu}, \quad T = t - \ell \frac{L^3}{\mu^2},$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}, \quad \omega = g,$$

$$i = \arccos\left(\frac{H}{G}\right), \quad \Omega = h.$$

Há que notar que é habitual substituir a época de passagem pelo periastro pela anomalia excêntrica ou pela anomalia verdadeira. Será precisamente esta última a que se utilizara no cálculo neste trabalho.

Quando se tem em conta a segunda ordem de perturbações, aparecem no termo misto da nova hamiltoniana  $J_2 c^{-2}$  termos periódicos de longo período dependentes do argumento do periastro da forma  $\cos 2g^*$ . Para eliminá-los seria preciso aplicar novamente o método, agora na sua versão biparamétrica, mediante uma transformação canónica infinitesimal do tipo

$$(L^*, G^*, H^*, \ell^*, g^*, h^*) \longrightarrow (L^{**}, G^{**}, H^{**}, \ell^{**}, g^{**}, h^{**}),$$

de modo que a nova hamiltoniana

$$\mathcal{H}^{**} \equiv \mathcal{H}^{**}(-, -, -; L^{**}, G^{**}, H^{**})$$

for independente da variável angular  $g^*$ , com o qual na nova hamiltoniana  $\mathcal{H}^{**}$  apenas ficariam os termos seculares.

### 4.3.2 Integração analítica para o problema completo

A implementação da versão 4-paramétrica do método canónico apresentado no Capítulo 3 levou-se a cabo com um código programado em *Mathematica*<sup>®</sup>. A aplicação resultante foi testada com os exemplos bem conhecidos da influência do achatamento polar da Terra nas órbitas de satélites artificiais (Soffel et al. 1988) e dos efeitos relativistas produzidos pelo campo gravitacional do Sol no movimento do planeta Mercúrio (Richardson e Kelly 1988) à primeira ordem. Deste modo, reproduziram-se os resultados obtidos por outros autores tanto nas variações periódicas do semieixo maior e da excentricidade, como nas seculares do argumento do periastro e do ângulo do nodo.

Na Figura 4.6 representa-se a evolução dos elementos orbitais para um sistema binário com primária elipsoidal e com perda de massa de ambas as componentes. Consideram-se, aliás, os efeitos relativistas criados pelo campo gravitacional. Os elementos orbitais e parâmetros do sistema mostram-se na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: ELEMENTOS ORBITAIS E PARÂMETROS DO SISTEMA BINÁRIO.

ELEMENTOS ORBITAIS		PARÂMETROS	
$a$ (UA)	0.5	$m_1$ ( $M_\odot$ )	15
$e$	0.2	$m_2$ ( $M_\odot$ )	1.0
$i$ ( $^\circ$ )	50	$\alpha_1$	$10^{-4}$
$T$	2000	$\alpha_2$	$10^{-6}$
$\omega$ ( $^\circ$ )	20	$n_1$	1.5
$\Omega$ ( $^\circ$ )	40	$n_2$	3.0
		$R_1$ ( $R_\odot$ )	5.0
		$J_2$	$10^{-2}$

O valor da constante de gravitação que se tomou foi

$$G = 4 \pi^2 \text{ UA}^3 \text{ M}_\odot^{-1} \text{ anos}^{-2}.$$

O intervalo de integração foi de 100 anos com um passo de  $10^{-4}$  anos, sendo o tempo de computador de 47'37" num Pentium IV a 2.80 MHz com 512 Mb de RAM.

As diferenças entre os valores iniciais e finais dos elementos orbitais mostram-se na Tabela 4.4. As mais notáveis são as variações seculares que se produzem no semieixo maior, na época de passagem pelo periastro, no argumento do periastro e no ângulo do nodo. O contributo de cada um dos cenários considerados às variações observadas é o seguinte:

Tabela 4.4: VARIAÇÕES DOS ELEMENTOS ORBITAIS AO CABO DE 100 ANOS.

$\Delta a$	$+1.90 \cdot 10^{-2}$ UA
$\Delta e$	$-2.76 \cdot 10^{-5}$
$\Delta i$	$+0'41$
$\Delta T$	$-3.79$ anos
$\Delta \omega$	$+8^{\circ}04$
$\Delta \Omega$	$-9^{\circ}22$

### Perda de massa em função do tempo

Produz variações periódicas na excentricidade e no argumento do periastro. Não tem nenhum efeito sobre a inclinação e o ângulo do nodo, enquanto é a responsável da totalidade dos incrementos seculares que acontecem no semieixo maior e na época de passagem pelo periastro.

### Primária com forma elipsoidal

Produz variações periódicas em todos os elementos orbitais e importantes variações seculares no argumento do periastro e no ângulo do nodo. Em particular, é a causante na sua totalidade da retrogradação do ângulo do nodo e de parte do deslocamento, avanço ou atraso segundo o valor da inclinação, do argumento do periastro.

### Efeitos relativistas

Quando se consideram os efeitos relativistas em primeira aproximação pós-newtoniana aparecem variações periódicas em todos os elementos orbitais excepto na inclinação e no ângulo do nodo, que permanecem inalterados. Porém, a variação mais notável é o avanço secular do argumento do periastro.

As variações seculares que aparecem neste problema resumem-se na Tabela 4.5, durante 100 anos, e mostram-se na Figura 4.6 para um intervalo de 1 ano. No exemplo integrado nesta secção o avanço do argumento do periastro partilha-se do seguinte modo: o 95% é devido à forma elipsoidal da primária, enquanto o 5% restante é produzido por efeitos relativistas.

Tabela 4.5: VARIAÇÕES SECULARES DOS ELEMENTOS ORBITAIS E OS FENÓMENOS QUE AS PRODUZEM.

	VALORES AO CABO DE 100 ANOS	FENÓMENO
$\Delta a$	$+1.90 \cdot 10^{-2}$ UA	Perda de massa
$\Delta T$	-3.79 anos	Perda de massa
$\Delta \omega$	+7°.63 (95%) +0°.40 (5%)	Componente elipsoidal Efeitos relativistas
$\Delta \Omega$	-9°.22	Componente elipsoidal

Das equações que descrevem o movimento do sistema deduz-se que, excepto o semieixo maior que sempre aumenta secularmente por causa da perda de massa, o sentido de crescimento do argumento do periastro e do ângulo do nodo dependerá da inclinação da órbita:

$$\Delta \omega \sim 5 \cos^2 i - 1$$

$$\Delta \Omega \sim \cos i$$

Considerando o cenário em que a primária apresenta forma elipsoidal, existirá uma inclinação crítica  $i_{\text{crítica}} = 1/\sqrt{5} \simeq 63.4^\circ$  (ver Fig. 4.7) para a qual o argumento do periastro não apresenta variação secular. Para valores maiores este elemento orbital passará a retrogradar. De facto, quando a

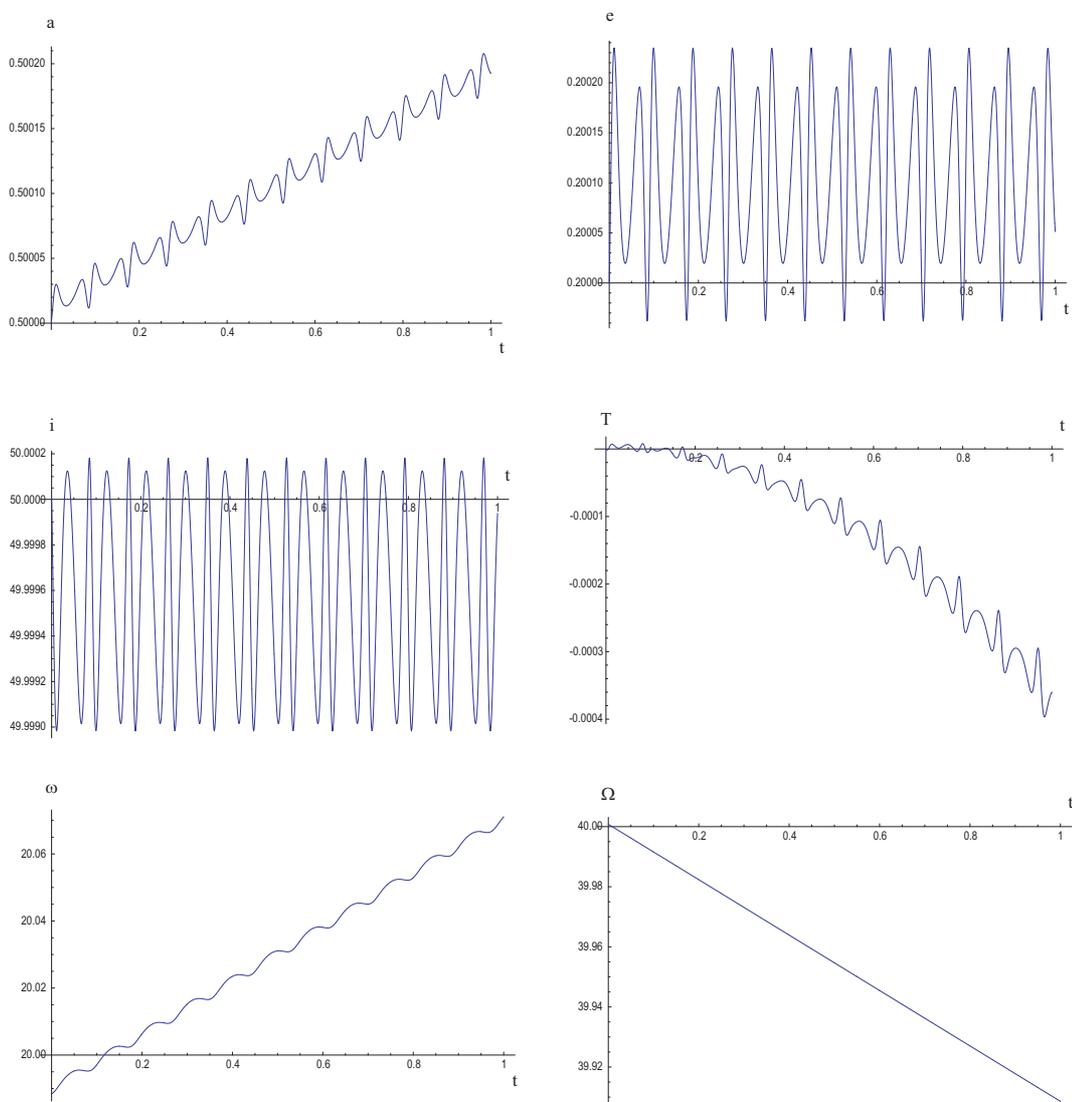


Figura 4.6: Variações dos elementos orbitais para o sistema submetido ao conjunto completo de perturbações (intervalo de 1 ano).

inclinação é de  $90^\circ$  a retrogradação do argumento do periastro é máxima, enquanto o ângulo do nodo permanece constante.

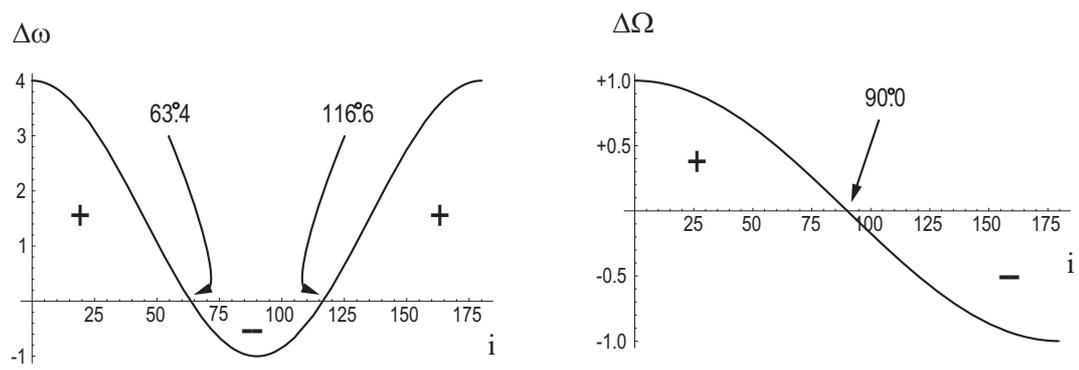


Figura 4.7: Dependência das variações seculares do argumento do periastro  $\Delta\omega$  e do ângulo do nodo  $\Delta\Omega$  com a inclinação orbital.

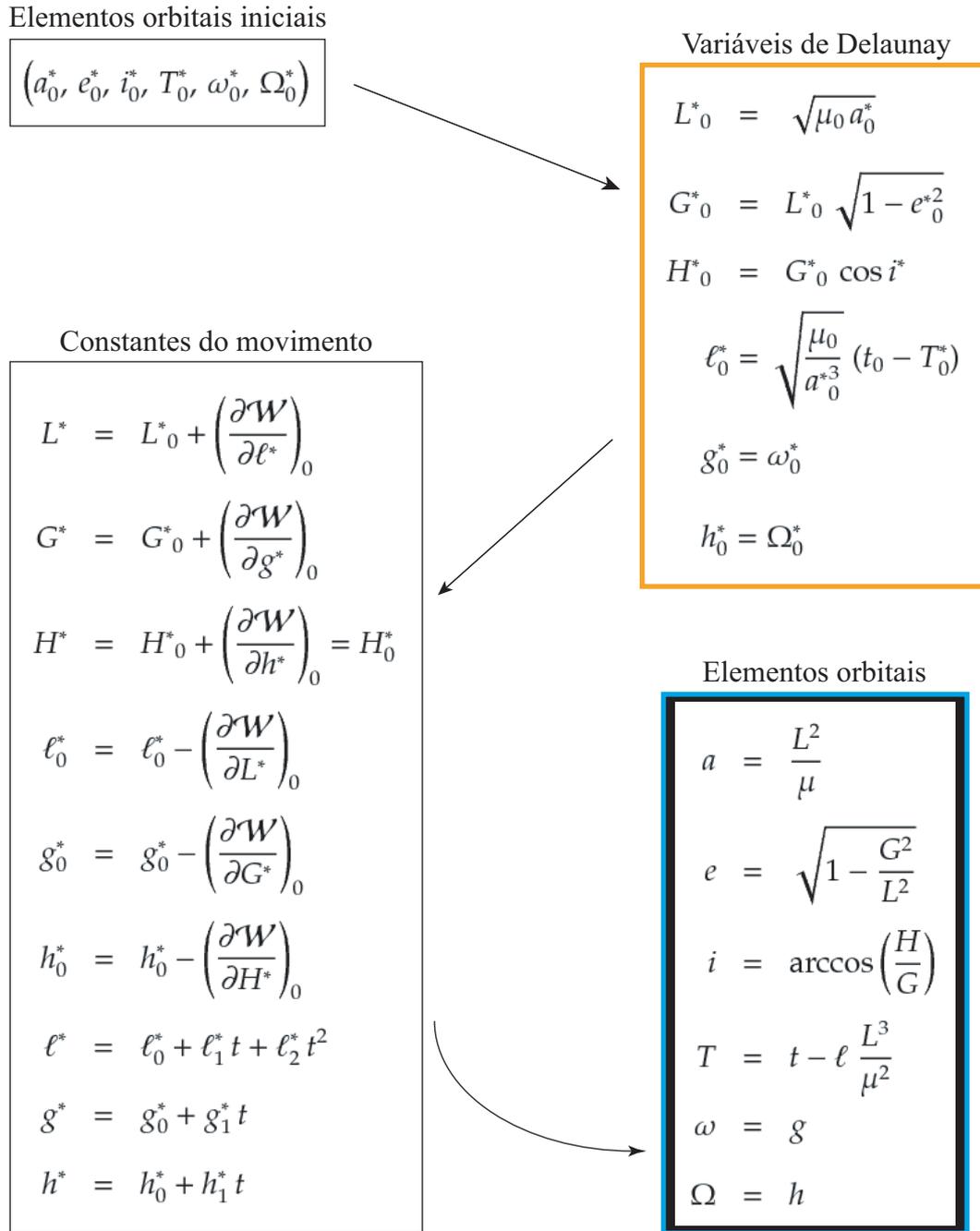


Figura 4.8: Esquema do processo de cálculo a partir do método canônico de perturbações baseado em transformações de Lie.

# Capítulo 5

## Análise da estabilidade em sistemas triplos com massa variável

*“Sie benötigen Chaos in Ihrer Seele, Geburt zu einem tanzenden Stern zu geben.” \**

FRIEDRICH NIETZSCHE (1844–1900)

### 5.1 Introdução

Como se viu nos capítulos anteriores, a perda de massa num sistema binário produz importantes variações seculares em alguns dos seus elementos orbitais. Inclusive, para sistemas binários com alta excentricidade, a evo-

---

\* “É preciso ter um caos dentro de si para dar à luz uma estrela bailarina.” *Also sprach Zarathustra*, 1885.

lução do par sob a perda de massa por perturbações gravitacionais tipo efeito periastro poderia eventualmente conduzir a uma órbita hiperbólica.

Num cenário de maior complexidade dinâmica, como é o caso dos sistemas múltiplos, resulta especialmente interessante estudar tais variações, directamente ligadas à estabilidade orbital. Em particular, analisaremos a estabilidade em sistemas triplos hierarquizados, supondo que a existência de um terceiro corpo perturba gravitacionalmente a órbita do sistema binário interno, quando existe perda de massa de um ou mais corpos. Para isso consideraremos alguns dos critérios mais utilizados no estudo da estabilidade nesta classe de sistema estudando a sua dependência com a perda de massa (Andrade e Docobo 2004).

Este modelo, junto com os resultados quanto à evolução dos elementos orbitais e a estabilidade do sistema, é aplicado a duas classes de sistemas triplos hierarquizados:

1. Sistemas estelares triplos.
2. Sistemas binários hospedando um planeta.

A metodologia aqui exposta será aplicada no Capítulo 6 ao caso em que num sistema triplo hierarquizado a binária interna sofre perda de massa enquanto a componente distante captura uma fracção desta massa que escapa do sistema triplo.

## 5.2 Sistemas estelares triplos

Como um caso de especial interesse do problema de três corpos, historicamente um dos principais temas da mecânica celeste (Marchal 1990), define-se o problema estelar de três corpos hierarquizado como aquele de massas arbitrárias, mas comparáveis, movendo-se em órbitas onde a separação entre dois dos corpos é muito menor que a distância ao terceiro (Harrington 1968, 1969; Docobo 1977; Abad 1984; Ling 1988). Supomos,

além disso, que a separação entre as componentes da binária interna é o suficientemente grande como para que os corpos possam ser tratados como massas pontuais e que a distância ao terceiro é o suficientemente pequena como para que as forças de maré galácticas se possam desprezar. O único pequeno parâmetro é o quociente entre as separações, que é da ordem de 0.1 ou inferior, de modo que existe certa semelhança entre este problema e o problema lunar, apesar de que no primeiro não existe nenhuma restrição nem para as excentricidades ( $e < 1$ ) nem para a inclinação mútua.

Nos últimos anos tem-se abordado a análise da estabilidade desta classe de sistemas a partir da teoria das forças de maré para sistemas binários fechados, com a qual se obtêm diminuições seculares do semieixo maior, da excentricidade e do argumento do periastro. Assim, considerando marés dinâmicas num sistema binário fechado onde o potencial gerador da maré é dependente do tempo e periódico, Ruymaekers (1992) determina diminuições seculares do semieixo maior e da excentricidade para um estrela não rotante da sequência principal de  $5 M_{\odot}$ . Porém, no caso dos sistemas triplos, Orlov e Petrova (1996) concluíram que o estado de equilíbrio de circularização e sincronização que um esperaria não é atingido devido aos efeitos seculares provocados pelo terceiro corpo. Inclusive no caso de sistemas triplos abertos as perturbações seculares de ordens superiores (octopolo) podem contribuir a que certos fenómenos, tais como a precessão relativista ou a dissipação por maré, ganhem importância na evolução a longo prazo do sistema, levando a cenários totalmente diferentes ao caso em que apenas se tem em conta o termo quadrupolar (Ford, Kozinsky e Rasio 2000).

No que se refere a sistemas binários muito fechados também permanecem sem resolver algumas questões fundamentais a respeito da evolução do sistema. Assim, para certos sistemas eclipsantes existem algumas discrepâncias entre os movimentos apsidais observados e os preditos pela teoria de marés e a teoria geral da relatividade, de modo que os valores observados são menores que os que se obtêm a partir dos cálculos teóricos.

Com a descoberta destas discrepâncias os próprios autores do mesmo sugeriram duas possíveis explicações (Martynov e Khaliullin 1980):

1. Presença de um terceiro corpo no sistema.
2. Algum *surpreendente* mecanismo de decrescimento da excentricidade que, pela sua vez, provoque variações no argumento do periastro.

Alguns autores, a fim de explicá-las, inclusive tiveram em conta a hipótese de possíveis alterações da relatividade geral considerando um tensor fundamental  $g_{\mu\nu}$  não simétrico (Moffat 1984). Contudo, uma das hipóteses em princípio mais factíveis que poderia explicar estas discrepâncias é a de um terceiro corpo numa órbita quase perpendicular. O principal problema desta configuração reside na dificuldade da determinação da sua estabilidade. Recentemente, Khodykin, Zakharov e Andersen (2004) descobriram algumas condições nas quais a estabilidade a longo prazo estaria garantida.

## 5.3 Planetas extra-solares

### 5.3.1 Planetas extra-solares em estrelas solitárias

Desde a descoberta do primeiro planeta fora do Sistema Solar (Mayor e Queloz 1995) até o 1 de Novembro de 2006 têm sido descobertos uns 210 planetas extra-solares. Com certeza, este número ir-se-á incrementando nos próximos anos graças a diversos programas já em marcha e a projectos futuros, tanto em terra como no espaço. Actualmente estão-se a descobrir planetas com algumas massas terrestres, o que implica a capacidade de detectar variações nas velocidades radiais da ordem de  $1 \text{ m s}^{-1}$ . No futuro próximo, quando se possam detectar variações de uns poucos centímetros por segundo, espera-se que se comecem a descobrir planetas tipo terrestre situados a distâncias similares à da Terra ao Sol (ver Fig. 5.1). Também é provável que se descubram os primeiros satélites em redor de planetas

extra-solares, possibilidade que, há pouco tempo, tem sido teoricamente analisada (Andrade e Docobo 2006).

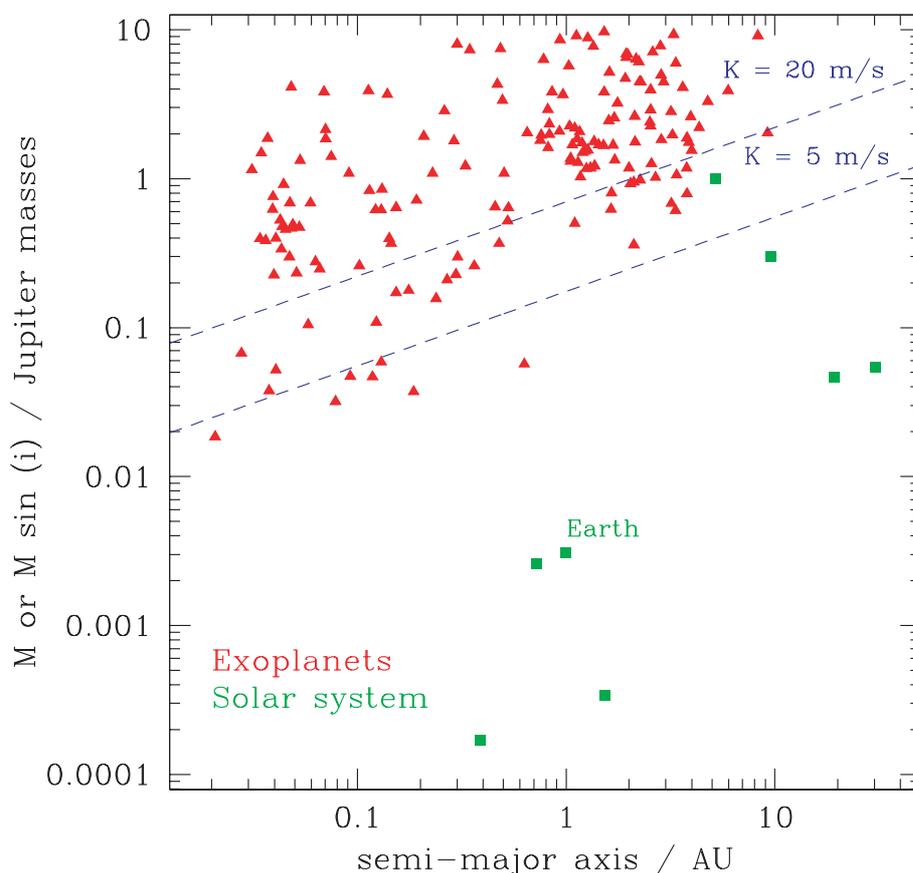


Figura 5.1: Distribuição do semieixo maior frente à massa dos planetas extra-solares. As duas linhas descontínuas indicam os correspondentes limiares para as variações na velocidade radial (Armitage 2006).

De um ponto de vista restrito da mecânica celeste a distinção entre estrela e planeta carece de importância, já que, em geral, a *única* propriedade fundamental é a massa. Mas como se está a ver no caso do problema de perda de massa estelar, esta vem determinada pelas características astrofísicas da própria estrela. Deste modo, embora o modelo matemático que descreve o movimento de um sistema triplo estelar e o de um sistema binário estelar hospedando um planeta sejam, em princípio, iguais, os parâmetros que determinam a sua ulterior evolução dinâmica não o

são. Assim, o primeiro problema que um deve tomar em consideração é a própria definição de planeta. Normalmente assume-se que a fronteira entre um planeta e uma anã castanha está definida pelo limiar de massa em que se iniciam as reacções dos núcleos de deutério,  $13 M_{\text{J}}$ , de maneira que um objecto com uma massa inferior<sup>1</sup> em órbita em redor de estrelas ou remanentes estelares será considerado um planeta —em qualquer outro caso considerar-se-á uma anã castanha. De facto, a ausência de objectos com massas entre  $10 M_{\text{J}}$  e  $100 M_{\text{J}}$ , o denominado *deserto das anãs castanhas*, é o argumento mais sólido para acreditar que os mecanismos de formação de planetas e de estrelas de baixa massa não são iguais. Por esta razão, na prática é habitual adoptar o critério de uma massa menor de  $10 M_{\text{J}}$  como uma definição útil de planeta.

De qualquer modo, o modelo matemático que definiremos para sistemas triplos hierarquizados resultará ser o esquema idóneo para o estudo de um sistema em que um planeta está em órbita em redor de uma estrela cuja companheira se situa a uma distância relativamente maior que a distância entre o planeta e a estrela primária. Aliás, o mesmo modelo corresponde também ao de um sistema binário onde o objecto distante é um planeta que está em órbita em redor do centro de massas das duas componentes estelares. Uma configuração diferente a estas seria a de um sistema multiplanetário em que as órbitas dos planetas aparecem perturbadas pelo movimento dos planetas vizinhos (Rodríguez e Gallardo 2005; Adams e Laughlin 2006a).

### **O mistério das altas excentricidades observadas**

Ainda em órbitas inicialmente circulares a própria geometria do sistema hierarquizado gera certa excentricidade na órbita do subsistema binário interno devido às perturbações provocadas pela estrela distante (Georgakarakos 2002, 2004). Este fenómeno acontece, inclusive, no caso planetário de massas não comparáveis (Georgakarakos 2006).

---

<sup>1</sup> $M_{\text{J}}$  é a massa do planeta Júpiter.

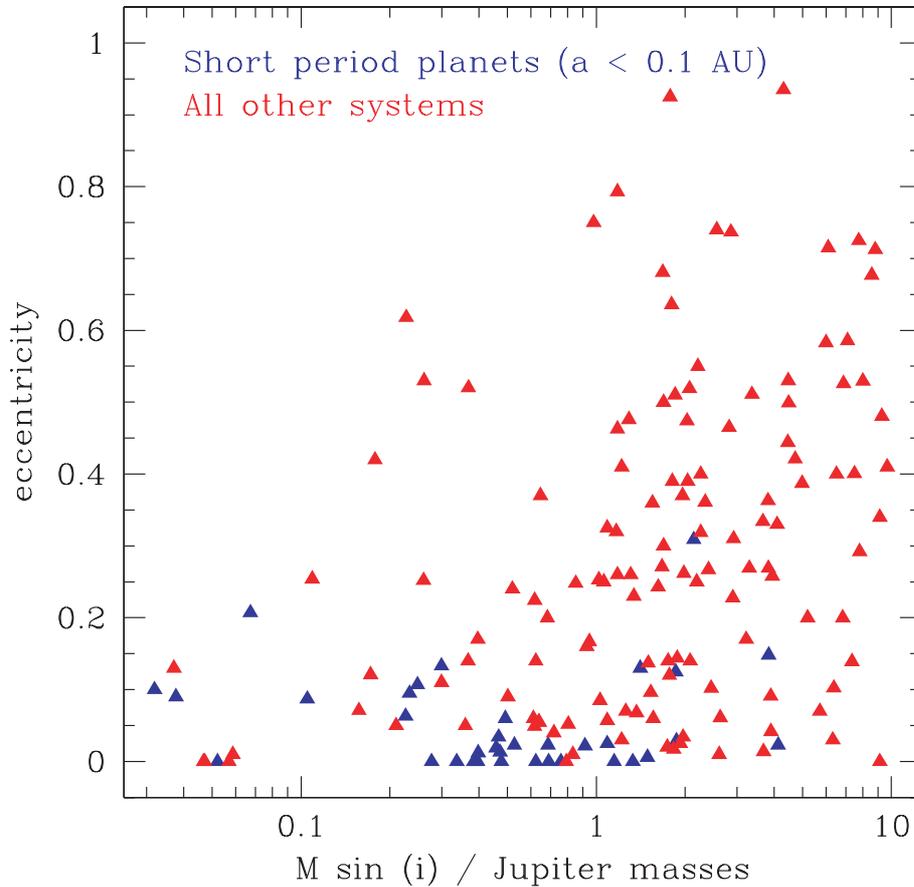


Figura 5.2: Distribuição da excentricidade frente à massa dos planetas extra-solares (Armitage 2006).

Por outro lado, aproximadamente um 10% dos planetas extra-solares descobertos estão muito próximos às suas estrelas, com períodos de menos de 5 dias. Estes *Júpiteres quentes*, que é o nome que recebem habitualmente, sofrem potentes forças de maré que tendem a circularizar a sua órbita. Porém, no caso de existirem mais planetas com órbitas afastadas, a evolução a longo prazo dos Júpiteres quentes virá condicionada pelas perturbações induzidas por estes planetas externos, as quais tenderão a aumentar a sua excentricidade. A acção conjunta destes dois fenómenos opostos, processo de circularização e incremento da excentricidade, produzirá uma grande dissipação da energia no interior destes Júpiteres quentes que, pela sua vez,

poderia ocasionar perda de massa e explicar assim a relativa baixa massa (ver Fig. 5.2) que possuem estes planetas (Adams e Laughlin 2006b).

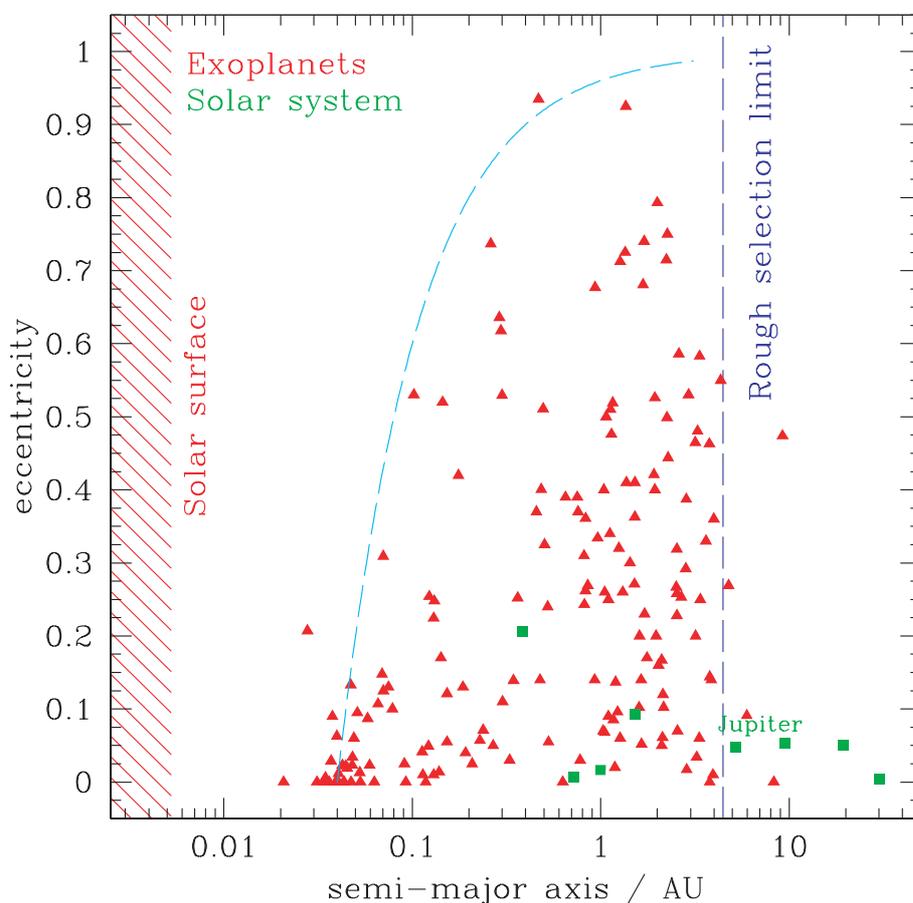


Figura 5.3: Distribuição da excentricidade frente ao semieixo maior dos planetas extra-solares. A ausência de planetas à direita da linha vertical azul é devida ao limiar de sensibilidade do método de detecção por velocidades radiais (Armitage 2006).

No entanto, isto não explica a distribuição observada de excentricidades, e esta segue a ser um dos maiores mistérios que envolve o estudo dos planetas extra-solares. Assim, de todos os planetas extra-solares conhecidos, apenas uns poucos possuem excentricidades próximas a zero, aqueles com os menores semieixos maiores (ver Fig. 5.3).

É conhecido que a formação planetária a partir de discos de acreção origina planetas com órbitas quase circulares como acontece, por exemplo, no Sistema Solar. Portanto, descartando efeitos de selecção observacionais que favorecessem a descoberta de planetas com altas excentricidades com o método das velocidades radiais, é claro que deverão existir um ou mais mecanismos que produzam aumento da excentricidade. Até ao momento, estes foram os propostos (Tremaine e Zakamska 2003):

1. Interações com o disco de gás protoplanetário.
2. Encontros próximos entre planetas.
3. Interações ressonantes entre planetas.
4. Interações seculares com companheiras estelares afastadas.
5. Processos de difusão no espaço de fases.
6. Propagação de perturbações através de outros planetas.
7. Formação a partir de uma nuvem proto-estelar em colapso.

Porém, nenhum destes mecanismos é totalmente satisfatório e a maioria deles precisam de condições iniciais concretas demais (Zakamska e Tremaine 2004).

### 5.3.2 Planetas extra-solares em sistemas binários

A descoberta de planetas extra-solares em sistemas binários, mais numerosos que as estrelas solitárias, tem levado a um crescente interesse pela estabilidade destes sistemas, os quais apresentam propriedades orbitais diferentes às dos planetas em órbita em redor de estrelas solitárias (Eggenberger, Udry e Mayor 2004).

Os planetas extra-solares em sistemas binários podem aparecer fundamentalmente em três configurações (Dvorak 1986):

**Órbita tipo P** *Órbita tipo planeta* onde o terceiro corpo orbita em redor dos primários.

**Órbita tipo S** *Órbita tipo satélite* onde o terceiro corpo orbita em redor de um dos primários.

**Órbita tipo L** *Órbita tipo livrador* onde o terceiro corpo está a livrar em redor de um dos pontos triangulares de Lagrange,  $L_4$  ou  $L_5$ .

A última destas configurações não é de grande interesse no estudo de planetas em sistemas binários, já que para que as órbitas em redor de  $L_4$  e  $L_5$  sejam estáveis tem-se que verificar a restritiva condição  $\frac{m_1}{m_1 + m_2} < 0.04$ . Portanto, centraremos o nosso estudo em aqueles sistemas com órbitas planetárias tipo P ou S (ver Fig. 5.4).

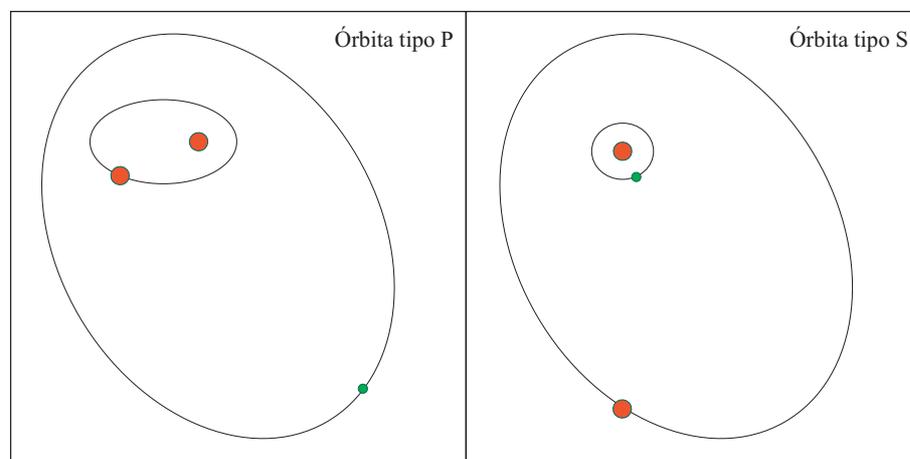


Figura 5.4: Órbitas tipo P e tipo S num sistema binário com um planeta (círculo verde).

Os dados actuais indicam que aproximadamente um 20% das estrelas com planetas são membros de sistemas binários ou múltiplos, embora a percentagem real seja maior, já que os dados estão afectados por efeitos

de selecção. Excepto, talvez, em dois casos: PSR B1620-26 e HD 202206, no resto de sistemas as órbitas planetárias são do tipo S (Haghighipour 2006). Isto explica-se facilmente pelo facto de que o método mais utilizado de detecção por variações nas velocidades radiais favorece a detecção de sistemas em que o planeta está próximo a uma das estrelas.

Quase todos estes sistemas múltiplos são abertos (entre 100 e 6 000 UA), de tal maneira que a influência da componente distante é desprezível. A distância para a qual o efeito gravitacional começa a ser considerável é de umas 100 UA, mas apenas existem três sistemas com distâncias menores:  $\gamma$  Cephei (Hatzes et al. 2003), GJ 86 (Els et al. 2001) e HD 188753 (Konacki 2005).

Considerando binárias com diferentes excentricidades e relações de massas, as regiões de estabilidade das órbitas tipo P e S foram identificadas por Holman e Wiegert (1999). Recentemente estas regiões foram estudadas por Musielak et al. (2005), obtendo a sua dependência com respeito à relação de distâncias entre as componentes a partir de critérios para a determinação das órbitas planetárias estáveis, marginalmente estáveis e instáveis. Quando se têm em conta certas ressonâncias inclusive é possível a ejeção de planetas em órbitas tipo P (Mudryk e Wu 2006). Em relação às órbitas tipo S, Pilat-Lohinger e Dvorak (2002) demonstraram mediante os Indicadores Rápidos de Lyapunov (FLI) que as zonas de estabilidade diminuem com o incremento da excentricidade de alguma das órbitas, especialmente com o da órbita externa.

Num contexto ampliado do conceito de estabilidade resulta especialmente interessante a determinação das zonas de habitabilidade, sobretudo para planetas tipo terrestre (David et al. 2003) ou, inclusive, para satélites de planetas gigantes (Dvorak 2006).

### Mecanismos de variação da excentricidade

No caso das órbitas planetárias tipo S, sabe-se que a companheira afastada pode provocar importantes perturbações seculares sobre a órbita do planeta. Em particular, para inclinações dos planos orbitais relativamente altas ( $i \gtrsim i_{\text{crítica}} = 39^\circ.2$ ) aparecem perturbações periódicas de grande amplitude na excentricidade conhecidas como *ciclos de Kozai* (Kozai 1962). À primeira ordem de perturbações, o máximo valor da excentricidade da órbita planetária que se pode alcançar por causa deste fenómeno periódico está dado por

$$e_{12\text{máx}} \simeq \sqrt{1 - \frac{5}{3} \cos^2 i}, \quad (5.1)$$

enquanto o período das oscilações se estima em

$$P_{\text{Koz}} \sim P_{12} \frac{m_1 + m_2}{m_3} \left( \frac{a_3}{a_{12}} \right)^3 (1 - e_3^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (5.2)$$

onde 1, 2 e 3 representam a estrela primária, o planeta e a estrela distante, respectivamente;  $P_{12}$  é o período orbital do planeta;  $a_{12}$  e  $a_3$  o semieixos maiores do planeta e da estrela distante; e  $e_3$  a excentricidade desta última. Esta expressão deve ser multiplicada por um coeficiente de ordem a unidade que se obtém a partir da função  $\zeta$  de Weierstrass (Kozai 1962).

Contudo, mediante simulações numéricas, Takeda e Rasio (2005, 2006) provaram recentemente que as perturbações tipo Kozai, ainda desempenhando um papel muito importante na distribuição de excentricidades observada em planetas extra-solares, não são suficientes para explicá-la completamente. Algumas limitações importantes na produção deste fenómeno são a necessidade de relativamente altas inclinações mútuas e o facto de que se o período de precessão relativista é menor que o período de Kozai, então as oscilações de Kozai não se produzem.

Como se demonstrou nos Capítulos 2 e 4, o efeito periastro produz variações seculares em alguns elementos orbitais, nomeadamente na excentricidade. Neste contexto propomos que o efeito periastro poderia agir como mais um mecanismo de incremento da excentricidade capaz de explicar os altos valores desta, tanto em órbitas tipo P como tipo S, em cenários de perda de massa (ver § 2.3 e § 4.2.2).

## 5.4 Formulação de Jacobi

As coordenadas de Jacobi, também denominadas coordenadas em cadeia baricêntrica, constituem um sistema natural de coordenadas em sistemas hierarquizados que possuem a notável propriedade de apresentar pequenas amplitudes para perturbações de curto período. A formulação do problema de três corpos hierarquizado divide o movimento do sistema em dois movimentos desacoplados. Deste modo é possível escrever a hamiltoniana como soma dos dois termos correspondentes mais um termo de acoplo. Este último escreve-se com uma série de potências do quociente  $\varepsilon = \frac{a_{12}}{q_3}$ , onde  $a_{12}$  e  $q_3$  são o semieixo maior da órbita interna e a distância pericêntrica da órbita externa, respectivamente, o qual opera como o pequeno parâmetro da perturbação.

Na formulação de Jacobi do problema de três corpos definem-se os vectores de posição:  $\vec{r}$ , que vai de uma das binárias, de massa  $m_1$ , à outra, de massa  $m_2$ ; e  $\vec{R}$ , que vai do centro de massas das binária,  $I_{12}$ , à posição da estrela distante,  $m_3$ . O centro de massas do sistema denota-se por  $I$ . Usaremos o subíndice 12 para nos referir aos elementos da órbita de  $m_2$  relativamente a  $m_1$  e o 3 para a de  $m_3$  relativamente ao baricentro de  $m_1$  e  $m_2$  (ver Fig. 5.5).

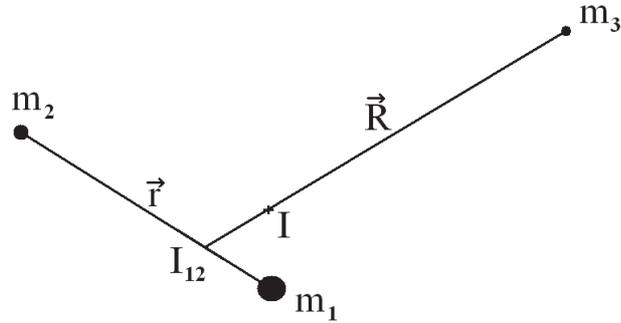


Figura 5.5: Sistema de coordenadas de Jacobi para o problema de três corpos.

As correspondentes equações do movimento são

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} + G m_3 \left( \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} - \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} \right), \\ \ddot{\vec{R}} &= -G(m_1 + m_2 + m_3) \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} \right).\end{aligned}\tag{5.3}$$

Se  $\varphi$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{R}$ ,  $P_j$  é o  $j$ -ésimo polinómio de Legendre,  $G$  é a constante de gravitação ( $G = 4\pi^2$  se as unidades são unidades astronómicas, anos e massas solares) e

$$M_j = m_1 m_2 m_3 \frac{m_1^{j-1} - (-m_2)^{j-1}}{(m_1 + m_2)^j},$$

a hamiltoniana para este sistema será

$$\mathcal{H} = \frac{G m_1 m_2}{2 a_1} + \frac{G(m_1 + m_2) m_3}{2 a_2} + \frac{G}{a_2} \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon^j M_j \left( \frac{r}{a_1} \right)^j \left( \frac{a_2}{R} \right)^{j+1} P_j(\cos \varphi),$$

onde o último termo representa a perturbação sobre as duas órbitas keplerianas.

## 5.5 Critérios de estabilidade para sistemas triplos hierarquizados

O problema da estabilidade dinâmica em sistemas triplos hierarquizados tem sido tradicionalmente objecto de incessante estudo. Não é, porém, até a década dos anos 60 do passado século quando se começam a estabelecer os primeiros critérios de estabilidade associados a valores críticos de certos parâmetros.

Partindo de condições iniciais arbitrárias, salvo em casos especiais, qualquer sistema de  $n$ -corpos é instável. Contudo, se o sistema apresenta uma configuração hierarquizada, é possível que este possa ser ao menos quase estável, no sentido fraco de que permanecerá nesta configuração durante muito tempo.

No caso particular das estrelas triplas parece claro que, se a distância da terceira componente ao baricentro da binária é grande comparada com a separação entre as componentes da binária, o sistema será estável no sentido de que não haverá termos seculares nos semieixos maiores.

De acordo com Orlov e Petrova (2000) duas são as alterações que pode sofrer o movimento de um sistema triplo hierarquizado:

- uma violação da hierarquia devido à substituição de uma das componentes da binária interna pela terceira componente, e
- o escape do sistema da terceira componente seguindo uma órbita hiperbólica sem violação da hierarquia.

É difícil estabelecer uma definição geral do que se entende por estabilidade de sistema triplos. Neste estudo consideraremos que um sistema triplo hierarquizado é estável quando as componentes apresentam movimentos ligados de maneira que os semieixos maiores e as excentricidades não exibem variações seculares.

Assim, a atenção estará dirigida para aqueles casos em que se pode produzir a rotura do sistema triplo como consequência do escape da terceira componente. Consideraremos unicamente critérios de estabilidade para os quais existe uma expressão analítica. O fim último é estabelecer a influência da perda de massa de uma ou várias das componentes sobre a estabilidade dinâmica do sistema no sentido de Laplace, isto é, mostrando mudanças seculares evidentes nos elementos orbitais. Contudo, também é de interesse estimar a sensibilidade destes critérios à perda de massa que sofre o sistema estelar triplo, assim como a resposta que cada um deles oferece.

### 5.5.1 Critério de Harrington

Este critério, estabelecido a partir de simulações numéricas de sistemas triplos com massas iguais (Harrington 1972) e posteriormente generalizado para quaisquer massas (Harrington 1977), é válido para problemas tridimensionais excepto para sistemas com mútua inclinação orbital ortogonal. O parâmetro de estabilidade tem a forma

$$F = \frac{a_{ex}(1 - e_{ex})}{a_{in}},$$

sendo  $a_{in}$  e  $a_{ex}$  os semieixos maiores das órbitas interna e externa, respectivamente. O parâmetro crítico  $F_c$  depende das massas das estrelas e da sua mútua inclinação

$$F_c = A \left[ 1 + B \log \left( \frac{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}}{3/2} \right) \right] + K,$$

sendo  $K = 2$ ;  $A = 3.50$  e  $B = 0.70$  se o movimento é directo; e  $A = 2.75$  e  $B = 0.64$  se o movimento é retrógrado. Para que haja estabilidade tem-se que verificar  $F > F_c$ .

Após uma série de integrações sobre diferentes órbitas Harrington chega às seguintes conclusões:

- Confirma-se a instabilidade das configurações próximas à perpendicularidade ( $i \approx 90^\circ$ ) para os semi-eixos maiores.
- A estabilidade é independente da excentricidade da órbita interna, para excentricidades moderadas, e dos argumentos do periastro de ambas as órbitas. Por outro lado, a estabilidade também não depende da inclinação – excepto para  $i \approx 90^\circ$  – senão apenas de se o movimento é directo ou retrógrado.
- A estabilidade não depende do semi-eixo maior externo, senão de uma combinação do semi-eixo e da excentricidade da órbita externa.

A independência da estabilidade relativamente à inclinação, excepto no caso em que as órbitas sejam perpendiculares, permite estudar a estabilidade considerando unicamente modelos planos.

### 5.5.2 Critério de Graziani–Black

Numa série de trabalhos realizados por Black e colaboradores (Graziani e Black 1981; Black 1982; Pendleton e Black 1983) estabelece-se, a partir de simulações numéricas, o seguinte critério de estabilidade.

O parâmetro de estabilidade vem dado por

$$\mu = \frac{m_2 + m_3}{2m_1}.$$

Por outro lado, o parâmetro crítico é

$$\begin{aligned} \mu_c &= 0.175 \frac{\Delta^3}{(2 - \Delta)^{\frac{3}{2}}} & \text{para } \mu \leq 1, \\ \mu_c &= 0.083 \frac{\Delta^3}{(2 - \Delta)^3} & \text{para } \mu \geq 1, \end{aligned}$$

onde

$$\Delta = \frac{2(R - 1)}{R + 1},$$

$$R = \frac{a_{ex}(1 - e_{ex})}{a_{in}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Segundo indicam os autores, um sistema será dinamicamente estável se  $\mu < \mu_c$ .

Considerando diferentes configurações orbitais, Pendleton e Black (1983) obtêm os seguintes resultados:

- Os sistemas com órbitas retrógradas onde o terciário é muito menos massivo que os primários (configuração de planeta externo) são menos estáveis que os correspondentes com órbitas directas.
- A inclinação não afecta significativamente à estabilidade nas configurações com planeta externo. Porém, nas configurações em que o planeta está na órbita interna e a terciária está numa órbita fechada, a estabilidade diminui notavelmente para inclinações superiores aos  $50^\circ$ .
- O início da instabilidade depende apenas fracamente da excentricidade da órbita da binária interna ou da terciária sempre que a massa da terciária seja comparável à massa reduzida da binária. No entanto, a estabilidade dinâmica dos sistemas em que a massa da terciária é muito maior ou muito menor que a massa reduzida da binária é uma função relativamente forte da excentricidade.

### 5.5.3 Critério de Eggleton–Kiseleva

O parâmetro de estabilidade (Eggleton e Kiseleva 1995) vem definido por

$$X = \frac{P_{ex}}{P_{in}},$$

de modo que o sistema triplo hierarquizado será estável se  $X > X_c$ , sendo

$$X_c = \left( \frac{q_{ex}}{1 + q_{ex}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1 + e_{in}}{1 - e_{ex}} \right)^{\frac{3}{2}} Y_c^{\frac{3}{2}},$$

$$Y_c \approx 1 + \frac{3.7}{q_{ex}^{\frac{1}{3}}} + \frac{2.2}{1 + q_{ex}^{\frac{1}{3}}} + \frac{1.4 q_{ex}^{\frac{1}{3}} - 1}{q_{in}^{\frac{1}{3}} q_{ex}^{\frac{1}{3}} + 1},$$

com

$$q_{in} = \frac{m_0}{m_1},$$

$$q_{ex} = \frac{m_0 + m_1}{m_2},$$

e  $Y_c$  sendo o quociente crítico entre a distância pericêntrica da binária externa e a distância apocêntrica da interna.

Segundo os autores, os sistemas mais instáveis são aqueles com órbitas coplanares e movimento directo.

#### 5.5.4 Critério de Aarseth–Mardling

Mais recentemente, Aarseth e Mardling (1999) sugeriram um novo critério válido para um amplo intervalo dos valores das massas e das excentricidades, embora apenas aplicável a sistemas coplanares com ambas as órbitas no mesmo sentido do movimento.

Haverá estabilidade se o parâmetro de estabilidade (Mardling e Aarseth 2001) dado por

$$Z = \frac{a_{ex}(1 - e_{ex})}{a_{in}}$$

verifica  $Z > Z_c$ , sendo

$$Z_c = C \left[ (1 + q_{ex}) \frac{1 + e_{ex}}{\sqrt{1 - e_{ex}}} \right]^{\frac{2}{5}}, \quad (5.4)$$

onde  $C = 2.8$  se determina empiricamente.

Nessa expressão aparece a relação de massas

$$q_{ex} = \frac{m_3}{m_1 + m_2}.$$

Por outro lado, sistemas cujas órbitas internas e externas estejam inclinadas serão mais estáveis – poderão ser até um 30% mais próximas no periastro externo – que aqueles com órbitas coplanares para as mesmas relações de massas e excentricidades. Para ter em conta este incremento na estabilidade por efeito da inclinação, introduz-se (Mardling e Aarseth 2001) na expressão (5.4) um factor de redução linear *ad hoc* de tal maneira que o parâmetro crítico se pode reescrever como

$$Z_c = C \left[ (1 + q_{ex}) \frac{1 + e_{ex}}{\sqrt{1 - e_{ex}}} \right]^{\frac{2}{5}} \left( 1 - 0.3 \frac{i}{180^\circ} \right),$$

onde a inclinação mútua vem dada por

$$\cos i = \cos i_{in} \cos i_{ex} + \sin i_{in} \sin i_{ex} \cos (\Omega_{ex} - \Omega_{in}).$$

### 5.5.5 Intervalos de estabilidade

Define-se o intervalo de estabilidade de uma estrela tripla como o quociente

$$\delta_p = \pm \frac{p - p_c}{p_c}, \quad (5.5)$$

onde

$$\begin{aligned} p &\equiv F, \mu, X \text{ ou } Z, \\ + &\text{ para } F, X \text{ e } Z, \\ - &\text{ para } \mu. \end{aligned}$$

Quanto maior é  $\delta_p$  maior é o intervalo de estabilidade do sistema segundo o critério utilizado. Assim, se  $\delta_p < 0$ , então o sistema pode ser dinamicamente instável, quer dizer, é possível que se produza uma violação da hierarquia ou um escape da terceira componente.

## 5.6 Efeito de aproximações mútuas: lei de perda de massa generalizada

No Capítulo 2 definiu-se uma expressão analítica que dá conta da perda de massa em sistemas binários. Esta lei descreve não só a diminuição de massa dependente da evolução temporal das estrelas, senão também a produzida pelo chamado efeito periastro:

$$\dot{m}(r, p_\theta, t, m_1, m_2) = -\alpha_1 m_1^n - \alpha_2 m_2^q - \beta \frac{p_\theta}{r^2}.$$

Com esta lei é possível explicar variações seculares nos elementos orbitais, tais como o incremento secular da excentricidade que tem lugar

quando  $\beta \neq 0$  ou o incremento/decremento secular do semieixo maior em função do valores relativos de  $\alpha_i$  ( $i=1,2$ ) e  $\beta$ . No caso de sistemas triplos, e considerando uma lei de perda de massa deste tipo para cada uma das componentes, existirá um efeito periastro generalizado que consistirá num aumento da perda de massa por causa das aproximações mútuas entre as três componentes. A perda de massa de cada uma delas virá dada por uma expressão como a anterior em que aparecerá um termo de interacção com cada uma das restantes componentes

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= -\alpha_1 m_1^n - \beta_{12} \frac{c_{12}}{r_{12}^2} - \beta_{13} \frac{c_3}{r_{13}^2}, \\ \dot{m}_2 &= -\alpha_2 m_2^q - \beta_{21} \frac{c_{12}}{r_{21}^2} - \beta_{23} \frac{c_3}{r_{23}^2}, \\ \dot{m}_3 &= -\alpha_3 m_3^s - \beta_{31} \frac{c_3}{r_{31}^2} - \beta_{32} \frac{c_3}{r_{32}^2}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde  $r_{ij}$ , com  $i = 1, 2, 3$ , é a distância da componente  $i$  à componente  $j$  (evidentemente,  $r_{ij} = r_{ji}$ );  $c_{12}$  é o momento angular da órbita interna e  $c_3$  o da externa; os  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são três pequenos parâmetros que medem a perda de massa dependente do tempo, enquanto são os, também pequenos parâmetros  $\beta_{ij}$  com ( $i = 1, 2, 3$ ), os que dão conta da perda de massa por este efeito periastro generalizado. Em geral,  $\beta_{ij} \neq \beta_{ji}$ , já que o primeiro acopla a perda de massa da componente  $i$  em função da sua distância à  $j$  e a segunda a da componente  $j$  a medida que se aproxima à  $i$ .

## 5.7 Análise de diversas configurações e cenários

A aplicação de um método de integração numérico, concretamente um integrador de Runge–Kutta de passo variável de oitava ordem (RK8), ao sistema de equações (5.3) mais as três equações dadas por (5.6) permitirá

obter as coordenadas de Jacobi e a partir delas os elementos orbitais de ambas as órbitas.

Conhecendo os elementos orbitais estaremos em condições de determinar os parâmetros de estabilidade estabelecidos anteriormente tanto no caso de massa estacionária como variável. Realizaremos a integração numérica para alguns casos reais, representativos da classe de sistemas em que o estudo da estabilidade é fundamental por estarem no limite da região de estabilidade, considerando as seguintes configurações:

- (Estrela+planeta)+estrela: órbita planetária tipo S.
- (Estrela+estrela)+planeta: órbita planetária tipo P.
- (Estrela+estrela)+estrela: sistema estelar triplo.

em três cenários diferentes:

- SPM: não há perda de massa.
- MDT: unicamente há perda de massa em função do tempo.
- MDT+EP: sobrepõe-se à MDT perda de massa por efeito periastro.

Analisaremos o movimento do sistema triplo a fim de encontrar sinais de instabilidade produzidos pela perda de massa do sistema. Comprovaremos que existem sistemas estelares triplos para os quais haverá ou não estabilidade segundo o critério que consideremos. Estes casos situam-se na fronteira tão pouco nítida entre a estabilidade e a instabilidade.

### 5.7.1 Configurações

#### 1. [(Estrela+planeta)+estrela] $\rightarrow$ $\gamma$ Cephei

Dos três sistemas binários conhecidos — todos com órbita planetária tipo S — com a componente distante situada a uma distância sensivelmente

menor de 100 UA (citados em § 5.3.2) analisaremos o caso de  $\gamma$  Cephei. Esta é uma estrela brilhante ( $V=3.21$ ) classificada como K1 III-IV com uma companheira anã M4, nunca observada visualmente, a umas 19 UA. Um planeta com uma massa mínima de  $1.43 M_{\oplus}$  orbita em redor da primária a uma distância de 1.9 UA (ver Fig. 5.6). Os valores dos parâmetros físicos e orbitais deste sistema (Torres 2006) mostram-se na Tabela 5.1. Para a inclinação e ângulo do nodo da órbita planetária tomaram-se os valores  $123^{\circ}$  e  $12^{\circ}$ , respectivamente, os quais correspondem a uma inclinação mútua de uns  $5^{\circ}$ .

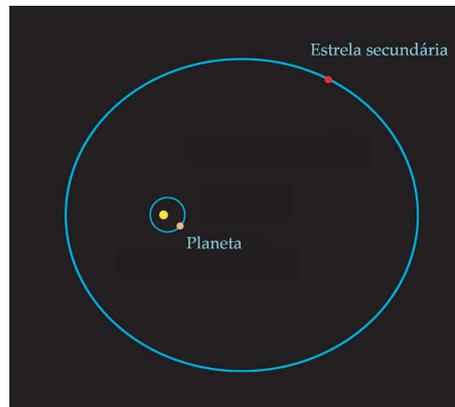


Figura 5.6: Sistema binário-planetário  $\gamma$  Cephei com a brilhante estrela principal, de nome *Errai*, no centro. Representam-se a escala as órbitas da estrela secundária e do planeta [McDonald Observatory, University of Texas (Austin)].

Não só a órbita do planeta  $\gamma$  Cep Ab parece ser estável para inclinações inferiores a  $40^{\circ}$  (Haghighipour 2006), senão que existem mais regiões de estabilidade onde a existência de outros planetas seria possível (Dvorak et al. 2003; Verrier e Evans 2006).

Por outro lado, a questão sobre as zonas de habitabilidade ainda está aberta, e não está claro como variariam estas ao introduzir a evolução estelar da primária no seu caminho para a categoria de gigante (Haghighipour 2006). É de esperar que os episódios de perda de massa característicos da primeira fase de ascenso pelo ramo das gigantes influam na evolução dinâmica do sistema, nomeadamente na sua estabilidade.

Tabela 5.1: VALORES DOS PARÂMETROS DO SISTEMA  $\gamma$  CEPHEI (TORRES 2006).

	$\gamma$ CEP A	$\gamma$ CEP B	$\gamma$ CEP Ab
Classe	K1 III-IV	M4	Planeta
$T_{ef}$	$4800 \pm 100$ K	–	–
[Fe/H]	$+0.01 \pm 0.05$	–	–
R	$4.790 \pm 0.052 R_{\odot}$	–	–
M	$1.18 \pm 0.11 M_{\odot}$	$0.362 \pm 0.022 M_{\odot}$	$1.43 \pm 0.13 M_{J}$ (mínima)
P [anos]	–	$66.8 \pm 1.4$	$2.4717 \pm 0.0096$
e	–	$0.4085 \pm 0.0065$	$0.113 \pm 0.058$
a [UA]	–	$19.02 \pm 0.64$	$1.94 \pm 0.06$
i [°]	–	$118.1 \pm 1.2$	–
$\omega$ [°]	–	$160.96 \pm 0.40$	$63 \pm 27$
$\Omega$ [°]	–	$13.0 \pm 2.4$	–
T	–	$1991.606 \pm 0.032$	$2004.38 \pm 0.20$

Infelizmente, para estrelas de classes espectrais compreendidas entre K0 II-III e M5-6 II-III todavia não se conhecem bem os mecanismos de perda de massa (Crowley 2006). A fim de obter estimacões da perda de massa dependente do tempo durante a fase no Ramo das Gigantes Vermelhas (RGB) tem-se utilizado extensivamente a conhecida como “lei” de Reimers (1975). Contudo, agora sabe-se que a fórmula de Reimers não é capaz de explicar completamente as perdas de massa que se deduzem dos dados observacionais obtidos nos últimos anos. De facto, têm sido propostas outras fórmulas empíricas (Catelán 2005); uma das mais recentes, aplicável a ventos frios, é a de Schröder e Cuntz (2005), que supõe uma modificação da de Reimers

$$\dot{m} = \eta \frac{L_* R_*}{M_*} \left( \frac{T_{ef}}{4000 \text{ K}} \right)^{3.5} \left( 1 + \frac{g_\odot}{4300 g_*} \right), \quad (5.7)$$

onde  $L_*$ ,  $R_*$  e  $M_*$  são a luminosidade, o raio e a massa da estrelas em unidades solares e  $g_*$  e  $g_\odot$  são a gravidade superficial da estrela e do Sol, respectivamente. Por outra parte,  $T_{ef}$  é a temperatura efectiva e  $\eta$  um parâmetro de ajuste cujo valor é fixado em  $8(\pm 1) 10^{-14} M_\odot \text{ ano}^{-1}$  a partir de calibrações realizadas em cúmulos globulares para estrelas RGB.

Apesar destes intuitos, actualmente não está claro se é possível exprimir a perda de massa nas gigantes vermelhas mediante uma expressão analítica. Assim, Origlia et al. (2002), após uma análise de seis cúmulos globulares com diferentes metalicidades, chegam a uma série de conclusões que se podem resumir em:

- Nenhuma das fórmulas conhecidas reproduz a perda de massa real, sendo as diferenças, em geral, maiores de uma ordem de magnitude.
- Não existe uma dependência clara entre os ritmos de perda de massa e os parâmetros estelares básicos  $L$ ,  $R$  e  $g$ .
- A perda de massa acontece fundamentalmente no extremo da fase RGB, concretamente durante o último milhão de anos.
- Os episódios de perda de massa duram entre umas poucas décadas e um milhão de anos.
- Não existe nenhuma correlação entre a perda de massa e a metalicidade.

Contudo, do seu trabalho deduz-se que o ritmo de perda de massa para uma estrela perto do extremo do RGB se pode estimar entre  $10^{-7}$  e  $10^{-6} M_\odot \text{ ano}^{-1}$ .

INTEGRAÇÃO:

Integraremos numericamente determinando para cada cenário (SPM, MDT e MDT+EP) a evolução do intervalo de estabilidade, dado por (5.5), correspondente a cada critério.

Num cenário de MDT em que se considera a lei (5.7) obtém-se, para esta estrela, um ritmo de perda de massa teórico de  $5 \cdot 10^{-12} M_{\odot} \text{ ano}^{-1}$ . Porém, tendo em conta os comentários anteriores sobre a validade, à vista das observações recentes, deste tipo de fórmulas, e supondo que a subgigante está numa fase de máxima perda de massa, é de esperar que o valor real seja muito superior ao teórico. Por esta razão, baseando-nos em ritmos de perda de massa para estrelas similares, tomaremos um valor de  $10^{-6} M_{\odot} \text{ ano}^{-1}$ . Devido a que os episódios de perda de massa apresentam durações que vão de uns poucos anos até vários centos de milhares de anos, consideraremos um período de integração num cenário de MDT de 1000 anos, isto é, aproximadamente uns 15 períodos da órbita externa. Por outro lado, a perda de massa da componente anã será desprezível ( $\alpha_3 = 0$ ), o mesmo que a do planeta ( $\alpha_2 = 0$ ), de modo que se pode assumir que ambas as massas permanecem constantes.

Tabela 5.2: VALORES HIPOTÉTICOS DOS PARÂMETROS DE PERDA DE MASSA PARA CADA COMPONENTE ( $i, j = 1, 2, 3$ ) DO SISTEMA TRIPLO  $\gamma$  CEPHEI.

	PRIMÁRIA	SECUNDÁRIA	TERCIÁRIA
$n_i$	3	–	–
$\alpha_i$	$10^{-6}$	0	0
$\beta_{ij}$	$10^{-6}$	0	0

Para a análise deste sistema no cenário de MDT+EP consideraremos que a primária sofre um certo aumento da sua perda de massa nas proximidades do periastro em relação à companheira estelar, quantificado por

$\beta_{13} = 10^{-6}$ . Por outro lado, também neste cenário as massas da estrela anã e do planeta permanecem constantes, sendo o efeito periastro provocado por este último sobre a subgigante desprezível, dada a sua massa e distância. A perda de massa global modela-se segundo a lei generalizada dada em (5.6), onde  $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_{21} = \beta_{23} = \beta_{12} = \beta_{31} = \beta_{32} = 0$  (ver Tab. 5.2). Simplificando, a lei de perda de massa para a primária resulta ser

$$\dot{m}_1 = -\alpha_1 m_1^n - \beta_{13} \frac{c_3}{r_{13}^2}.$$

Os valores iniciais dos parâmetros que caracterizam a estabilidade do sistema segundo os critérios descritos em § 5.5 mostram-se na Tabela 5.3. Segundo os três primeiros critérios de estabilidade aplicados: Harrington, Graziani–Black e Eggleton–Kiseleva, o sistema seria estável; mas segundo o de Aarseth–Mardling não é possível dizer nada sobre a estabilidade do sistema (ver Fig. 5.7).

No entanto, a proximidade destes valores a zero não permite garantir que o sistema seja completamente estável. Mas o que sim se pode afirmar, à vista dos resultados da Tabela 5.3 e da Figura 5.8, onde se mostra a evolução temporal dos intervalos de estabilidade durante 1 000 anos, é que o efeito periastro é um mecanismo que contribui eficazmente à redução da estabilidade do sistema.

A Figura 5.9 mostra a evolução temporal das excentricidades e dos semieixos maiores para os três cenários considerados ao longo de 1 000 anos. Também aqui se observa que as perturbações produzidas pela perda de massa, especialmente quando há efeito periastro, ocasionam aumentos seculares dos elementos, sobretudo do semieixo maior da órbita externa. A evolução temporal das inclinações mostra-se na Figura 5.10.

Tabela 5.3: VALORES DOS PARÂMETROS DE ESTABILIDADE, DO SEU VALOR CRÍTICO E DOS INTERVALOS DE ESTABILIDADE PARA OS CRITÉRIOS DE HARRINGTON ( $F$ ), GRAZIANI-BLACK ( $\mu$ ), EGGLETON-KISELEVA ( $X$ ) E AARSETH-MARDLING ( $Z$ ) PARA O SISTEMA TRIPLO  $\gamma$  CEPHEI COM  $t_i = 0$  E  $t_f = 20\,000$  ANOS.

$p$	$t_i$	$t_f$	$p_c$	$t_i$	$t_f$	$\delta_p$	$t_i$	$t_f$
SPM								
$F$	5.799	5.802	$F_c$	5.353	5.353	$\delta_F$	+0.083	+0.084
$\mu$	0.154	0.154	$\mu_c$	1.148	1.149	$\delta_\mu$	+0.866	+0.866
$X$	26.858	26.876	$X_c$	20.906	20.497	$\delta_X$	+0.285	+0.311
$Z$	5.799	5.802	$Z_c$	9.636	9.636	$\delta_Z$	-0.398	-0.398
MDT								
$F$	5.799	5.762	$F_c$	5.353	5.360	$\delta_F$	+0.083	+0.075
$\mu$	0.154	0.158	$\mu_c$	1.148	1.121	$\delta_\mu$	+0.866	+0.859
$X$	26.858	26.513	$X_c$	20.906	20.563	$\delta_X$	+0.285	+0.289
$Z$	5.799	5.762	$Z_c$	9.636	9.710	$\delta_Z$	-0.398	-0.407
MDT+EP								
$F$	5.799	5.762	$F_c$	5.353	5.360	$\delta_F$	+0.083	+0.075
$\mu$	0.154	0.158	$\mu_c$	1.148	1.121	$\delta_\mu$	+0.866	+0.859
$X$	26.858	26.516	$X_c$	20.906	20.560	$\delta_X$	+0.285	+0.290
$Z$	5.799	5.762	$Z_c$	9.636	9.710	$\delta_Z$	-0.398	-0.407

## 2. [(Estrela+estrela)+planeta] → Sistema hipotético (baseado em $\gamma$ Cephei)

Como uma variante da configuração anterior consideramos um sistema binário estrela+estrela com um planeta deslocando-se em redor do centro de massas das duas componentes estelares. Até agora não se tem descoberto nenhum sistema deste tipo, pelo que consideraremos um sistema hipotético em que os valores das massas e dos elementos orbitais são os mesmos que os do sistema  $\gamma$  Cephei, mas com o planeta em órbita tipo

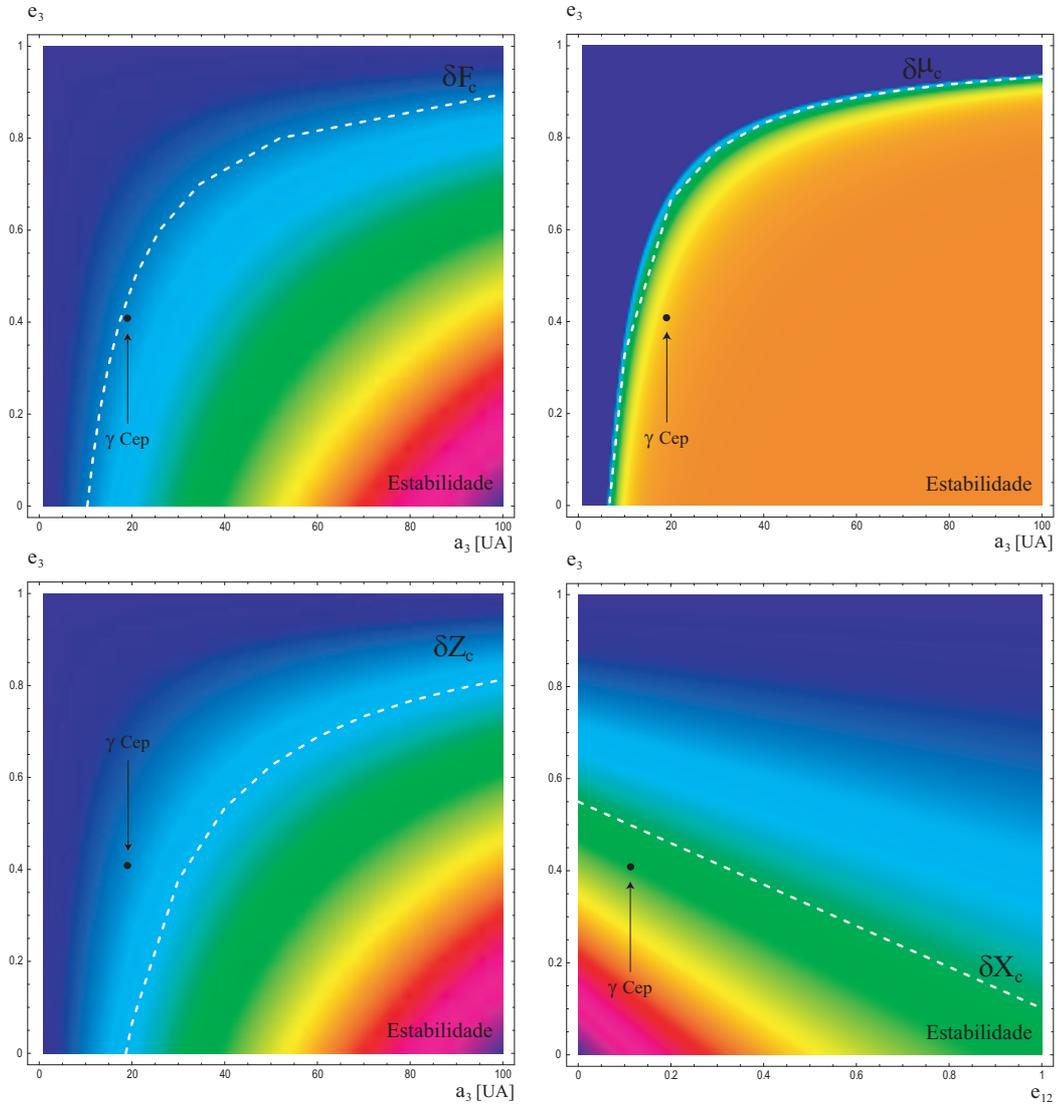


Figura 5.7: Mapas de estabilidade em função da excentricidade e do semieixo maior da órbita externa segundo os critérios de Harrington ( $\delta F$ ), Graziani–Black ( $\delta\mu$ ) e Aarseth–Mardling ( $\delta Z$ ), e em função das excentricidades das duas órbitas segundo o critério de Eggleton–Kiseleva ( $\delta X$ ) para  $\gamma$  Cephei. A linha branca descontínua marca a fronteira entre a região de estabilidade e a de indizibilidade, enquanto as cores indicam o gradiente, de maneira que nas regiões onde a cor é uniforme a variação do valor do intervalo de estabilidade é mais lenta que em aquelas outras onde as cores variam rapidamente.

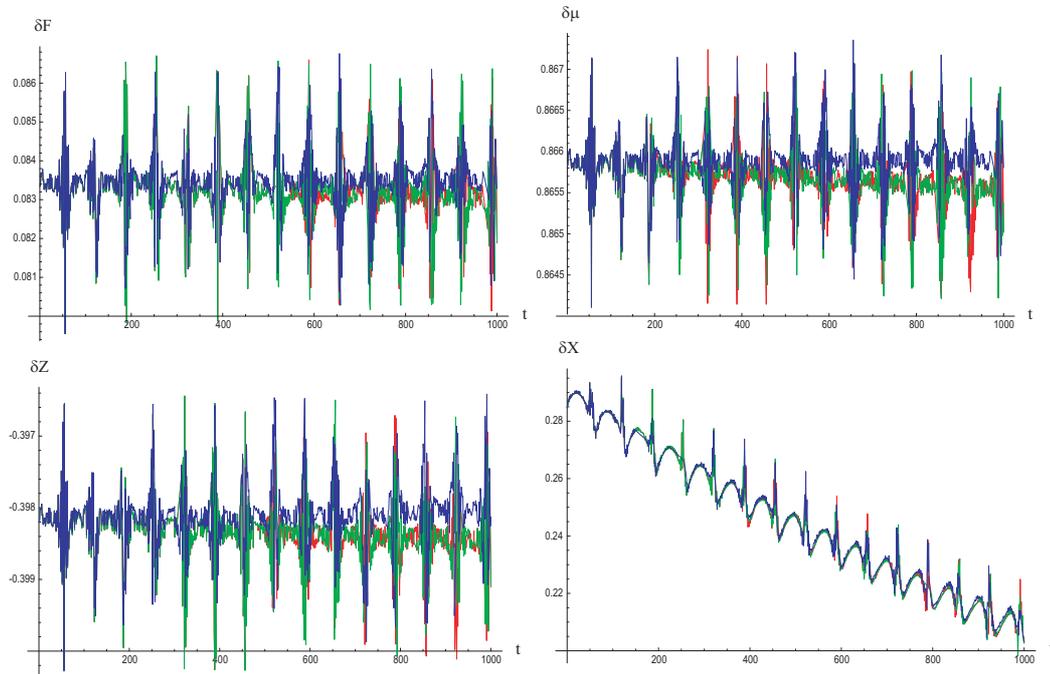


Figura 5.8: Evolução temporal dos intervalos de estabilidade para  $\gamma$  Cephei. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP.

P em redor do sistema binário formado pelas duas estrelas. Isto é, nesta configuração o planeta e a estrela distante têm trocadas as suas posições em relação à configuração anterior, de modo que os elementos orbitais se obtêm directamente da Tabela 5.1.

A partir dos resultados sobre os intervalos de estabilidade mostrados na Tabela 5.4, o sistema seria estável segundo os três primeiros critérios: Harrington, Graziani–Black e Eggleton–Kiseleva; e não se poderia dizer nada segundo o critério de Aarseth–Mardling. Os mapas de estabilidade para esta configuração são ligeiramente diferentes ao da anterior, já que o sistema se encontra mais afastado do limite de estabilidade. Segundo o critério de Eggleton–Kiseleva o sistema está claramente na região de estabilidade (ver Fig. 5.11).

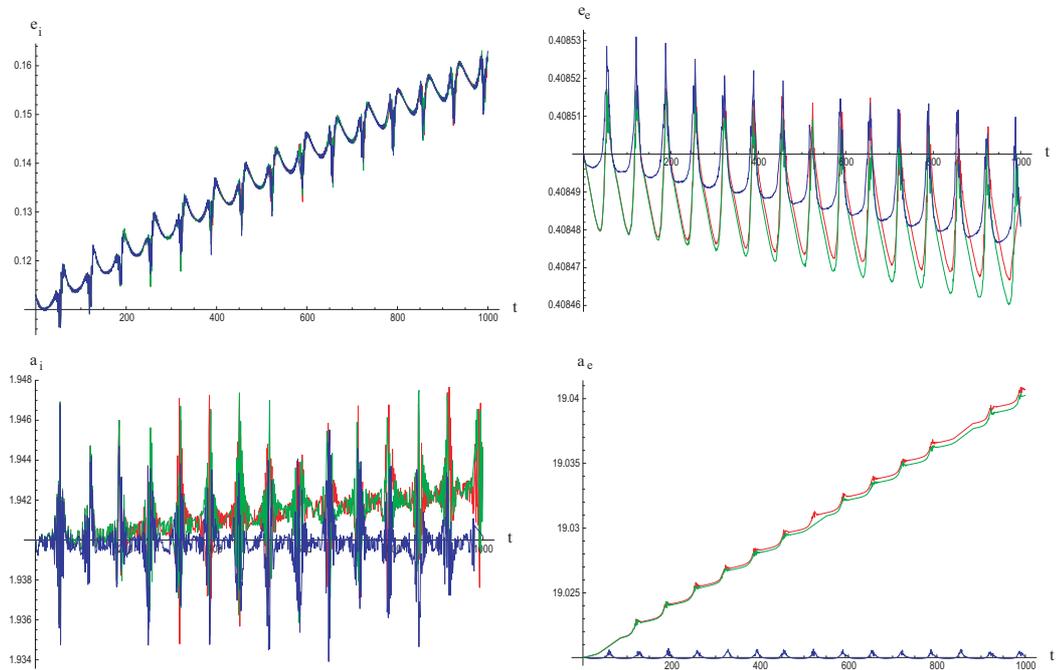


Figura 5.9: Evolução temporal das excentricidades e semieixos maiores de ambas órbitas para o sistema triplo  $\gamma$  Cephei. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP.

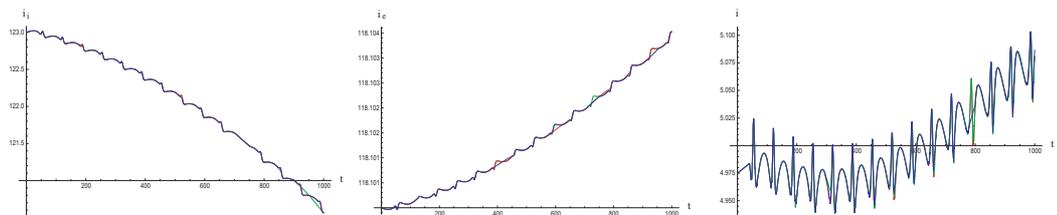


Figura 5.10: Evolução temporal das inclinações: interna (esquerda), externa (centro) e mútua (direita) para o sistema triplo  $\gamma$  Cephei. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP.

De facto, na Figura 5.12 observa-se que esta configuração, com órbita planetária tipo P, não só é mais estável que a tipo S, senão que, inclusive em cenários de MDT e MDT+EP, a tendência ao aumento da estabilidade segue a ser dominante, às avessas do que acontecia com a órbita tipo S (ver Fig. 5.8).

Tabela 5.4: VALORES DOS PARÂMETROS DE ESTABILIDADE, DO SEU VALOR CRÍTICO E DOS INTERVALOS DE ESTABILIDADE PARA OS CRITÉRIOS DE HARRINGTON ( $F$ ), GRAZIANI-BLACK ( $\mu$ ), EGGLETON-KISELEVA ( $X$ ) E AARSETH-MARDLING ( $Z$ ) PARA O SISTEMA TRIPLO HIPOTÉTICO COM  $t_i = 0$  E  $t_f = 20\,000$  ANOS.

$p$	$t_i$	$t_f$	$p_c$	$t_i$	$t_f$	$\delta_p$	$t_i$	$t_f$
SPM								
$F$	5.799	5.729	$F_c$	5.070	5.070	$\delta_F$	+0.144	+0.130
$\mu$	0.154	0.154	$\mu_c$	1.323	1.269	$\delta_\mu$	+0.884	+0.879
$X$	30.685	30.701	$X_c$	9.157	9.323	$\delta_X$	+2.351	+2.293
$Z$	5.799	5.729	$Z_c$	9.636	9.636	$\delta_Z$	-0.398	-0.405
MDT								
$F$	5.799	5.721	$F_c$	5.070	5.070	$\delta_F$	+0.144	+0.129
$\mu$	0.154	0.158	$\mu_c$	1.323	1.267	$\delta_\mu$	+0.884	+0.875
$X$	30.685	30.773	$X_c$	9.157	9.423	$\delta_X$	+2.351	+2.266
$Z$	5.799	5.721	$Z_c$	9.636	9.715	$\delta_Z$	-0.398	-0.411
MDT+EP								
$F$	5.799	5.728	$F_c$	5.070	5.070	$\delta_F$	+0.144	+0.130
$\mu$	0.154	0.160	$\mu_c$	1.323	1.273	$\delta_\mu$	+0.884	+0.874
$X$	30.685	30.771	$X_c$	9.157	9.451	$\delta_X$	+2.351	+2.256
$Z$	5.799	5.729	$Z_c$	9.636	9.752	$\delta_Z$	-0.398	-0.413

A Figura 5.13 mostra a evolução temporal das excentricidades e dos semieixos maiores para os três cenários considerados ao longo de 1 000 anos. Como na configuração anterior, as perturbações produzidas pela perda de massa, especialmente quando há efeito periastro, ocasionam aumentos seculares dos elementos, sobretudo dos da órbita interna e do semieixo maior da externa. A evolução temporal das inclinações mostra-se na Figura 5.14.

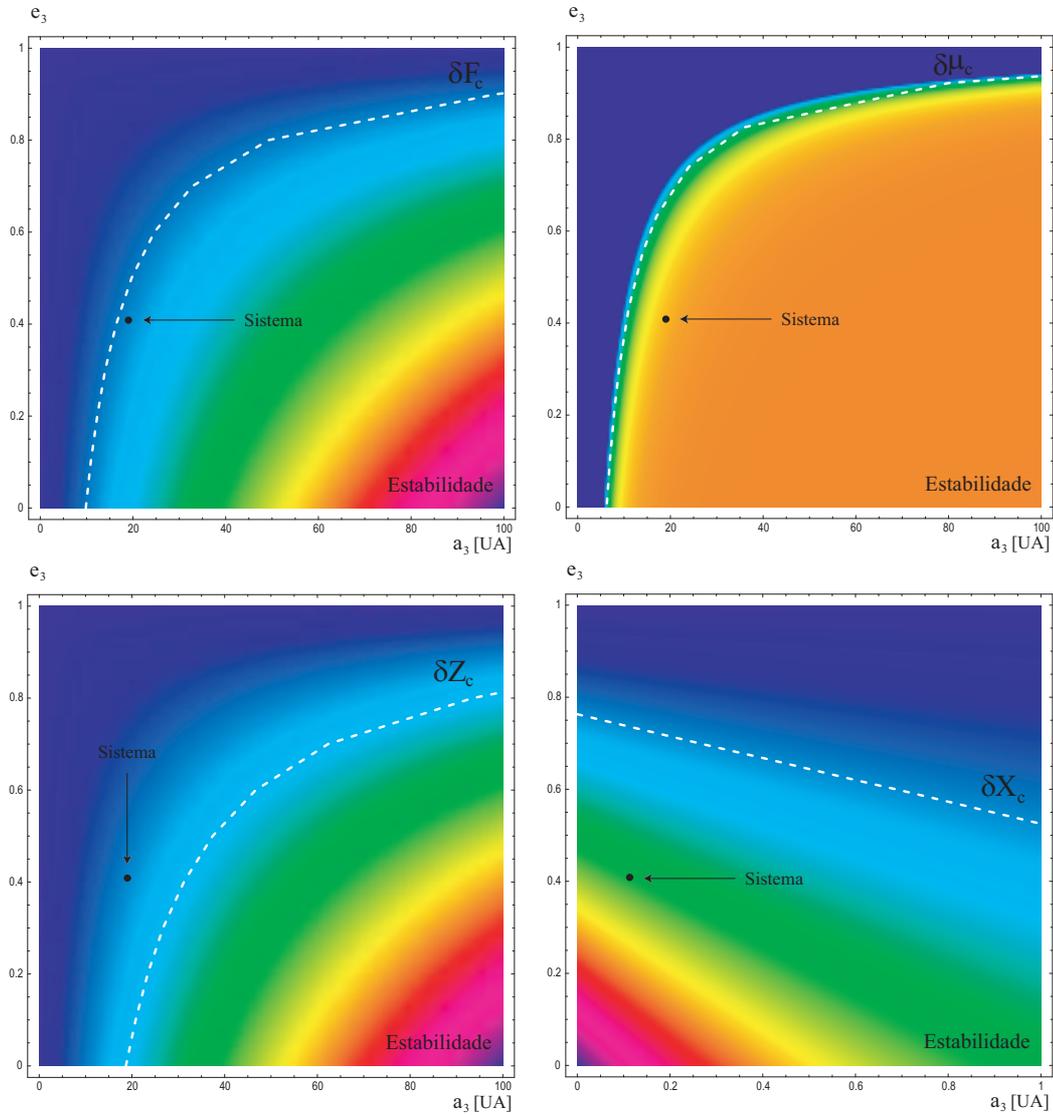


Figura 5.11: Mapas de estabilidade em função da excentricidade e do semieixo maior da órbita externa segundo os critérios de Harrington ( $\delta F$ ), Graziani–Black ( $\delta \mu$ ) e Aarseth–Mardling ( $\delta Z$ ), e em função das excentricidades das duas órbitas segundo o critério de Eggleton–Kiseleva ( $\delta X$ ) para o sistema binária+planeta hipotético. A linha branca descontínua marca a fronteira entre a região de estabilidade e a de indizibilidade, enquanto as cores indicam o gradiente, de maneira que nas regiões onde a cor é uniforme a variação do valor do intervalo de estabilidade é mais lenta que em aquelas outras onde as cores variam rapidamente.

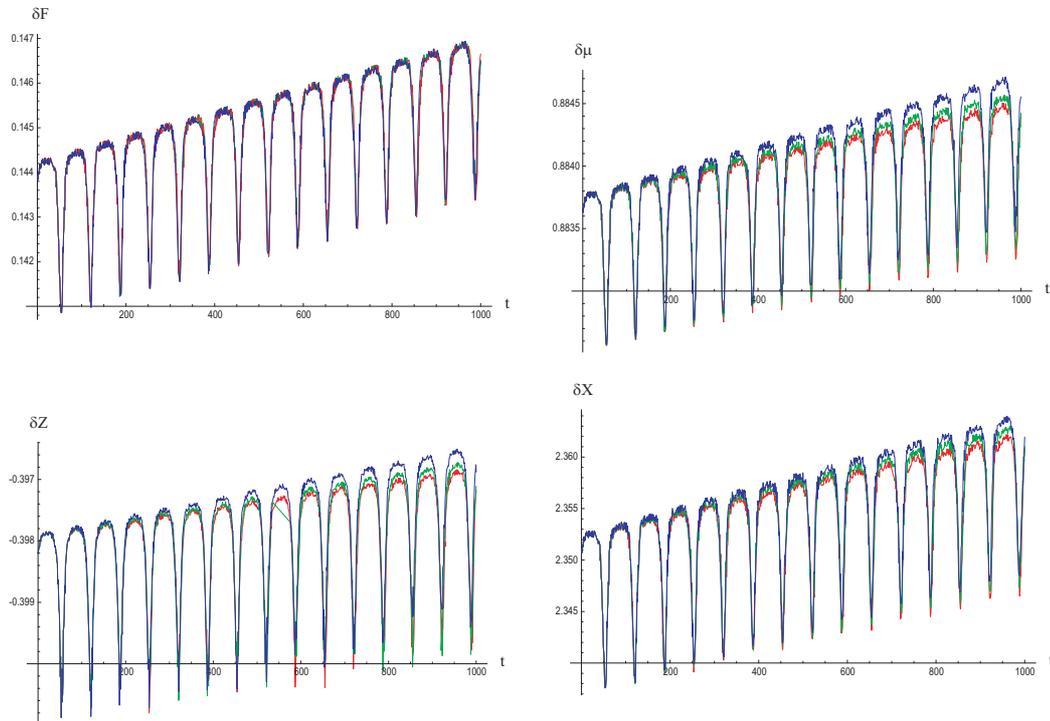


Figura 5.12: Evolução temporal dos intervalos de estabilidade de cada critério para o sistema binária+planeta hipotético. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP.

Esta configuração – órbita planetária tipo P – será analisada no capítulo seguinte para o caso em que o planeta, na sua trajectória no interior de uma nuvem de pó, está a ganhar massa.

### 3. [(Estrela+estrela)+estrela] → BU 1099 AB

O conjunto de sistemas triplos (hierarquizados) com órbitas visuais conhecidas oferece uma ampla gama das combinações, quanto aos valores dos seus elementos orbitais, em que estes sistemas se apresentam. Um subconjunto notável deste é o de aqueles sistemas com órbitas cuja estabilidade não está garantida. A este pertencem, entre outros, os sistemas

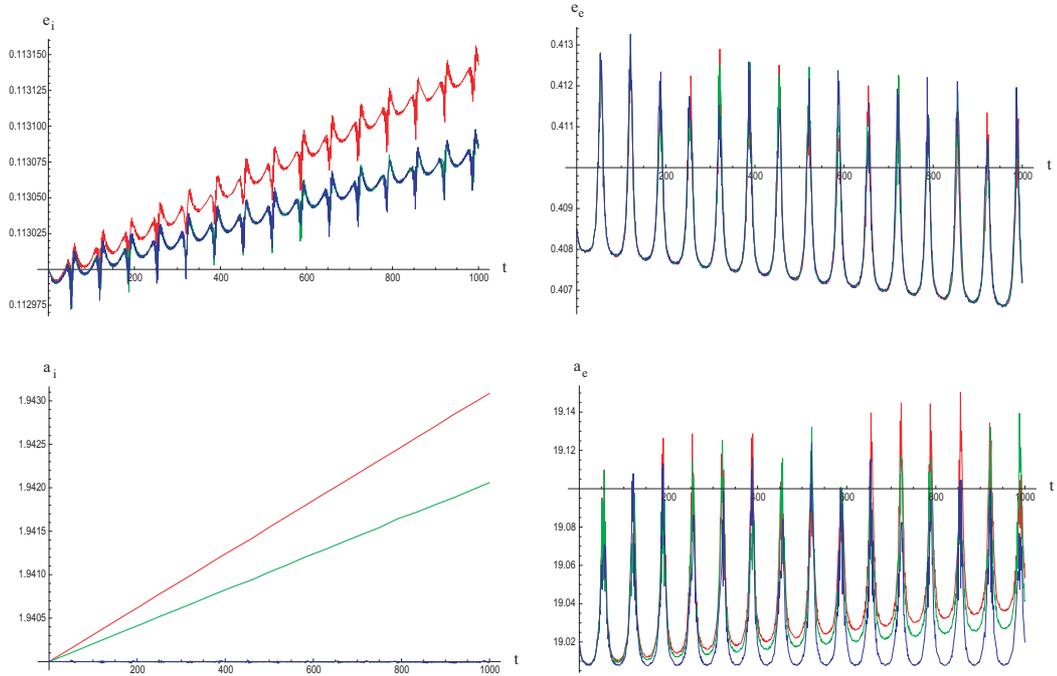


Figura 5.13: Evolução temporal das excentricidades e semieixos maiores de ambas órbitas para o sistema binária+planeta hipotético.

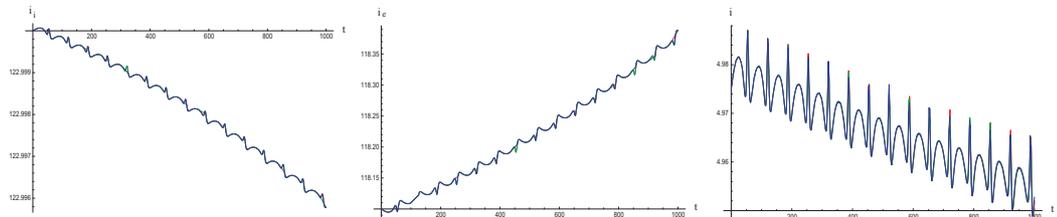


Figura 5.14: Evolução temporal das inclinações: interna (esquerda), externa (centro) e mútua (direita) para o sistema binária+planeta hipotético. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP.

Gliese 22,  $\xi$  Tau,  $\lambda$  Tau, ADS 3358, VV Ori, HZ Her, Gliese 795, ADS 15971 e ADS 16138 (Orlov e Petrova 2000).

Recentemente, mais um sistema estelar foi acrescentado a esta lista, o BU 1099 AB. Este é um sistema quádruplo de hierarquia 3, onde a binária mais aberta tem um período de 83.10 anos. A componente B, denominada

BAG 10 Aa, é uma binária espectroscópica (Bab,Bc), cuja primeira componente é, pela sua vez, uma subcomponente espectroscópica (Ba,Bb) com um período curto de 4.24 dias (ver Fig. 5.15). Este é um sistema muito interessante já que a componente B resultou ser o primeiro caso conhecido de uma binária astrométrica *speckle*.

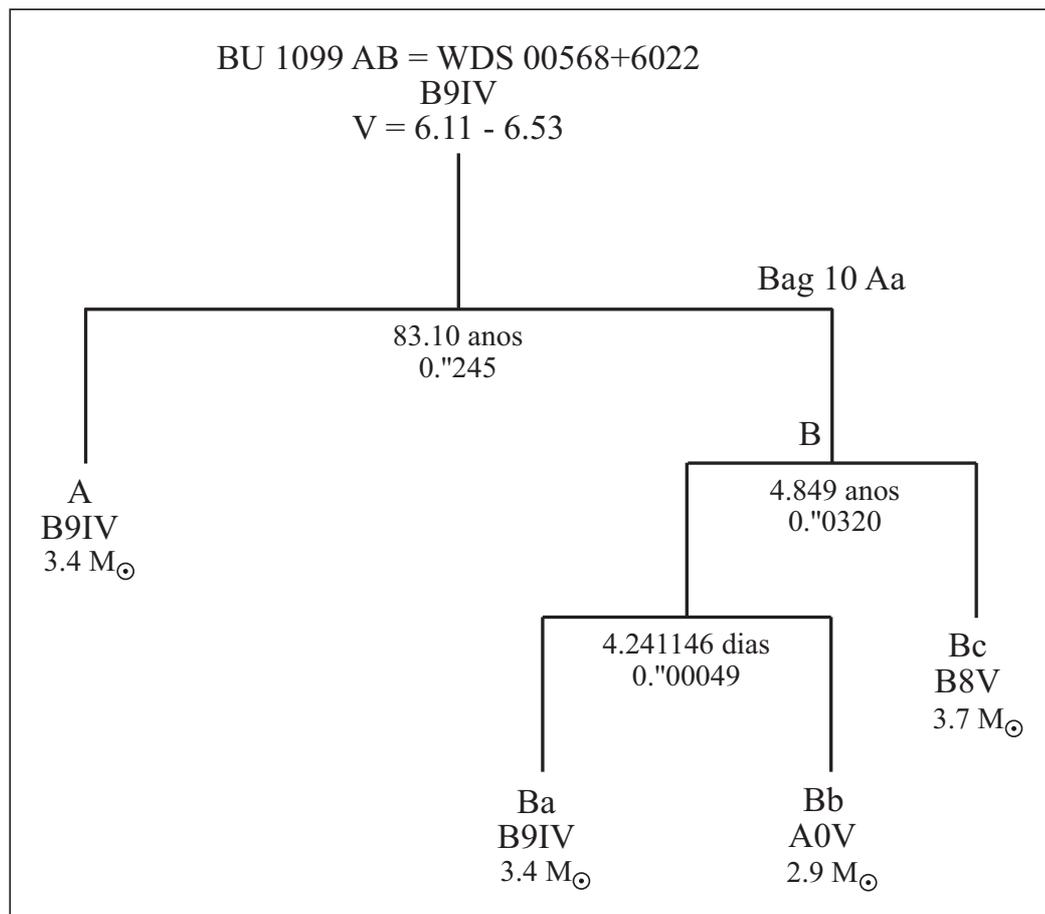


Figura 5.15: Diagrama de hierarquias do sistema quádruplo BU 1099 AB.

Cole et al. (1992) calcularam uma órbita combinada *speckle*/espectroscópica para a componente astrométrica *speckle*. Eles tomaram  $P$ ,  $T$ , e  $e$  e  $\omega$  da solução espectroscópica e determinaram os restantes elementos,  $a$ ,  $i$  e  $\Omega$ , mediante uma procura discreta calculando erros residuais nas RMS (valores médios quadráticos) para diferentes incrementos destes elementos

orbitais. Uns poucos anos mais tarde este sistema foi resolvido mediante interferometria *speckle* por Schoeller et al. (1998) e Balega et al. (2002).

Devido a que esta órbita combinada apresentava uma enorme discrepância com as observações, calculou-se uma nova órbita visual tendo em conta os elementos espectroscópicos e as medidas *speckle* (Docobo e Andrade 2006b). Isto foi possível graças a uma nova metodologia recentemente apresentada com a que se podem obter todos os elementos orbitais, massas e classes espectrais de um sistema triplo com uma subcomponente espectroscópica (Docobo e Andrade 2006a)<sup>2</sup>. A nova órbita visual de BAG 10 Aa, para cujo cálculo também se utilizou o método analítico de Docobo (1985), mostra-se na Figura 5.16.

Tabela 5.5: ELEMENTOS ORBITAIS DO SISTEMA BU 1099 AB E DA SUBCOMPONENTE ESPECTROSCÓPICA BAG 10 Aa.

ELEMENTOS ORBITAIS	BU 1099 AB	BAG 10 Aa
	Cole et al. (1992)	Docobo e Andrade (2006a)
$P$ (anos)	$83.10 \pm 0.20$	$4.849 \pm 0.050$
$T$	$2035.41 \pm 0.09$	$2003.504 \pm 0.005$
$e$	$0.241 \pm 0.002$	$0.224 \pm 0.010$
$a$ (")	$0.245 \pm 0.002$	$0.0320 \pm 0.0010$
$i$ (°)	$54.9 \pm 1.1$	$47.6 \pm 3.0$
$\omega$ (°)	$333.19 \pm 0.33$	$104.4 \pm 7.0$
$\Omega$ (°)	$175.01 \pm 0.33$	$329.9 \pm 5.0$

Os elementos orbitais desta nova órbita listam-se na Tabela 5.5, onde se tem determinado que o valor do ângulo do nodo de BAG 10 Aa corresponde ao nodo ascendente. As diferenças O-C mostram-se na Tabela 5.5,

<sup>2</sup>Neste artigo estudam-se 61 sistemas triplos, cinco deles binárias eclipsantes tipo W UMa com subcomponentes de baixa massa, e nove sistemas quádruplos, entre eles a BU 1099 AB.

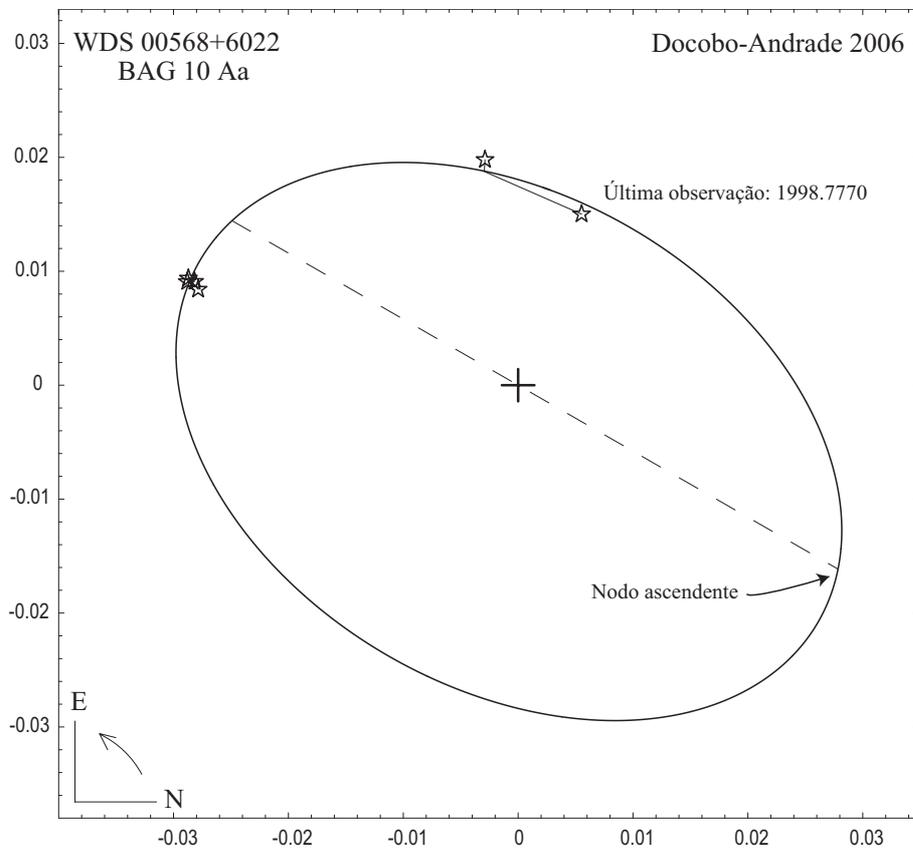


Figura 5.16: Nova órbita visual da binária BAG 10 Aa. A escala está em segundos de arco e a linha descontínua representa a linha dos nodos.

sendo  $\theta$  e  $\rho$  o ângulo de posição e a distância angular, respectivamente, e  $\Delta\theta$  e  $\Delta\rho$  as suas correspondentes diferenças observação-cálculo (O-C);  $N$  é o número de noites de observação. A última medida foi realizada por baixo do limite teórico de resolução de Rayleigh para um telescópio de 6.0 m ( $\sim 0''.020$ ), o qual explicaria o grande valor da diferença O-C para o ângulo de posição  $\Delta\theta$ .

Neste apartado analisaremos o sistema triplo formado pela componente A de BU 1099 e as componentes Bab e Bc que formam o par BAG 10 Aa. Sabe-se que Bab é, pela sua vez, uma binária, mas dado que a componente Bc está situada a uma distância de Bab umas 65 vezes maior que a separação entre as suas subcomponentes, Ba e Bb, suporemos que a órbita de

Tabela 5.6: MEDIDAS E DIFERENÇAS O-C PARA A NOVA ÓRBITA DA BAG 10 Aa.

Época	$\theta(^{\circ})$	$\rho(^{\prime\prime})$	$\Delta\theta(^{\circ})$	$\Delta\rho(^{\prime\prime})$	N	Observadores
1994.7180	162.5	0.0302	0.4	0.000	1	Schoeller et al. (1998)
1994.7180	161.9	0.0302	-0.2	0.000	1	"
1994.7180	162.1	0.0296	0.0	-0.000	1	"
1994.7180	163.2	0.0291	1.1	-0.000	1	"
1998.7740	98.3	0.0200	-0.6	0.000	1	Balega et al. (2002)
1998.7770	69.8	0.0160	-29.5	-0.003	1	"

BAG 10 Aa não se vê perturbada pela duplicidade de Bab, de modo que se pode considerar esta última como um único corpo.

Determinaremos, nos três cenários possíveis (SPM, MDT e MDT+EP), a evolução do intervalo de estabilidade dado por (5.5) correspondente a cada critério. No cenário de MDT suporemos que as três componentes perdem massa em função do tempo a um ritmo de  $10^{-7} M_{\odot} \text{ ano}^{-1}$ . A esta perda de massa sobreporemos outra por efeito das aproximações mútuas entre as componentes (efeito periastro generalizado), quantificada mediante os coeficientes que se listam na Tabela 5.7. A perda de massa global virá dada pela lei generalizada (5.6).

Os valores dos parâmetros que caracterizam a estabilidade do sistema segundo os critérios descritos em § 5.5 mostram-se na Tabela 5.8 para os instantes inicial  $t_i = 0$  e final  $t_f = 20\,000$  anos em cada um dos cenários considerados.

Segundo os dois primeiros critérios de estabilidade aplicados: Harrington e Graziani–Black, o sistema seria inicialmente estável para um cenário SPM; enquanto segundo os dois últimos: Eggleton–Kiseleva e Aarseth–Mardling, não seria possível dizer nada sobre a estabilidade. No cenário de MDT estes intervalos de estabilidade diminuem ligeiramente, mas as

Tabela 5.7: VALORES HIPOTÉTICOS DOS PARÂMETROS DE PERDA DE MASSA PARA CADA COMPONENTE ( $i, j = A, Bab, Bc$ ) DO SISTEMA BU 1099 AB.

	PRIMÁRIA	SECUNDÁRIA	TERCIÁRIA
$n_i$	3	3	3
$\alpha_i$	$10^{-7}$	$10^{-7}$	$10^{-7}$
$\beta_{ij}$	$10^{-7}$	$10^{-7}$	$10^{-7}$

conclusões anteriores seguem a ver válidas. Quando se introduz o efeito periastro o sistema sofre uma notável perda de estabilidade e deixa de ser estável segundo o critério de Harrington. Segundo o de Graziani–Black o sistema segue a ser estável, mas tão próximo à região de indizibilidade, onde hipoteticamente o sistema deixaria de ser estável (ver Fig. 5.17), que se pode considerar que esta não estará garantida, conclusão que é válida para o resto de critérios. Assim, observa-se claramente que, em qualquer caso, a perda de massa age como um mecanismo desestabilizador do sistema.

No detalhe do entorno do ponto que ocupa o sistema no mapa de estabilidade correspondente ao critério de Harrington (ver Fig. 5.18) pode-se observar a proximidade ao limite de estabilidade. A distância é tão reduzida que qualquer perturbação sobre o sistema poderia ter como consequência a eventual saída da região de estabilidade do sistema. Na Figura 5.19 mostra-se a evolução temporal, durante um período de 1 000 anos, dos intervalos de estabilidade de cada critério.

Na Figura 5.20 representam-se as excentricidades e os semieixos maiores em função do tempo ao longo de 4 000 anos para os três cenários considerados. É notável o efeito do mecanismo de Kozai sobre a excentricidade, o qual era de esperar dada a elevada inclinação mútua das duas órbitas,  $i = 99^\circ 2$ . Os valores aproximados da máxima excentricidade e do ciclo da sua variação periódica dados, respectivamente, por (5.1-5.2) são:

Tabela 5.8: VALORES DOS PARÂMETROS DE ESTABILIDADE, DO SEU VALOR CRÍTICO E DOS INTERVALOS DE ESTABILIDADE PARA OS CRITÉRIOS DE HARRINGTON ( $F$ ), GRAZIANI-BLACK ( $\mu$ ), EGGLETON-KISELEVA ( $X$ ) E AARSETH-MARDLING ( $Z$ ) PARA O SISTEMA TRIPLO BU 1099 AB COM  $t_i = 0$  E  $t_f = 20\,000$  ANOS.

$p$	$t_i$	$t_f$	$p_c$	$t_i$	$t_f$	$\delta_p$	$t_i$	$t_f$
SPM								
$F$	5.803	5.825	$F_c$	5.380	5.380	$\delta_F$	+0.079	+0.083
$\mu$	0.563	0.563	$\mu_c$	1.436	1.454	$\delta_\mu$	+0.608	+0.613
$X$	18.261	18.296	$X_c$	17.999	27.510	$\delta_X$	+0.015	-0.335
$Z$	5.803	5.825	$Z_c$	11.288	10.163	$\delta_Z$	-0.486	-0.427
MDT								
$F$	5.803	5.749	$F_c$	5.380	5.389	$\delta_F$	+0.079	+0.067
$\mu$	0.563	0.592	$\mu_c$	1.436	1.401	$\delta_\mu$	+0.608	+0.578
$X$	18.261	17.914	$X_c$	17.999	18.641	$\delta_X$	+0.015	-0.039
$Z$	5.803	5.749	$Z_c$	11.288	10.525	$\delta_Z$	-0.486	-0.454
MDT+EP								
$F$	5.803	5.301	$F_c$	5.380	5.389	$\delta_F$	+0.079	-0.016
$\mu$	0.563	0.592	$\mu_c$	1.436	1.064	$\delta_\mu$	+0.608	+0.444
$X$	18.261	16.089	$X_c$	17.999	37.840	$\delta_X$	+0.015	-0.575
$Z$	5.803	5.301	$Z_c$	11.288	10.004	$\delta_Z$	-0.486	-0.470

$$e_{12\text{-máx}} \simeq 0.978$$

$$P_{Koz} \sim 5 \cdot 10^3 \text{ anos}$$

Este incremento cíclico da excentricidade age reforçando o efeito periaastro durante as fases de altíssima excentricidade, o qual, pela sua vez, leva

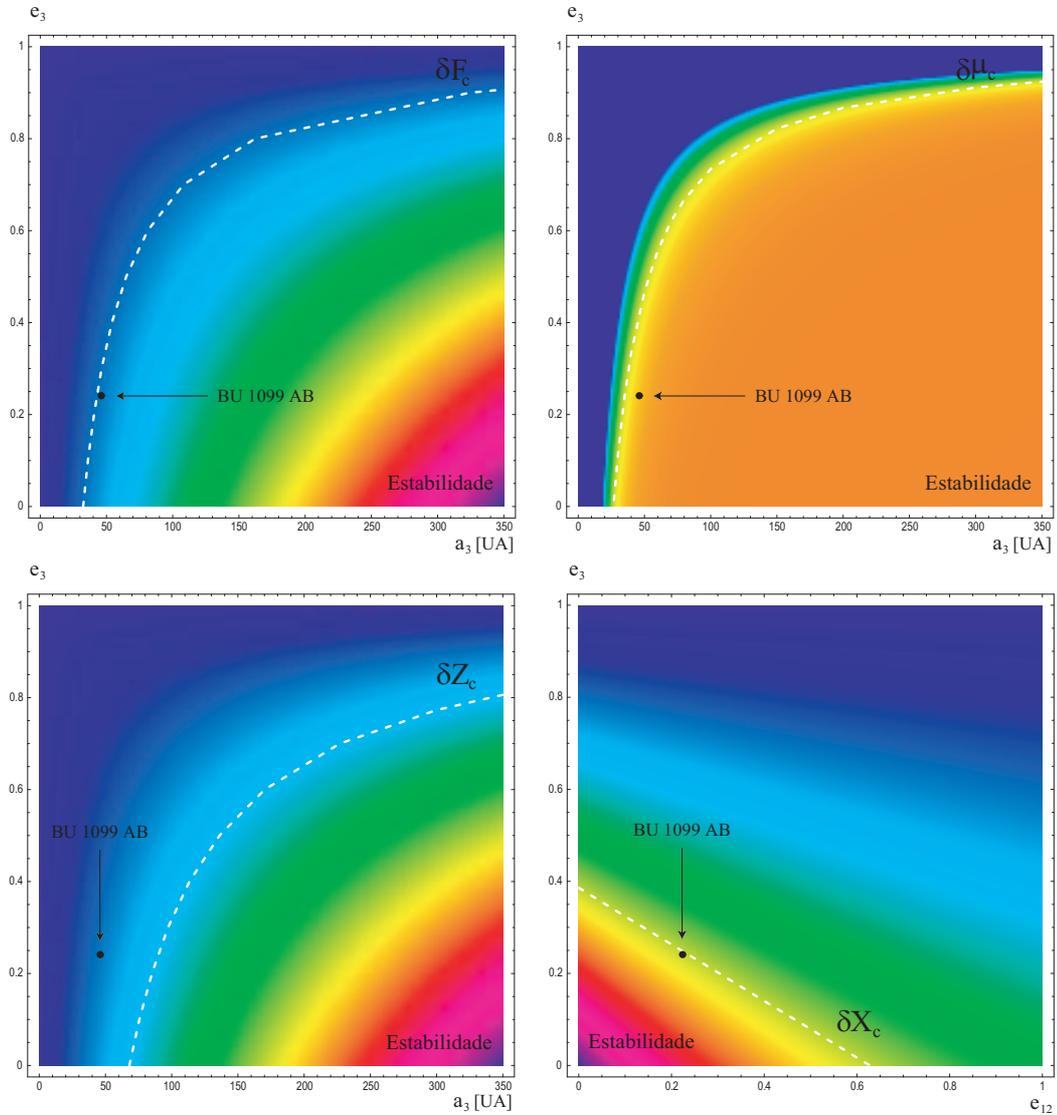


Figura 5.17: Mapas de estabilidade em função da excentricidade e do semieixo maior da órbita externa segundo os critérios de Harrington ( $\delta F$ ), Graziani–Black ( $\delta \mu$ ) e Aarseth–Mardling ( $\delta Z$ ), e em função das excentricidades das duas órbitas segundo o critério de Eggleton–Kiseleva ( $\delta X$ ) para BU 1099 AB. A linha branca descontínua marca a fronteira entre a região de estabilidade e a de indizibilidade, enquanto as cores indicam o gradiente, de maneira que nas regiões onde a cor é uniforme a variação do valor do intervalo de estabilidade é mais lenta que em aquelas outras onde as cores variam rapidamente.

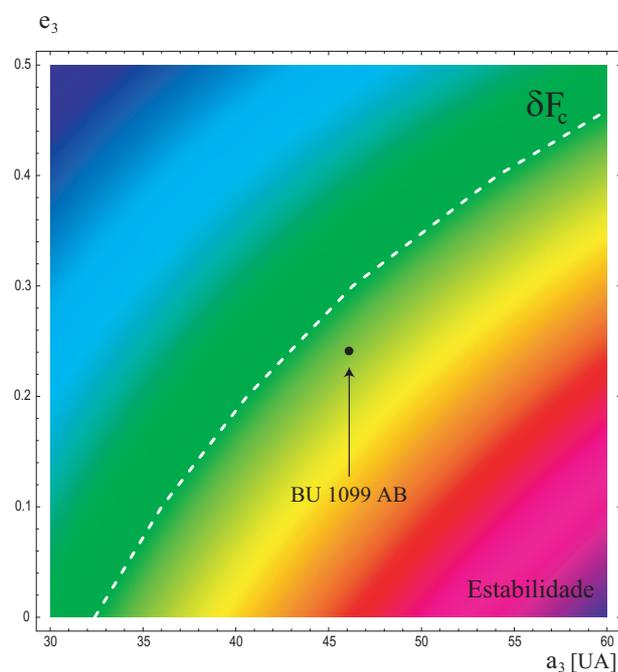


Figura 5.18: Detalhe do mapa de estabilidade para o critério de Harrington no entorno do ponto que ocupa o sistema.

a um incremento da excentricidade e assim sucessivamente. Este efeito de retroalimentação entre estes dois fenômenos faz que a excentricidade da órbita interna se torne a cada vez mais e mais excêntrica, tendendo assintoticamente a 1 e provocando, eventualmente, uma colisão entre as componentes da binária interna.

Este reforço do efeito periastro provoca também importantes variações nos semieixos maiores, sobretudo no da órbita interna. Nesta observa-se que as épocas de máxima excentricidade da órbita interna coincidem com aumentos bruscos do semieixo maior. As variações devidas ao mecanismo de Kozai nas inclinações mostram-se na Figura 5.21.

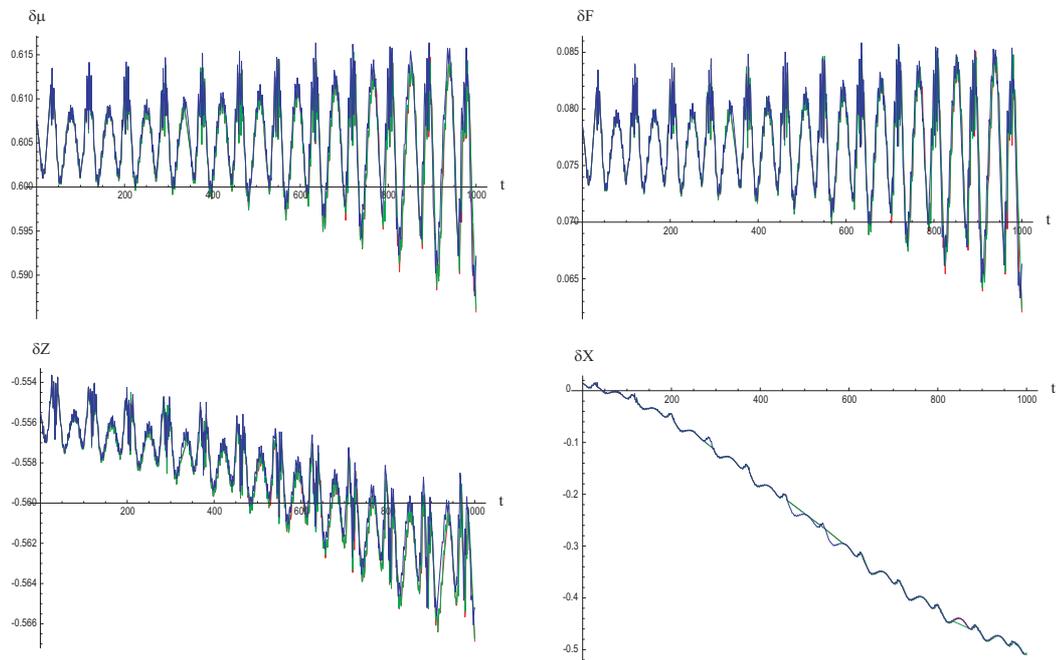


Figura 5.19: Evolução temporal dos intervalos de estabilidade de cada critério para BU 1099 AB. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP.

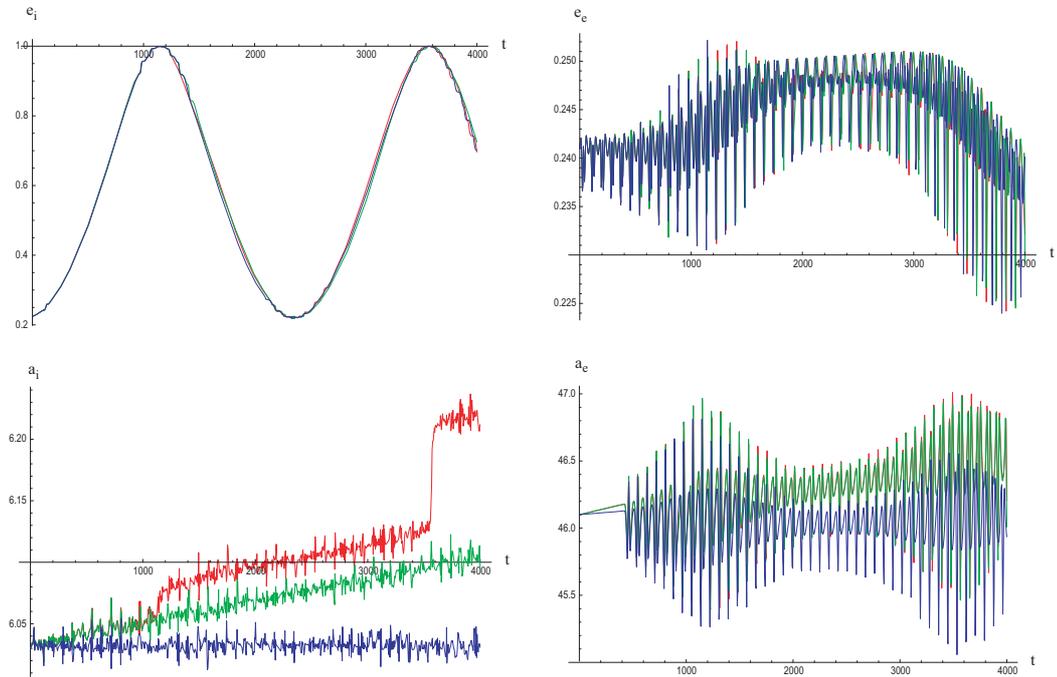


Figura 5.20: Evolução temporal das excentricidades e semieixos maiores de ambas órbitas para a BU 1099 AB. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP.

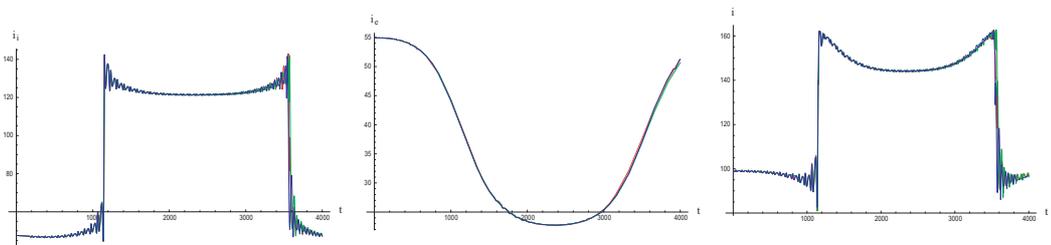


Figura 5.21: Evolução temporal das inclinações interna (esquerda), externa (centro) e mútua (direita) para BU 1099 AB. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP.

## 5.7.2 Comentários

À vista dos exemplos analisados, hipoteticamente sujeitos ao fenómeno de perda de massa com efeito periastro, é possível tirar as seguintes conclusões sobre a sua estabilidade:

1. O aumento por efeito periastro da excentricidade e do semieixo maior da órbita interna é maior na órbita tipo P que na S. De facto, praticamente não há variação da excentricidade na órbita tipo S em relação ao cenário SPM.
2. Às avessas, a influência do efeito periastro na excentricidade e semieixo maior da órbita externa é maior na órbita tipo S que na P. Assim, praticamente não há variação da excentricidade na órbita tipo P em relação ao cenário SPM.
3. Em geral, os intervalos de estabilidade diminuem em cenários de MDT e MDT+EP. Na órbita tipo S isto pode levar à redução global da estabilidade, enquanto na órbita tipo P há uma tendência ao aumento dos intervalos de estabilidade que contra-arresta este efeito. Isto é, para o mesmo conjunto de massas e elementos orbitais a órbita tipo P é mais estável que a tipo S.
4. O sistema estelar triplo BU 1099 AB apresenta um reforço do efeito periastro generalizado provocado pelo mecanismo de Kozai. Isto produz incrementos nos semieixos maiores, sendo os mais notáveis os que se produzem no semieixo maior da órbita interna durante as maiores aproximações mútuas nas fases de altíssima excentricidade.

As conclusões anteriores sobre a variação dos elementos orbitais e a evolução da estabilidade referidas a sistemas planetários com órbitas tipo P e S supõem-se aplicáveis ao resto de sistemas planetários conhecidos com características similares a  $\gamma$  Cephei.

Quanto ao comportamento dos critérios de estabilidade em função do cenário em que evolui o sistema, dirigindo a atenção para o sistema BU 1099 AB, observa-se o seguinte:

1. Critério de Harrington: o parâmetro de estabilidade  $F$  diminui o seu valor quando existe perda de massa, atingindo o valor mais baixo no cenário de MDT+EP. Enquanto isso, o parâmetro crítico

$F_c$  permanece aproximadamente constante independentemente do cenário. O intervalo de estabilidade  $\delta_F$  diminui equivalentemente em função de  $F$ .

2. Critério de Graziani–Black: o parâmetro de estabilidade  $\mu$  permanece aproximadamente constante nos diferentes cenários, enquanto o parâmetro crítico  $\mu_c$  diminui a medida que a perda de massa aumenta. Isto traduz-se na redução do intervalo de estabilidade  $\delta_\mu$ .
3. Critério de Eggleton–Kiseleva: o parâmetro de estabilidade  $X$  diminui a medida que se consideram sucessivamente os cenários de MDT e MDT+EP. Por outra parte, o parâmetro crítico  $X_c$  sofre fortes oscilações. Como resultado, o intervalo de estabilidade  $\delta_X$  reduz-se.
4. Critério de Aarseth–Mardling: O parâmetro de estabilidade  $Z$  diminui ligeiramente, enquanto o parâmetro crítico  $Z_c$  permanece aproximadamente igual. O correspondente intervalo de estabilidade  $\delta_Z$  aumenta ligeiramente.

O que parece claro é que a perda de massa, especialmente a produzida nas proximidades do periastro, leva associada uma clara tendência para a instabilidade, de modo que sistemas em princípio estáveis poderiam acabar sendo dinamicamente instáveis devido a que esta diminuição da sua massa produz variações seculares em alguns elementos orbitais, nomeadamente nos semieixos maiores e na excentricidade da órbita interna, que podem acabar na violação da hierarquia ou, inclusive, numa colisão das componentes.

Para quantificarmos esta tendência assumiremos o seguinte critério: consideraremos que a tendência é para a estabilidade/instabilidade se a diferença entre o valor do intervalo de estabilidade inicial  $\delta_p^{\text{inicial}}$  e o final  $\delta_p^{\text{final}}$  (20 000 anos depois) em relação ao inicial é menor/maior do 5%; em qualquer outro caso, consideraremos que não existe nenhuma tendência clara e que, portanto, o sistema permanece na situação inicial de estabilidade ou instabilidade. Os resultados resumem-se na Tabela 5.9, onde o símbolo

‘+’ representa a tendência para a estabilidade, o ‘-’ para a instabilidade e o ‘=’ para a permanência no estado inicial.

Tabela 5.9: TENDÊNCIA DA ESTABILIDADE PARA AS TRÊS CONFIGURAÇÕES CONSIDERADAS.

CONFIGURAÇÕES	SPM				MDT				MDT+EP			
	F	$\mu$	X	Z	F	$\mu$	X	Z	F	$\mu$	X	Z
1	=	=	+	=	-	=	=	=	-	=	=	=
2	-	=	=	=	-	=	=	=	-	=	=	=
3	+	=	-	+	-	-	-	+	-	-	-	=

É de notar que este mecanismo, o efeito periastro, poderia explicar a desintegração sucessiva de sistemas de n-corpos a sistemas de (n-1)-corpos observado em algumas associações estelares —ou, de qualquer modo, contribuir a acelerar este processo.



# Capítulo 6

## Modelização de ventos estelares em sistemas múltiplos com massa variável

*“Ubi materia, ibi geometria.” \**

JOHANNES KEPLER (1571–1630)

### 6.1 Introdução

Como se viu no Capítulo 1, existe uma extensa tipologia de sistemas estelares binários em que a perda de massa desempenha um papel fundamental, tanto na evolução física das estrelas quanto na evolução orbital, sendo o principal mecanismo de produção desta os ventos estelares.

O problema da interacção de dois ventos estelares supersónicos (a velocidade constante) e isotrópicos é um assunto de grande interesse astrofísico

---

\* “Onde há matéria há geometria.” *De fundamentis astrologiae certioribus*, 1601.

que já foi tratado no passado. Stevens, Blondin e Pollock (1992) levaram a cabo simulações numéricas do problema de dois ventos utilizando as equações completas da dinâmica de gases. Também Dyson, Hartquist e Biro (1993) obtiveram numericamente a superfície de equilíbrio entre os dois ventos, e pouco depois, Wilkin (1996) e Cantó, Raga e Wilkin (1996) definiram um formalismo com o qual se obtêm soluções analíticas a partir de um sistema de quatro equações algébricas. Como se viu em § 1.3.1, mais recentemente têm sido obtidas soluções analíticas e numéricas para ventos em colisão em sistemas simbióticos.

Estas interacções entre ventos estelares, especialmente importantes em sistemas binários tipo WR+OB (sistema binário formado por uma estrela Wolf-Rayet e outra tipo O ou B), alcançam os seus máximos de intensidade nas passagens pelo periastro, como no caso notável da WR 140 visto em § 1.3.2 e ao que neste capítulo também se fará referência.

## **6.2 Cenários reais com estruturas vento-vento notáveis**

Nos últimos anos têm sido observados sistemas binários, nomeadamente WR+OB, em que se produz um notável aumento da interacção entre os respectivos ventos estelares durante a passagem pelo periastro. Do seu estudo conclui-se que o incremento da actividade na região de colisão entre ventos no entorno do periastro é maior para binárias com órbitas muito excêntricas.

### **6.2.1 WR 104 e WR 98a**

Estes dois sistemas (ver Fig. 6.1) pertencem ao denominado Cúmulo Quíntuplo. Provavelmente as cinco estrelas vermelhas que se observam na imagem (obtida no infravermelho próximo) sejam também 'remoinhos de

pó' atrás dos quais se encontrariam duas estrelas em órbita uma em redor da outra expelindo pó ao exterior.

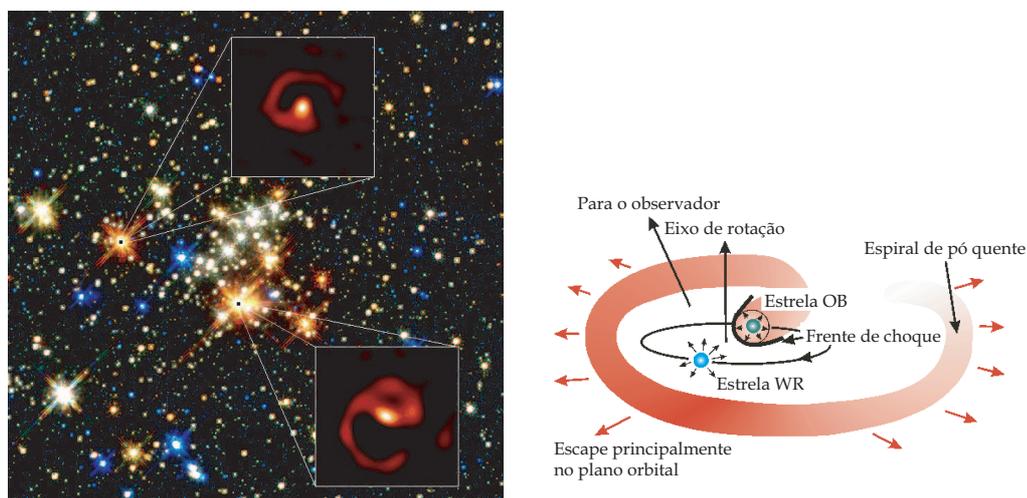


Figura 6.1: Esquerda: Sobreposição de imagens de alta resolução de WR 104 (em baixo) e WR 98 (acima) sobre outra imagem do Cúmulo Quíntuplo (Tuthill et al. 2006). Direita: Modelo de ventos em interação com fluxo saliente em espiral para a WR 104.

Estas estrelas massivas (entre  $10 M_{\odot}$  e  $20 M_{\odot}$ ) são sistemas Wolf–Rayet cujos ventos em colisão geram estruturas de pó que, em geral, supõem uma fracção pequena da perda de massa total.

A primeira destas nebulosas espirais dada a conhecer, e considerada hoje como protótipo deste classe de objectos, foi WR 104 (Tuthill, Monnier e Danchi 1999). Para ela se propôs o modelo que se representa na Figura 6.1, isto é, o de um sistema binário WR+OB circular no qual o fluxo de pó, resultado da interacção entre os ventos estelares, e o próprio movimento do sistema geram uma enorme cauda de pó (ver Fig. 6.2 à esquerda). Deste modelo deriva-se um período de rotação da cauda de pó de  $220 \pm 30$  dias e uma velocidade de saída, no plano orbital, de  $111 \pm 17 \text{ mas ano}^{-1}$ . Supondo que este é também o período do sistema binário resulta, para uma massa entre  $20 M_{\odot}$  e  $50 M_{\odot}$ , uma separação de 1.9–2.6 UA.

Um sistema similar ao anterior é WR 98a (Monnier, Tuthill e Danchi 1999), outra binária WR+OB com um período de  $565 \pm 50$  dias e rodeada de

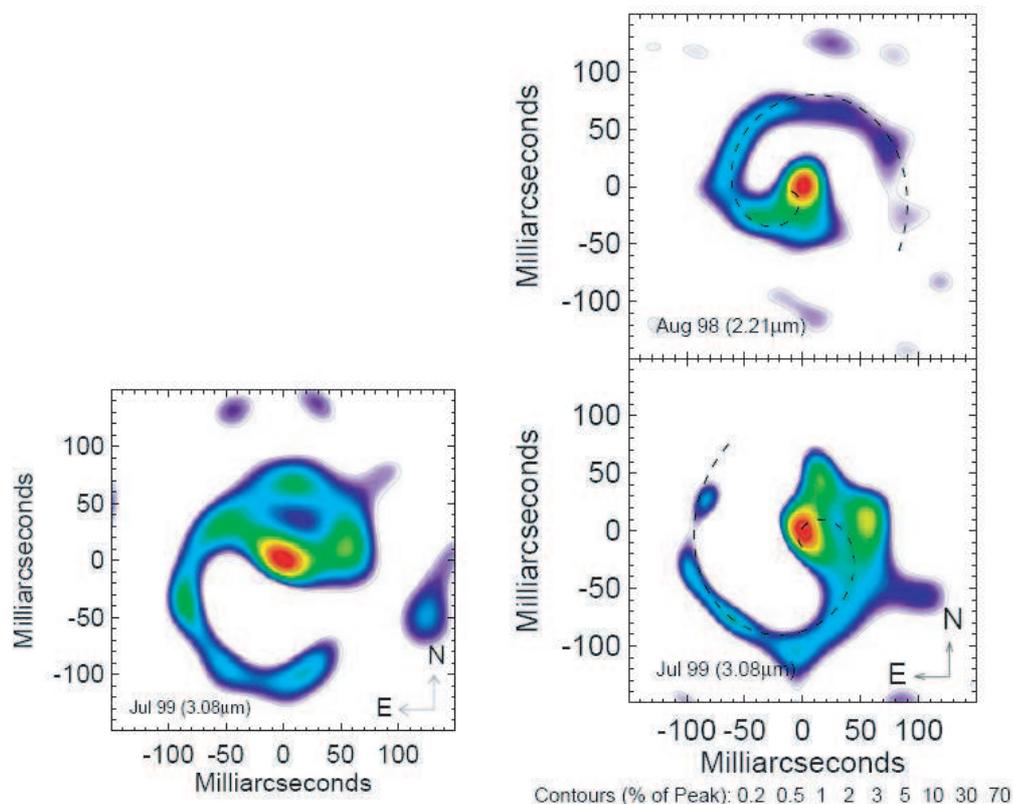


Figura 6.2: Esquerda: imagem de WR 104 em Julho de 1999. Direita: imagem de WR 98 em Agosto de 1998 (acima) e em Julho de 1999 (em baixo). A linha descontínua representa um modelo espiral de rotação (Tuthill et al. 2006).

uma cauda de pó (ver Fig. 6.2 à direita). A maior diferença com WR 104 é certa variabilidade na produção de pó, que talvez poderia ser explicada se WR 98a não fosse totalmente circular.

### 6.2.2 WR 140

Este objecto é um protótipo de sistema com fortes ventos em colisão formado por uma Wolf–Rayet WC7 e uma estrela O4-5 (Setia Gunawan et al. 2001; Monnier, Tuthill e Danchi 2002; Pollock et al. 2005). A sua característica mais notável é que apresenta formação de pó (ver Fig. 6.3) durante um

período de alguns meses nas proximidades do periastro a cada 7.94 anos, quando as estrelas estão afastadas apenas algumas unidades astronómicas. Esta produção descontínua de pó estaria ligada à alta excentricidade do sistema ( $e = 0.88$ ), característica que supõe a maior diferença com respeito à classe de sistemas Wolf-Rayet produtores de pó permanente (como, por exemplo, WR 104).

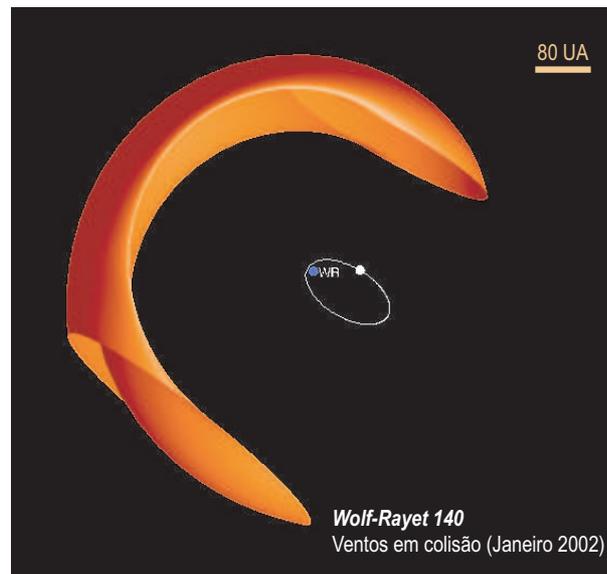


Figura 6.3: Geometria observada do sistema WR 140. A órbita está aumentada num factor 3 relativamente ao casulo de pó. O observador localiza-se em direcção à parte baixa da imagem com uma inclinação mal determinada (Monnier, Tuthill e Danchi 2002).

### 6.2.3 $\eta$ Carinae

Um dos modelos mais plausíveis quanto à natureza deste objecto, dos mais massivos e luminosos da galáxia, supõe que  $\eta$  Carinae é uma binária (Soker 2001) altamente excêntrica e ultra-massiva que apresenta uma intensa interacção vento-vento com uma elevada perda de massa (Corcoran et al. 2001).

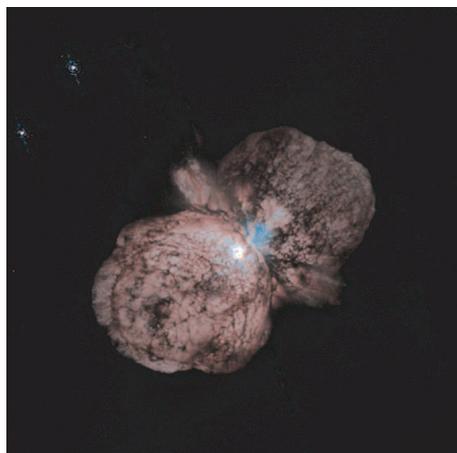


Figura 6.4: Imagem do sistema ultra-massivo  $\eta$  Carinae (Smith e Morse 2004).

De facto, o objecto central é uma LBV, isto é, uma hipergigante variável azul com umas  $120 M_{\odot}$  (a secundária tem umas  $30 M_{\odot}$ ) e uma perda de massa de  $10^{-3} M_{\odot} \text{ ano}^{-1}$ . Provavelmente esta intensa perda de massa é induzida por efeitos de maré sobre as camadas externas, apresentando certa variabilidade devida à excentricidade orbital. Na grande erupção acontecida no período 1837-1858 chegou a ejectar entre 3 e  $15 M_{\odot}$  (aproximadamente,  $0.1\text{--}0.5 M_{\odot} \text{ ano}^{-1}$ ) dando lugar à uma formação bipolar característica chamada 'Homúnculo' (ver Fig. 6.4) que apresenta velocidades de expansão de  $400\text{--}600 \text{ km s}^{-1}$ .

Este sistema tem sido amplamente estudado nos últimos anos. Recentemente, no contexto do problema de massa variável que aqui se trata, Soker (2003) sugeriu que não só existe perda de massa no periastro, senão que quando a primária se encontra no apoastro poderia acretar aproximadamente um 5% da massa ejectada durante o período orbital anterior e que ainda permanece ligada ao sistema. Quanto às passagens pelo periastro, sugere que, além da perda de massa, também podem acontecer episódios de acreção que levariam à ejeção de dois jactos de matéria na secundária (Soker 2005a,b).

## 6.3 Formulação do problema

### 6.3.1 Descrição do sistema

No contexto dos cenários expostos na secção anterior, isto é, sistemas binários tipo Wolf–Rayet com fortes ventos estelares em interacção – eventualmente só nas proximidades do periastro – consideraremos a existência de uma estrela de baixa massa, uma anã castanha, ou de um planeta gigante situado a uma distância o suficientemente grande como para garantir a estabilidade do sistema global (ver capítulo anterior).

A aproximação entre os primários da binária activa do tipo WR+OB leva associada uma maior actividade nos seus ventos estelares e, portanto, um incremento da perda massa. Supomos que parte desta massa abandona o sistema e que o corpo distante, ao se deslocar através da nuvem de pó ejectada pelo sistema binário, captura certa fracção desta (ver Fig. 6.5). Estudaremos a evolução deste sistema triplo hierarquizado em que consideramos que a massa do terciário é relativamente pequena, embora não desprezível, comparada com a dos primários.

É necessário dizer que este fenómeno de perda–ganho de massa não é propriamente um processo de transferência de massa, já que se supõe que a massa que captura o terciário está a escapar do sistema. Em analogia com o fenómeno descrito em § 2.3, denominá-lo-emos ‘efeito periastro inverso’.

Para a análise orbital do sistema faremos uso da formulação de Jacobi descrita em § 5.4. As equações do movimento vêm dadas por:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} + G m_3 \left( \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} - \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} \right), \\ \ddot{\vec{R}} &= -G(m_1 + m_2 + m_3) \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} \right),\end{aligned}$$

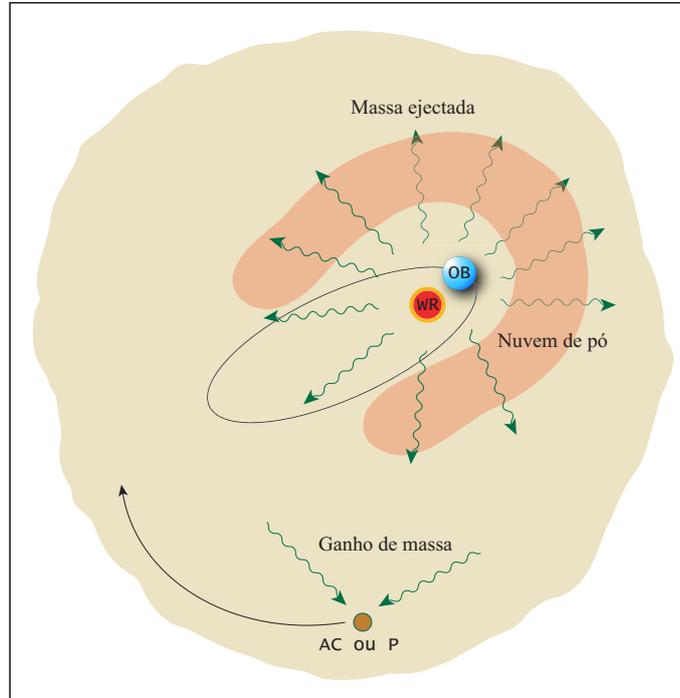


Figura 6.5: Representação do sistema formado por uma anã castanha (AC) ou um planeta (P) em órbita em redor de uma binária WR+OB com ventos em interacção.

onde  $\vec{r}$  é o vector de posição de secundária (com massa  $m_2$ ) relativamente à primária ( $m_1$ ), no sistema binário, e  $\vec{R}$  é o vector de posição do terceiro corpo ( $m_3$ ) relativamente ao centro de massas do sistema binário.  $\vec{r}_{ij}$ , com  $i, j = 1, 2, 3$ , são os vectores de posição relativos entre as três componentes e  $G$  é a constante de gravitação.

### 6.3.2 Massa variável

O movimento dos primários constitui um problema de Gylden–Meščerskij perturbado por efeito periastro em que, independentemente da posterior distribuição da massa portada pelo vento, suporemos que a perda de massa do sistema é isotrópica. De facto, consideraremos que a massa dos primários varia segundo uma lei do tipo visto em § 2.3.2:

$$\dot{\mu}_{12} = -\alpha_1 \mu_1^{n_1}(t) - \alpha_2 \mu_2^{n_2}(t) - \beta \frac{p_\theta}{r^2}$$

Por outro lado, a perturbação que sofre o terciário dependerá da sua posição com respeito à estrutura de ventos criada pelos primários. Assim, consideraremos uma lei de variação de massa do tipo:

$$\dot{\mu}_3 = +\delta(\varphi, R, r) \cdot \mu_3, \quad (6.1)$$

onde o parâmetro variável  $\delta(\varphi, R, r)$  quantifica o ganho de massa em toda a região do movimento, sendo  $\varphi$  o ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{R}$ .

## 6.4 Modelização da distribuição de massa na região activa

O modelo para a distribuição de massa resultante dos ventos em colisão que se vai definir aqui será aplicável, não só ao problema de massa variável, senão a qualquer problema em que se precise uma expressão analítica. O objectivo é obter uma função que descreva, com a melhor aproximação possível, a distribuição de massa resultado da interacção entre ventos num sistema binário, espacial e temporalmente.

Em geral, definiremos a função de distribuição de massa  $\Gamma$  como o produto

$$\Gamma(\varphi, R, r) = \Phi(\varphi) \cdot \Xi(R) \cdot \Theta(r), \quad (6.2)$$

ou, equivalentemente,

$$\Gamma(\varphi, R, f) = \Phi(\varphi) \cdot \Xi(R) \cdot \Theta(f),$$

onde as funções  $\Phi(\varphi)$ ,  $\Xi(R)$ ,  $\Theta(r)$  e  $\Theta(f)$  são os factores de forma da distribuição de massa e  $f$  é a anomalia verdadeira do sistema binário que desempenha o papel de variável temporal.

### 6.4.1 Definição e caracterização dos factores de forma

Supomos que a distribuição de massa que os ventos estelares geram tem uma estrutura tridimensional que evolui no tempo. Esta estrutura, que é enormemente complexa, dependerá tanto da geometria da órbita do sistema como de parâmetros estelares tais como o ritmo de perda de massa, a velocidade do vento, etc. O que visamos é construir um modelo que permita realizar uma aproximação geométrica à distribuição de massa mediante um esquema matemático relativamente simples.

Cada um dos factores de forma do vento quantifica a distribuição de massa em função da coordenada da que este depende, de modo que o produto de todos eles fornece a tal distribuição em cada ponto do espaço para um instante determinado.

A definição da sua dependência funcional fazê-la-emos tendo em mente os cenários reais vistos em § 6.2 onde, em geral, existe um sistema binário relativamente fechado, altamente excêntrico (caso da WR 140) ou circular (caso da WR 104), com uma alta perda de massa (uma fracção desta em forma de pó). Estes factores de forma, implicitamente definidos segundo (6.2) em função das coordenadas de posição, também dependerão, como veremos, de alguns parâmetros cujos valores deverão ser estabelecidos em função da própria natureza dos ventos estelares em colisão —velocidades, ritmos de perda de massa, etc.

Na procura de funções matemáticas deste tipo, susceptíveis de serem utilizadas como factores de forma para uma região de ventos em colisão protótipo, temos encontrado um conjunto relativamente simples que fornece uma representação adequada da distribuição de massa. Com certeza, a utilização de funções mais complicadas e com um maior número de pa-

râmetros fornecerá representações mais detalhadas à custa de uma maior complexidade.

Assim, definimos os factores de forma do vento resultante como:

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi) &= \frac{\chi_1 + \cos^{2\chi_2}(\frac{\varphi}{2})}{\chi_1 + 1}, \\ \Xi(R) &= \frac{1}{1 + R} + e^{-\xi_1 |R|} \text{sen}^2(\xi_2 R), \\ \Theta(f) &= \frac{\theta_1 + \cos(f - \theta_2)}{\theta_1 + 1},\end{aligned}$$

onde  $\chi_i$ ,  $\xi_i$  e  $\theta_i$  (com  $i = 1, 2$ ) são seis parâmetros aos quais fazíamos referência anteriormente e que, de seguido, se descrevem brevemente indicando os intervalos de variabilidade admissíveis:

- Mínimo na transversal ( $\chi_1$ ): mede o mínimo na direcção perpendicular à linha de união dos primários ( $\chi_1 \geq 0$ ).
- Largura do máximo longitudinal ( $\chi_2$ ): mede a largura do máximo na direcção perpendicular à linha de união dos primários ( $\chi_2 \in \mathbb{Z}^+$ ).
- Intensidade da camada ( $\xi_1$ ): mede a intensidade relativa das camadas ejectadas com respeito à mais recente ( $\xi_1 > 0$ ).
- Número de camadas ejectadas ( $\xi_2$ ): quantifica o número de camadas ejectadas considerando episódios prévios ( $\xi_2 > 0$ ).
- Mínimo no apoastro ( $\theta_1$ ): mede o mínimo nas proximidades do apoastro ( $\theta_1 \geq 1$ ).
- Desfasagem do periastro ( $\theta_2$ ): mede o máximo com respeito ao periastro ( $\theta_2 > 0$ ).

Portanto, o factor de forma transversal  $\Phi$  representa, fisicamente, a variação na distribuição de massa na direcção perpendicular à linha de união dos primários. Esta toma o seu valor máximo para  $\varphi = 0$  e o mínimo para  $\varphi = \pm\pi$ . Se  $\chi_1$  é diferente de zero significa que, inclusive na direcção perpendicular à linha de união dos primários, existe certa distribuição não nula de massa.

O segundo factor de forma, o factor de forma radial  $\Xi$ , depende da distância radial em relação ao centro de massas do sistema binário formado pelos primários. Suporemos que em sucessivas ejeções se terão ido formando camadas situadas a distâncias cada vez maiores do sistema binário e menos carregadas de massa. O seu número quantifica-se mediante o parâmetro  $\chi_2$ , enquanto a caracterização das densidades relativamente à mais recente virá dada pelo parâmetro  $\chi_1$ .

O último factor, o factor de forma pericêntrico  $\Theta$ , quantifica a distribuição de massa resultante da interacção entre os primários em função da sua distância, isto é, é o termo responsável do efeito periastro. Assim, oscila entre um valor mínimo nas proximidades do apoastro, caracterizado pelo parâmetro  $\theta_1$ , e um máximo situado com certo atraso com respeito ao periastro, caracterizado por  $\theta_2$ . Este é o único factor que depende exclusivamente da posição relativa dos primários, daí a necessidade de, quando se estudarem casos reais, introduzir certo atraso para ter em conta a velocidade finita à que se propaga a interacção.

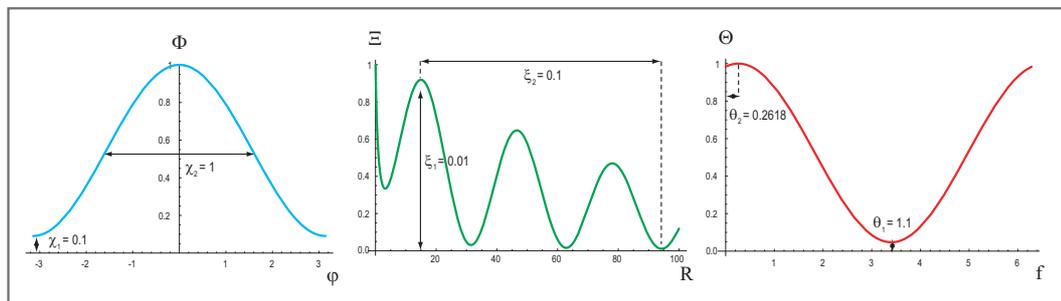


Figura 6.6: Factores de forma  $\Phi(\varphi)$ ,  $\Xi(R)$  e  $\Theta(f)$  para certos valores concretos dos parâmetros do vento (indicados na figura).

Na Figura 6.6 pode-se ver a aparência que apresentam estes factores de forma da distribuição de massa na região de ventos em colisão para certos valores dos parâmetros que os caracterizam. Durante todo o tempo a maior densidade de massa concentra-se principalmente numa direcção ligeiramente atrasada com respeito à linha de união dos primários.

A fim de ter uma imagem mais clara da distribuição de massa que se acaba de definir, na Figura 6.7 mostram-se as representações tridimensionais, junto com os mapas de densidade correspondentes, que se obtêm ao considerar o produto, dois a dois, destes factores de forma. Assim, o produto  $\Phi \cdot \Theta$  apresenta um máximo que corresponde a um ponto situado sobre a linha de união dos primários pouco depois da sua passagem pelo periastro;  $\Phi \cdot \Xi$  dá a variação da distribuição na direcção da linha de união dos primários em função da distância ao seu centro de massas; por último,  $\Xi \cdot \Theta$  tem máximos para certos valores da distância ao centro de massas dos primários nas proximidades do seu periastro.

Será precisamente mediante esta função de distribuição de massa que quantificaremos o ganho de massa que sofre o terceiro corpo no problema formulado em § 6.3. Deste modo, definiremos o parâmetro  $\delta$  de (6.1) como o produto

$$\delta = \delta_0 \cdot \Gamma(\varphi, R, f), \quad (6.3)$$

onde  $\delta_0$  é um número real positivo que quantifica a intensidade do ganho de massa.

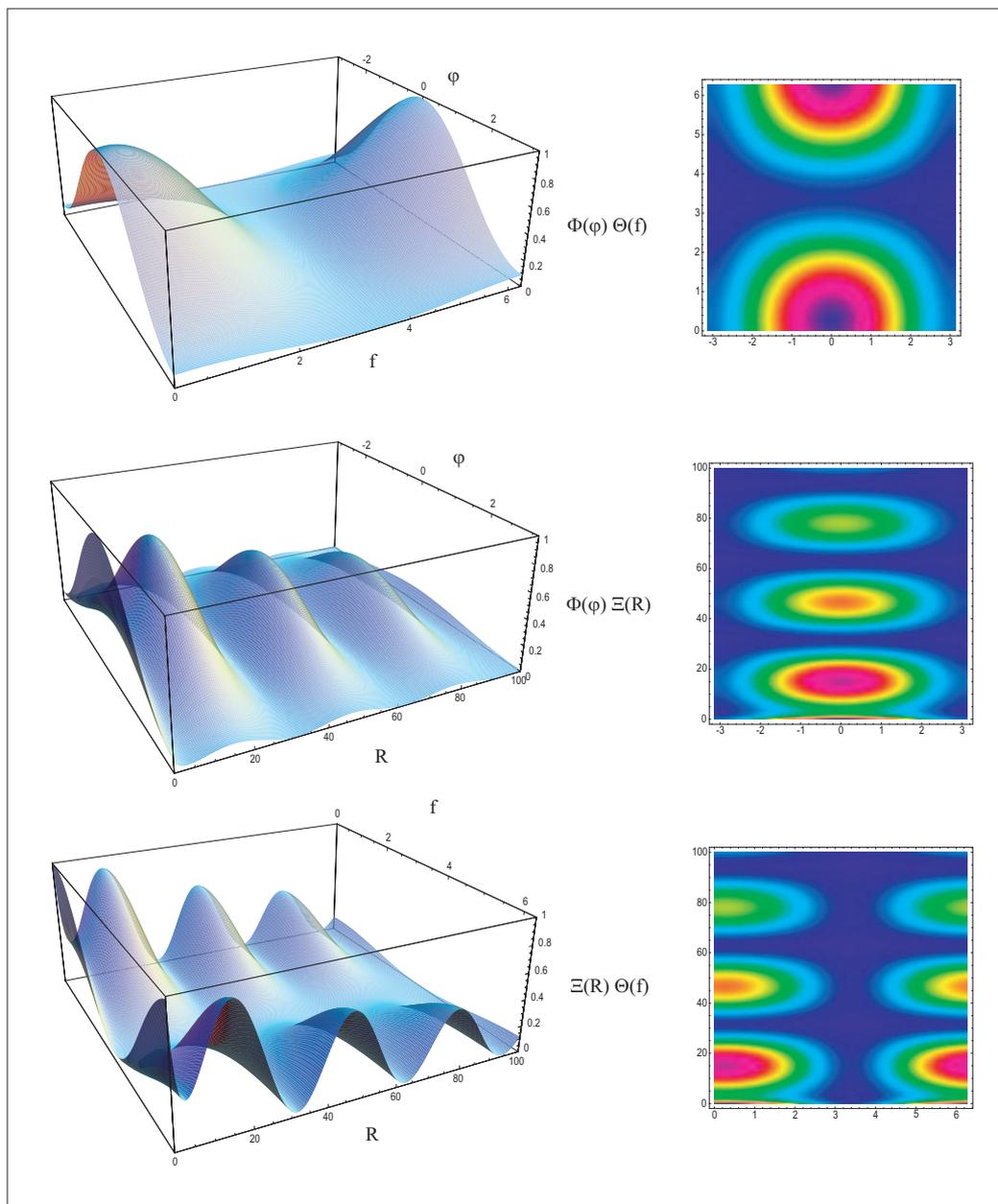


Figura 6.7: Representações tridimensionais e mapas de densidade dos factores de forma da região activa.

## 6.5 Aplicação

### 6.5.1 Caracterização do sistema

Aplicaremos o modelo descrito ao sistema binário WR 140 supondo a existência de uma estrela de baixa massa ( $0.08 M_{\odot}$ ), uma anã castanha, em órbita tipo P em redor dos primários. Obteremos a evolução do sistema para os três casos seguintes:

- SPM: Não há perda de massa.
- CPM: Existe perda de massa dos primários em função do tempo e por efeito periastro.
- CPM+GM: Além da perda de massa dos primários, o terceiro corpo captura certa fracção da massa que escapa do sistema.

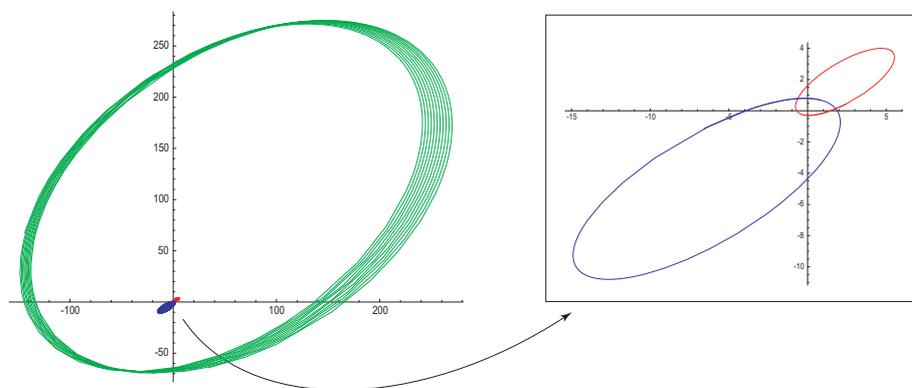


Figura 6.8: Binária externa (esquerda) e detalhe da interna (direita).

Tomaremos os valores iniciais e parâmetros que se amostram na Tabela 6.1. Como se pode observar, a binária interna apresenta uma elevada excentricidade, a qual leva associado um incremento da perda de massa nas proximidades do periastro. A anã castanha move-se numa órbita aproximadamente co-planar sendo a sua distância pericêntrica 6.13 vezes maior

Tabela 6.1: DADOS DAS ÓRBITAS, DOS PARÂMETROS DE PERDA DE MASSA E DOS PARÂMETROS DE ESTRUTURA DO VENTO ESTELAR.

ELEMENTOS ORBITAIS	Interna (WR 140)	Externa (Anã castanha)	PARÂMETROS DE PERDA DE MASSA		PARÂMETROS DO VENTO	
$P$ [anos]	7.937	459.26	$\alpha_1$	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$\chi_1$	0.01
$T$	2001.0962	1988.6606	$\alpha_2$	$2.0 \cdot 10^{-8}$	$\chi_2$	0.1
$e$	0.881	0.6	$n$	1.4	$\xi_1$	0.1
$a$ [UA]	16.3	250	$q$	1.5	$\xi_2$	0.8
$i$ [°]	60	50	$\beta_1$	$10^{-7}$	$\theta_1$	1.1
$\omega$ [°]	46.7	50	$\beta_2$	$10^{-8}$	$\theta_2$	0.2618
$\Omega$ [°]	10	20	$\delta_0$	$10^{-7}$		

que o semieixo da binária interna. O valor do período da órbita externa tem sido calculado a partir do seu semieixo maior e da massa do sistema, daí que se expresse com alguns algarismos decimais. Quanto à época de passagem pelo periastro, é a que corresponde a uma anomalia verdadeira inicial de  $45^\circ$  estando a binária interna no seu periastro. As órbitas correspondentes a ambos os conjuntos de elementos orbitais amostram-se na Figura 6.8.

### 6.5.2 Evolução dos elementos orbitais

A Figura 6.9 mostra a evolução temporal das excentricidades e dos semi-eixos maiores para os três cenários considerados ao longo de 5 000 anos. Ao cabo desse tempo a binária interna perdeu  $0.2941 M_\odot$ , enquanto a estrela distante ganhou  $0.0069 M_\odot$ .

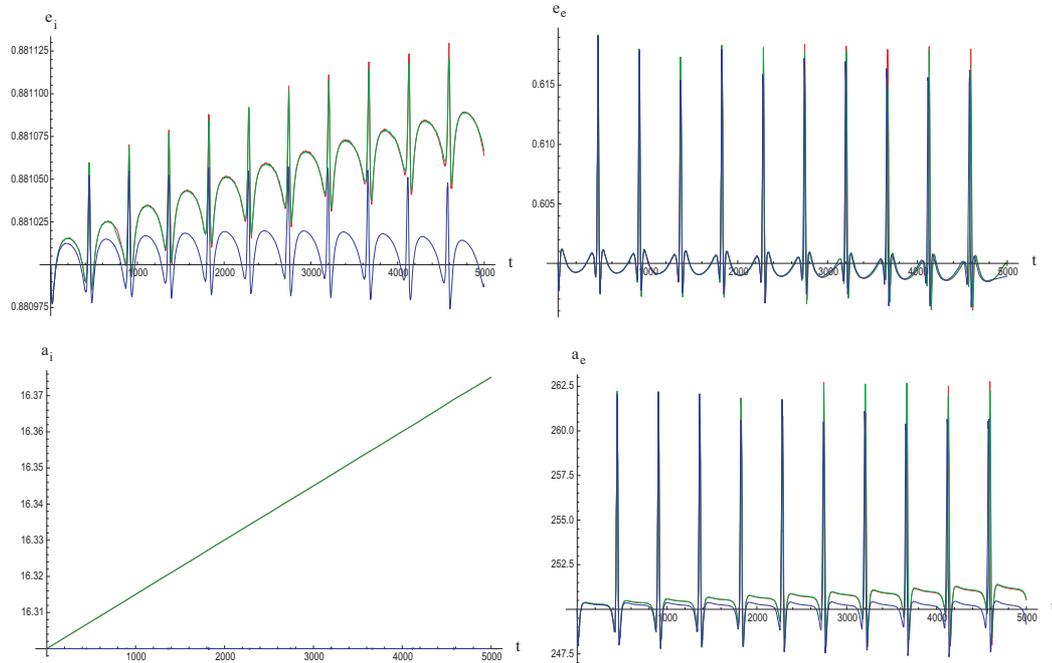


Figura 6.9: Evolução temporal das excentricidades e semieixos maiores de ambas órbitas. A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde CPM e a vermelha CPM+GM.

Observa-se que as perturbações produzidas pela perda de massa ocasionam aumentos seculares dos elementos, sobretudo dos da órbita interna e do semieixo maior da externa. A evolução temporal das inclinações mostra-se na Figura 6.10.

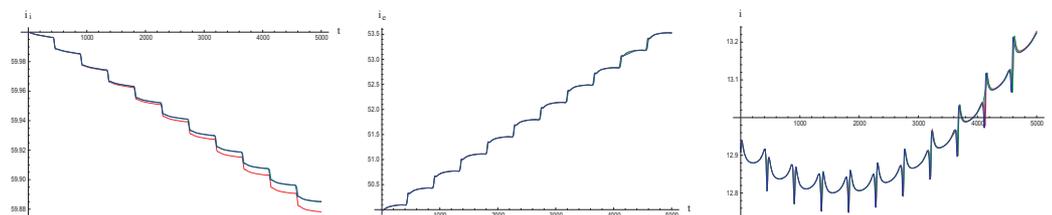


Figura 6.10: Evolução temporal das inclinações: interna (esquerda), externa (centro) e mútua (direita). A linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde CPM e a vermelha CPM+GM.

### 6.5.3 Análise da estabilidade

Para a análise orbital deste sistema utilizaremos os métodos descritos no Capítulo 5. Assim, tal e como se deduz da Figura 6.11, apesar das altas excentricidade de ambas as órbitas o sistema pode considerar-se inicialmente estável.

Os valores dos parâmetros que caracterizam a estabilidade do sistema segundo os critérios descritos em § 5.5 listam-se na Tabela 6.2 para os instantes inicial  $t_i = 0$  e final  $t_f = 20\,000$  anos em cada um dos cenários considerados.

Aplicando o critério descrito em § 5.7.2 para determinar a tendência da estabilidade verifica-se que, apesar da esperada redução dos intervalos devida à variação da massa do sistema, a estabilidade global do sistema tende a manter-se (ver Tab. 6.3). Este efeito pode compreender-se melhor observando a Figura 6.12, onde se representa a evolução do mapa de estabilidade segundo o critério de Harrington para dois instantes de tempo separados 20 000 anos no cenário CPM+GM. Observa-se que, embora haja um redução da região de estabilidade, o sistema desloca-se sobre o mapa aumentando o seu parâmetro de estabilidade.

### 6.5.4 Evolução dos factores de forma e da função $\Gamma$

Na parte superior da Figura 6.13 mostra-se a evolução dos factores de forma definidos em § 6.4.1, enquanto o seu produto, denominado função de distribuição de massa  $\Gamma$  se representa na parte inferior.

O ganho de massa da anã castanha está directamente ligado com  $\Gamma$  mediante as relações (6.1) e (6.3), de modo que esta última gráfica representa o ganho de massa da anã castanha ao longo de aproximadamente um período da sua órbita. É precisamente na coincidência entre a sua passagem pelo periastro e as passagens pelo periastro da binária interna

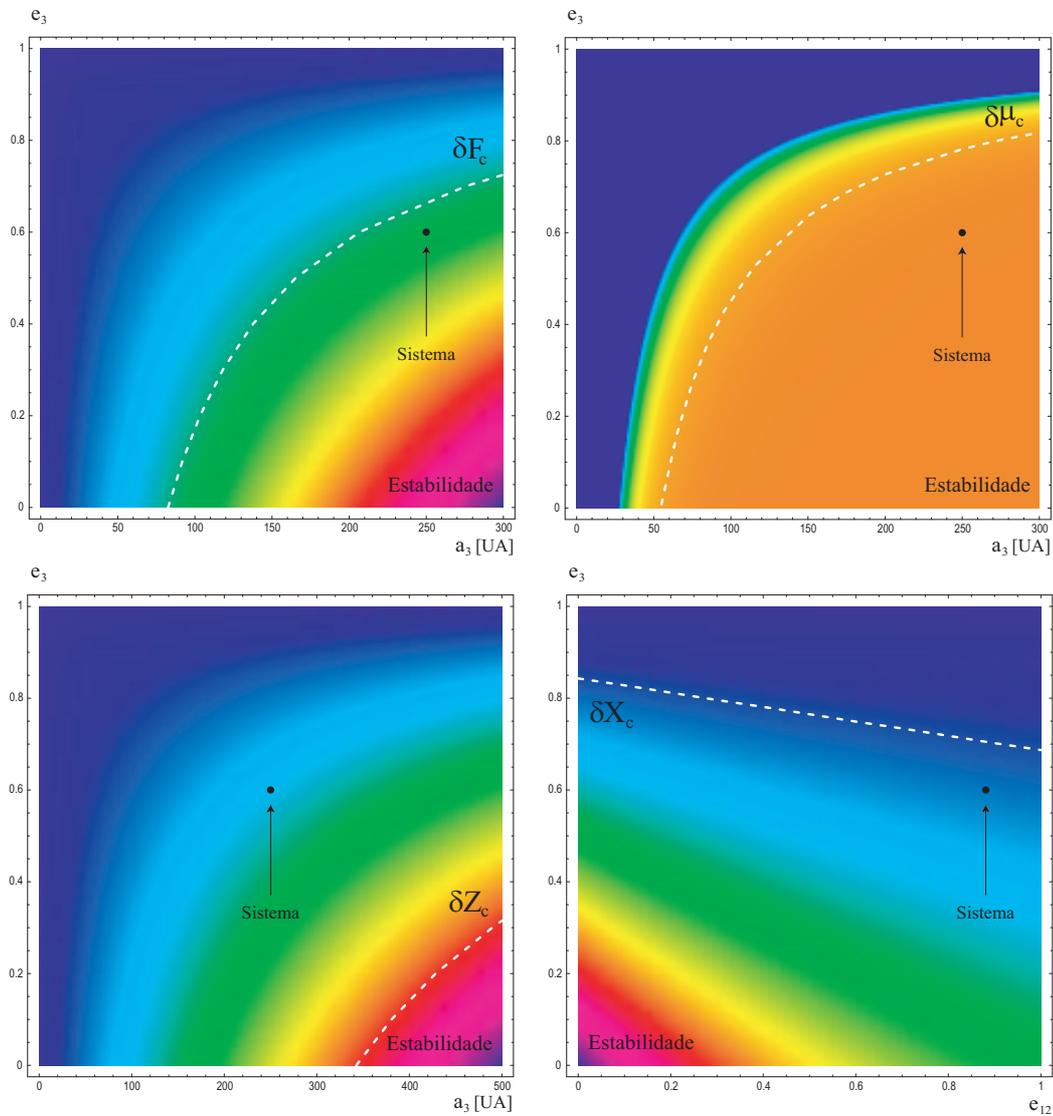


Figura 6.11: Mapas de estabilidade em função da excentricidade e do semieixo maior da órbita externa segundo os critérios de Harrington ( $\delta F$ ), Graziani–Black ( $\delta \mu$ ) e Aarseth–Mardling ( $\delta Z$ ), e em função das excentricidades das duas órbitas segundo o critério de Eggleton–Kiseleva ( $\delta X$ ) para o sistema protótipo. A linha branca descontínua marca a fronteira entre a região de estabilidade e a de indizibilidade, enquanto as cores indicam o gradiente, de maneira que nas regiões onde a cor é uniforme a variação do valor do intervalo de estabilidade é mais lenta que em aquelas outras onde as cores variam rapidamente.

Tabela 6.2: VALORES DOS PARÂMETROS DE ESTABILIDADE, DO SEU VALOR CRÍTICO E DOS INTERVALOS DE ESTABILIDADE PARA OS CRITÉRIOS DE HARRINGTON ( $F$ ), GRAZIANI-BLACK ( $\mu$ ), EGGLETON-KISELEVA ( $X$ ) E AARSETH-MARDLING ( $Z$ ) PARA O SISTEMA COM  $t_i = 0$  E  $t_f = 20\,000$  ANOS.

$p$	$t_i$	$t_f$	$p_c$	$t_i$	$t_f$	$\delta_p$	$t_i$	$t_f$
SPM								
$F$	6.135	6.231	$F_c$	5.070	5.070	$\delta_F$	+0.210	+0.229
$\mu$	0.186	0.186	$\mu_c$	1.638	1.727	$\delta_\mu$	+0.887	+0.892
$X$	60.066	60.055	$X_c$	37.960	37.094	$\delta_X$	+0.582	+0.619
$Z$	6.135	6.231	$Z_c$	25.158	24.809	$\delta_Z$	-0.756	-0.749
CPM								
$F$	6.135	6.208	$F_c$	5.070	5.070	$\delta_F$	+0.210	+0.224
$\mu$	0.186	0.190	$\mu_c$	1.638	1.709	$\delta_\mu$	+0.887	+0.889
$X$	60.034	59.692	$X_c$	37.960	37.250	$\delta_X$	+0.582	+0.602
$Z$	6.135	6.208	$Z_c$	25.158	24.958	$\delta_Z$	-0.756	-0.751
CPM+GM								
$F$	6.135	6.216	$F_c$	5.070	5.070	$\delta_F$	+0.210	+0.226
$\mu$	0.186	0.190	$\mu_c$	1.638	1.717	$\delta_\mu$	+0.887	+0.889
$X$	60.034	59.720	$X_c$	37.960	38.257	$\delta_X$	+0.582	+0.561
$Z$	6.135	6.216	$Z_c$	25.158	24.961	$\delta_Z$	-0.756	-0.751

que a função  $\Gamma$  toma os seus valores máximos, tal e como se destaca na Figura 6.13.

Tabela 6.3: TENDÊNCIA DA ESTABILIDADE PARA OS TRÊS SISTEMAS CONSIDERADOS.

Estabilidade	SPM				CPM				CPM+GM			
	F	$\mu$	X	Z	F	$\mu$	X	Z	F	$\mu$	X	Z
	+	=	+	=	+	=	=	=	+	=	=	=

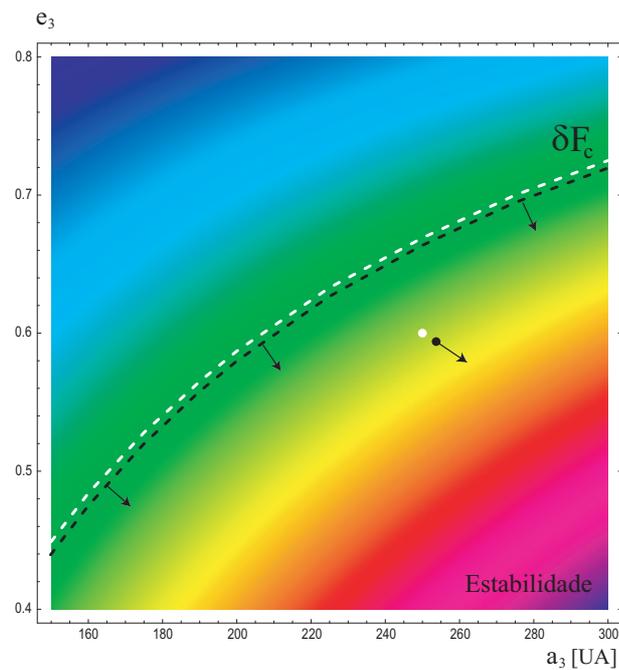


Figura 6.12: Detalhe da evolução do mapa de estabilidade para o critério de Harrington no entorno do ponto que ocupa o sistema no cenário de CPM+GM em dois instantes de tempo separados 20 000 anos. A linha descontinua e o ponto branco representam o valor crítico que define a região de estabilidade e a posição do sistema no instante inicial, respectivamente, enquanto os pretos correspondem ao instante final.

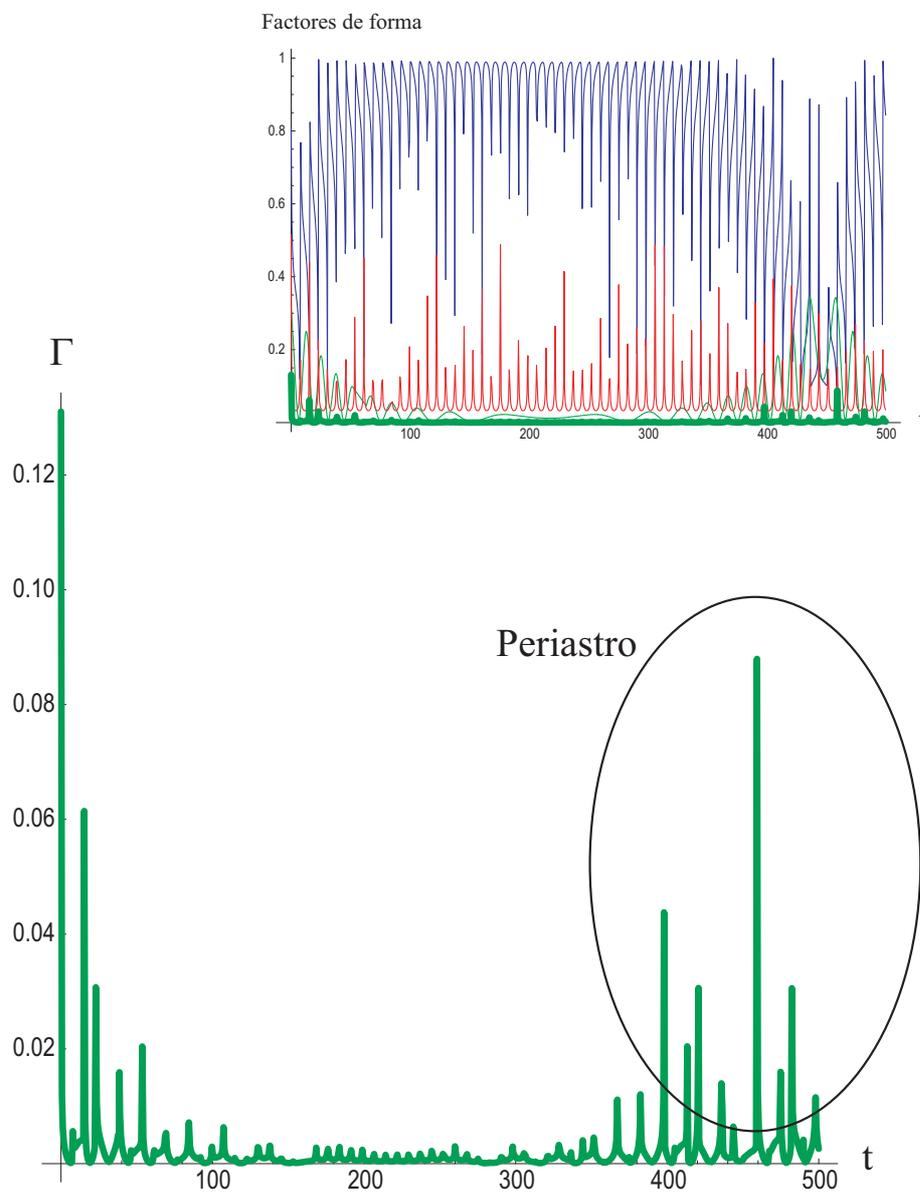


Figura 6.13: Evolução dos factores de forma,  $\Phi$  (azul),  $\Xi$  (verde claro),  $\Theta$  (vermelho) e do seu produto  $\Gamma$  (verde intenso), na parte superior. Na parte inferior representa-se exclusivamente a função  $\Gamma$ . O período de integração é de 500 anos.

# Capítulo 7

## Sumário, conclusões e linhas de continuação

*“Now, my suspicion is that the universe is not only queerer than we suppose, but queerer than we can suppose.” \**

JOHN HALDANE (1892–1964)

Este capítulo recolhe os principais resultados obtidos nas investigações desenvolvidas nesta tese, dedicada fundamentalmente ao problema mecânico–celeste de massa variável —ou, equivalentemente, parâmetro gravitacional variável— e às suas repercussões em sistemas astrofísicos. Estes podem-se resumir em:

- ◇ Novos contributos em aspectos conceptuais e metodológicos.
- ◇ Desenvolvimento de um método canónico de perturbações.

---

\* “Agora, a minha suspeita é que o Universo não é apenas mais estranho do que supomos; ele é mais estranho do que somos capazes de supor.” *Possible Worlds*, 1928.

- ◇ Aplicação da teoria a sistemas estelares e planetários reais sujeitos a diversas perturbações.

Aliás, na última secção sugerem-se ulteriores análises continuando algumas das linhas estudadas e apontando outras novas.

## 7.1 Sumário

### 7.1.1 Síntese

#### **Duas faces de um mesmo fenómeno**

O parâmetro fundamental que caracteriza uma estrela é a sua massa. Conhecendo-a com a suficiente precisão é possível determinar qual será a sua evolução e obter os valores de algumas das suas propriedades astrofísicas. Por outro lado, se a estrela está associada gravitacionalmente a outros corpos celestes, também a massa desempenha um papel decisivo na evolução dinâmica do sistema<sup>1</sup>.

Quando se considera a sua variação em sistemas estelares binários ou múltiplos —nomeadamente a sua perda por escape fora do sistema— aparecem certas interacções entre as propriedades astrofísicas das componentes do sistema e a evolução dos elementos orbitais que conduzem a configurações finais muito diferentes às que se alcançariam no caso de massas estacionárias. Portanto, resultará essencial conhecer os detalhes deste fenómeno a fim de poder realizar predições precisas sobre a evolução estelar e orbital destes sistemas.

Desde os trabalhos pioneiros de Gylden e Meščerskij na resolução das equações do movimento do problema de dois corpos de massa variável dependente do tempo e dos de Eddington e Jeans sobre os processos físicos

---

<sup>1</sup>De facto, os sistemas binários são a principal ferramenta para o cálculo de massas estelares.

que acontecem nos interiores estelares e a sua relação com a perda de massa, a incomunicação entre estas duas vias de investigação tem sido notável. Embora sendo o alvo principal desta tese a resolução analítica — ou numérica, quando isto não for possível— do problema matemático de massa variável (problema de Gylden–Meščerskij) em cenários em que se têm acrescentado certas perturbações —efeito periastro, achatamento polar de alguma das componentes e efeitos relativistas—, o fio condutor através dos diferentes capítulos tem sido a aplicação da teoria considerando as propriedades astrofísicas, tais como os ritmos de perda de massa, o mais aproximadas à realidade possível.

Neste contexto uma das contribuições feitas nesta tese (ver § 1.5.1) em que ambas as abordagens se unificam é, à vista de resultados recentes sobre a evolução estelar e a perda de massa, a da reinterpretação da lei de Jeans

$$\dot{m} = -\alpha m^n,$$

onde  $m$  é a massa da estrela,  $\alpha$  um pequeno parâmetro positivo e  $1.4 < n < 4.4$  (segundo Jeans).

Assim, tendo em conta a relação de massa–luminosidade, forneceram-se valores do expoente  $n$  adequados a diferentes tipos de estrelas e diferentes aos dados por Jeans, sobretudo para estrelas com baixa massa. Aliás, obteve-se uma nova relação entre o ritmo de perda de massa  $\gamma$ , em unidades de  $M_{\odot}$  por ano, e o parâmetro  $\alpha$  da lei de Jeans (ver Fig. 7.1) dada por:

$$\log \alpha = a + b \log \gamma + c \log^2 \gamma + d \log^3 \gamma,$$

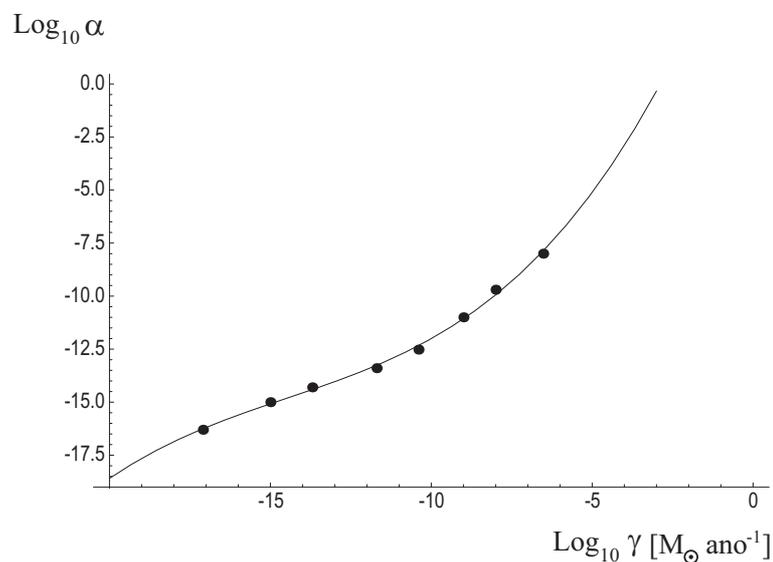


Figura 7.1: Relação entre  $\gamma$  e  $\alpha$ .

sendo

$$\begin{cases} a = 9.86, \\ b = 4.09, \\ c = 0.247, \\ d = 0.00569. \end{cases}$$

### Principais perturbações consideradas

Tomando como ponto de partida o problema de Gyldén–Meščerskij considerou-se a sua integração quando submetido a diferentes perturbações. Os cenários perturbados resultantes foram abordados utilizando a formulação hamiltoniana a fim de, posteriormente, aplicar um método canónico de perturbações.

Em primeiro lugar analisou-se de modo completo o denominado **efeito periastro**, um fenómeno que, embora sugerido como explicação aos au-

mentos da excentricidade observados em sistemas binários (Martin 1964; Edwards e Pringle 1987; Valls-Gabaud 1988; Soker 2000), nunca antes tinha sido formalizado matematicamente. Basicamente, consiste num aumento da perda de massa por interacção gravitacional nas proximidades do periastro. Para quantificar tal perda de massa sugerimos uma lei relativamente simples de perda de massa dada por

$$\dot{m}_{EP}(r; p_\theta) = -\beta \frac{p_\theta}{r^2},$$

onde  $r$  é a distância entre ambas as componentes,  $p_\theta$  o momento angular do sistema e  $\beta$  um pequeno parâmetro próximo a zero.

Demonstrou-se (Andrade e Docobo 2003b), integrando numericamente as equações do movimento em variáveis polares–nodais, que esta lei produz variações seculares nos elementos orbitais. Talvez a mais notável destas variações seculares seja a que se produz na excentricidade pela sua influência directa na estabilidade orbital do sistema.

Aplicando o esquema perturbativo de Hadjidemetriou a leis de perda de massa dependentes do tempo e da distância obtiveram-se variações seculares para o semieixo maior e a excentricidade, permanecendo o argumento do periastro com variações não seculares, como acontece no problema de Gylden–Meščerskij sem perturbar. Por outro lado, também se obtiveram variações seculares para estes mesmos elementos considerando uma perturbação externa, dependente da anomalia verdadeira, similar à produzida por efeito periastro. Neste caso, após uma transformação canónica, formulou-se o problema em variáveis de Delaunay como passo prévio à integração das equações de Lagrange dos elementos orbitais.

Outro dos cenários perturbados que se analisaram é o que surge de considerar que alguma das componentes do sistema binário não é totalmente esférica, senão que apresenta certo achatamento polar<sup>2</sup>. Esta **componente elipsoidal** origina certas perturbações que se sobrepõem as produzidas

<sup>2</sup>Esta configuração também é válida para aproximar o problema em que uma das componentes apresenta um disco de acreção.

pela perda de massa dependente do tempo dando lugar a novas variações dos elementos orbitais. Como é usual, o potencial gravitacional correspondente obteve-se a partir do desenvolvimento em harmônicos esféricos considerando simetria equatorial e restringindo-nos ao problema zonal com  $J_2$ .

No último dos cenários estudou-se o problema de Gylden–Meščerskij tendo em conta **efeitos relativistas**. Obtiveram-se assim variações periódicas de certos elementos orbitais e o famoso avanço do periastro (observado pela primeira vez em Mercúrio). Como passo prévio à formulação hamiltoniana obteve-se a lagrangiana do movimento para duas massas em primeira aproximação pós-newtoniana.

Todos estes cenários perturbados foram integrados analiticamente utilizando o método canónico de perturbações que se construiu no Capítulo 3, excepto o correspondente ao efeito periastro, já que, infelizmente, neste caso não são aplicáveis os métodos canónicos de perturbações baseados em transformações de Lie.

### **Construção de um método canónico de perturbações $N$ -paramétrico**

Os métodos canónicos de perturbações baseados em transformações de Lie, desenvolvidos na segunda metade do século passado (Hori 1966; Deprit 1969), utilizam uma família de difeomorfismos dependente de um pequeno parâmetro. As teorias de perturbações baseadas nesta técnica permitem obter soluções aproximadas de sistemas de equações diferenciais não lineares que podem ser tomados como uma perturbação de um sistema integrável.

Em anos posteriores realizaram-se algumas extensões do método original<sup>3</sup> uniparamétrico a dois (Ribera 1981; Abad e Ribera 1984; Varadi 1985) e três parâmetros (Ahmed 1993; Andrade 2002, 2003). No entanto, a fim de integrar sistemas hamiltonianos submetidos a diversas perturbações,

---

<sup>3</sup>Pode-se demonstrar que as formulações de Hori e Deprit são equivalentes (Campbell e Jefferys 1970; Henrard e Roels 1974).

com um número arbitrário de pequenos parâmetros, um dos alvos desta investigação foi a obtenção de um método canônico de perturbações  $N$ -paramétrico, o qual constitui uma generalização completa a um número arbitrário de parâmetros do método de Hori–Deprit.

### Integração do problema de Gyldén–Meščerskij em cenários perturbados

O problema de Gyldén–Meščerskij considerando as perturbações descritas anteriormente foi integrado analítica e numericamente. A integração numérica foi levada a cabo mediante um método de Runge–Kutta de passo variável de oitava ordem (RK8), mostrando que estas perturbações produzem variações dos elementos orbitais, tanto periódicas como seculares, que se sobrepõem as já conhecidas variações periódicas induzidas pela perda de massa dependente do tempo.

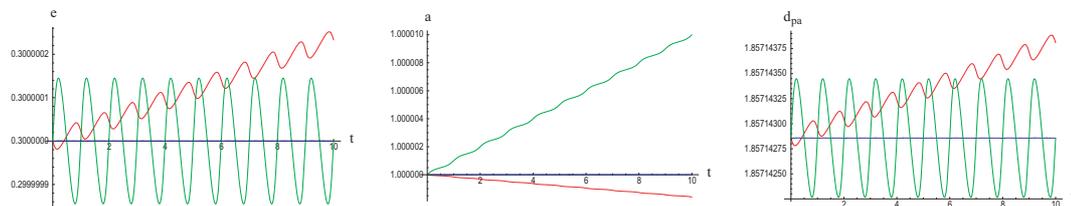


Figura 7.2: De esquerda a direita: variações na excentricidade, no semieixo maior e na relação entre a distância pericêntrica e apocêntrica para um valor inicial da excentricidade de 0.3. Representam-se o problema de Kepler (azul), o problema de Gyldén–Meščerskij (verde) e o efeito periastro (vermelho).

Para a resolução do cenário em que se considera o **efeito periastro** realizou-se a formulação das equações do movimento no conjunto de variáveis polares–nodais. Ao não ser aplicável o método canônico de perturbações, devido à dependência da hamiltoniana com o argumento da latitude, realizou-se uma integração numérica da qual se expõem-se alguns dos resultados obtidos (ver Fig. 7.2):

- Dada a dependência explícita das equações do movimento com a variável  $\theta$ , o momento angular do sistema  $p_\theta$  não é uma constante do

movimento, o que supõe uma das diferenças mais importantes com o problema de Gyldén–Meščerskij sem efeito periastro.

- A excentricidade deixa de oscilar periodicamente e passa a aumentar secularmente, sendo o seu crescimento por unidade de tempo maior quanto maior é a excentricidade inicial.
- No caso do semieixo maior o comportamento é ao invés que no problema de Gyldén–Meščerskij sem efeito periastro, isto é, diminui secularmente.
- Como consequência das evoluções da excentricidade e do semieixo maior, a relação entre a distância apocêntrica e pericêntrica apresenta também uma tendência a aumentar secularmente.

É notável o fenómeno de diminuição secular do semieixo maior já que, dependendo da grandeza do efeito periastro, pode chegar a contra-arrestar o aumento secular provocado pela perda de massa em função do tempo. Será o valor relativo entre  $\alpha$  e  $\beta$  o que decida qual dos dois fenómenos é o dominante.

A integração do problema de Gyldén–Meščerskij com uma componente elipsoidal e tendo em conta efeitos relativistas realizou-se analiticamente. A hamiltoniana do problema expressou-se, à primeira ordem, em série dos quatro pequenos parâmetros que dão conta de cada uma das perturbações:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \alpha_1 \mathcal{H}_{1000} + \alpha_2 \mathcal{H}_{0100} + J_2 \mathcal{H}_{0010} + \frac{1}{c^2} \mathcal{H}_{0001},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= -\frac{\mu_0^2}{2L^2}, \\ \mathcal{H}_{1000} &= \frac{\mu_{10}^{n_1}\mu_0}{L^2}(t-t_0) - \frac{\mu_{10}^{n_1}}{\mu_0}Le\sin E, \\ \mathcal{H}_{0100} &= \frac{\mu_{20}^{n_2}\mu_0}{L^2}(t-t_0) - \frac{\mu_{20}^{n_2}}{\mu_0}Le\sin E, \\ \mathcal{H}_{0010} &= \frac{\mu_0^4 R^2}{4G^6}(1+e\cos f)^3 \left[ 1 - 3\frac{H^2}{G^2} - 3\left(1 - \frac{H^2}{G^2}\right)\cos 2(f+g) \right], \\ \mathcal{H}_{0001} &= -\frac{\mu_0^4}{L^4} \left[ \sigma_0 + \left[ -\sigma' + \sigma_3 \left( \frac{L^2}{G^2} - 1 \right) \sin^2 f \right] \frac{L^2}{G^2} (1+e\cos f) \right. \\ &\quad \left. + \sigma'' \frac{L^4}{G^4} (1+e\cos f)^2 \right], \end{aligned}$$

com  $\mu_0 = \mu_{10} + \mu_{20}$ .

Após a aplicação a esta hamiltoniana do método canônico de perturbações na sua versão 4-paramétrica obtiveram-se as variações em função do tempo para o período, a excentricidade, o semieixo maior, a inclinação, o argumento do periastro e o ângulo do nodo. O seu comportamento foi o seguinte:

1. A excentricidade e a inclinação apresentam variações periódicas em todos os cenários.
2. A perda de massa dependente do tempo provoca o incremento secular do semieixo maior e do período.
3. O argumento do periastro avança sempre que a inclinação é menor que o seu valor crítico, enquanto por cima deste valor depende de qual é o efeito dominante: o achatamento da primária ou os efeitos relativistas.

4. O ângulo do nodo retrograda sempre que se considera a forma elipsoidal da primária e a inclinação é diferente de  $90^\circ$  para o movimento directo, produzindo-se a situação inversa se o movimento é retrógrado.

Para o caso com parâmetros reais que se integrou com este método canónico obtiveram-se as variações seculares que se mostram na Tabela 7.1, onde também se indica o fenómeno que as produz.

Tabela 7.1: VARIAÇÕES SEculares DOS ELEMENTOS ORBITAIS E OS FENÓMENOS QUE AS PRODUZEM.

VALORES AO CABO DE 100 ANOS	FENÓMENO
$\Delta a$ $+1.90 \cdot 10^{-2}$ UA	Perda de massa
$\Delta \omega$ $+7^\circ.63$ (95%)	Componente elipsoidal
$+0^\circ.40$ (5%)	Efeitos relativistas
$\Delta \Omega$ $-9^\circ.22$	Componente elipsoidal

Na Figura 7.3 mostra-se a evolução em função do tempo dos elementos orbitais.

A bondade do método canónico foi satisfatoriamente testada com exemplos bem conhecidos da teoria do satélite artificial e da teoria da relatividade. Comprovou-se que o tempo de integração do computador cresce a medida que a excentricidade aumenta, assim como quando a inclinação toma o seu valor crítico —se se considera a forma elipsoidal da primária.

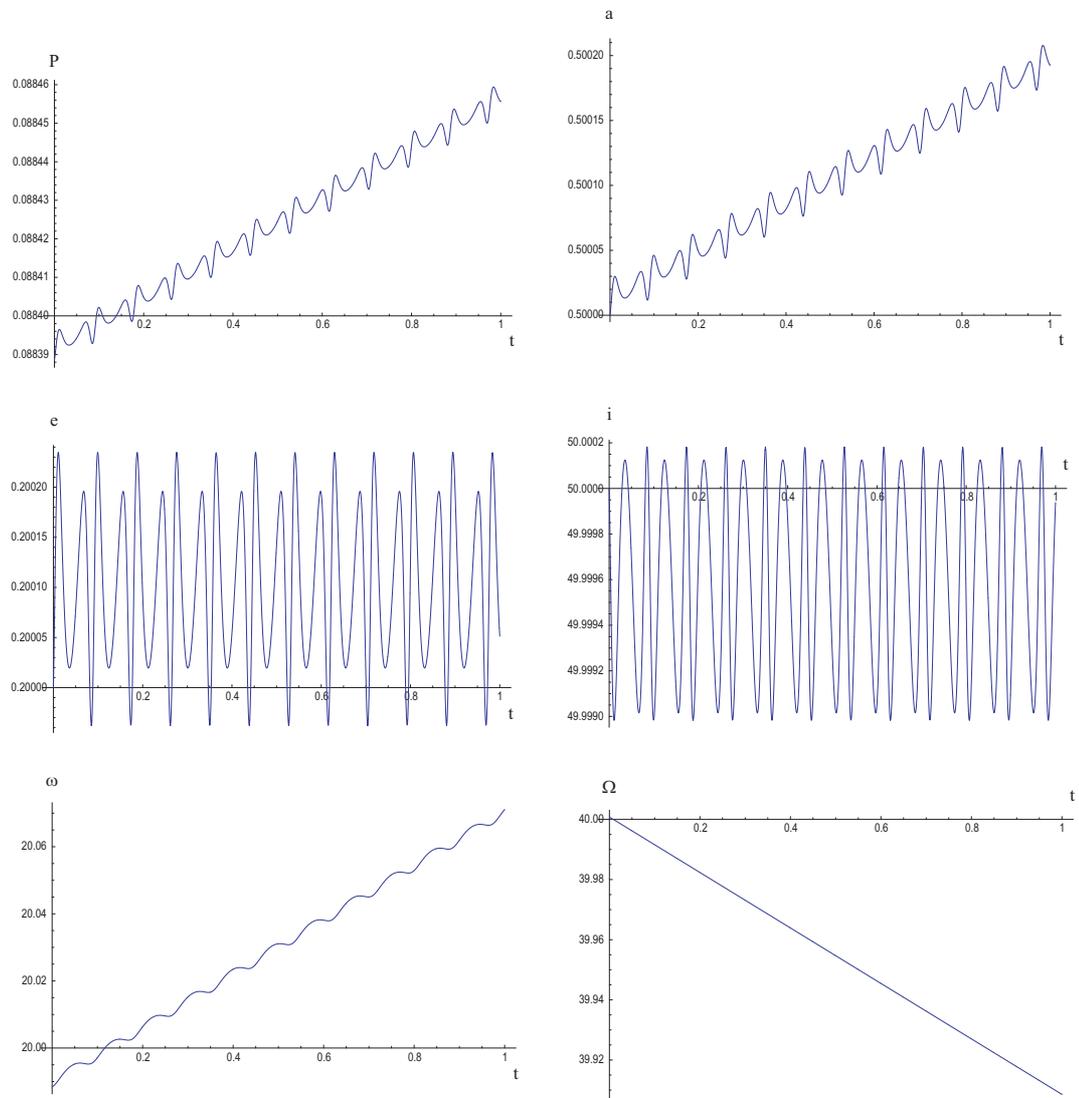


Figura 7.3: Variações dos elementos orbitais para o sistema submetido ao conjunto completo de perturbações (intervalo de 1 ano).

### **Análise da estabilidade em sistemas triplos hierarquizados com massa variável**

Os conhecidos critérios de estabilidade para sistemas triplos hierarquizados definidos por Harrington (1972), Graziani e Black (1981), Eggleton e Kiseleva (1995), Aarseth e Mardling (1999), foram aplicados pela primeira

vez ao problema de Gylden–Meščerskij com e sem efeito periastro. A formulação do problema realizou-se utilizando variáveis de Jacobi. A fim de visualizar as regiões de estabilidade construíram-se mapas de estabilidade em função da excentricidade e do semieixo maior da órbita externa (ou da excentricidade da órbita interna para o critério de Eggleton–Kiseleva) em que se representa o seu limite e a posição do sistema.

Após aplicar estas ferramentas a dois sistemas planetários, em órbitas tipo P ( $\gamma$  Cephei) e tipo S (exemplo hipotético baseado no anterior), e a um sistema estelar triplo (BU 1099 AB, cuja binária interna é BAG 10 Aa) observaram-se os seguintes comportamentos:

- Em geral, os intervalos de estabilidade diminuem em cenários com perda de massa dependente do tempo (MDT) e perda de massa dependente do tempo mais efeito periastro (MDT+EP).
- Em sistemas planetários o efeito periastro influi, sobretudo, na excentricidade e semieixo maior da órbita interna para as órbitas tipo P, e na excentricidade e semieixo maior da órbita externa para as órbitas tipo S.
- Em sistemas estelares triplos em configurações tais que o mecanismo de Kozai é importante produz-se um reforço do efeito periastro que conduz a notáveis incrementos do semieixo maior da órbita interna (ver Fig. 7.4).

A órbita visual da binária BAG 10 Aa (ver Fig. 7.4), a primeira astrométrica *speckle*, foi calculada (Docobo e Andrade 2006b) graças a uma nova metodologia recentemente apresentada com a que se podem obter todos os elementos orbitais, massas e classes espectrais de um sistema triplo com uma subcomponente espectroscópica (Docobo e Andrade 2006a).

Quanto à evolução dos intervalos de estabilidade observou-se que para todos os critérios se produz uma redução dos intervalos de estabilidade em cenários com perda de massa, excepto para o de Aarseth–Mardling que

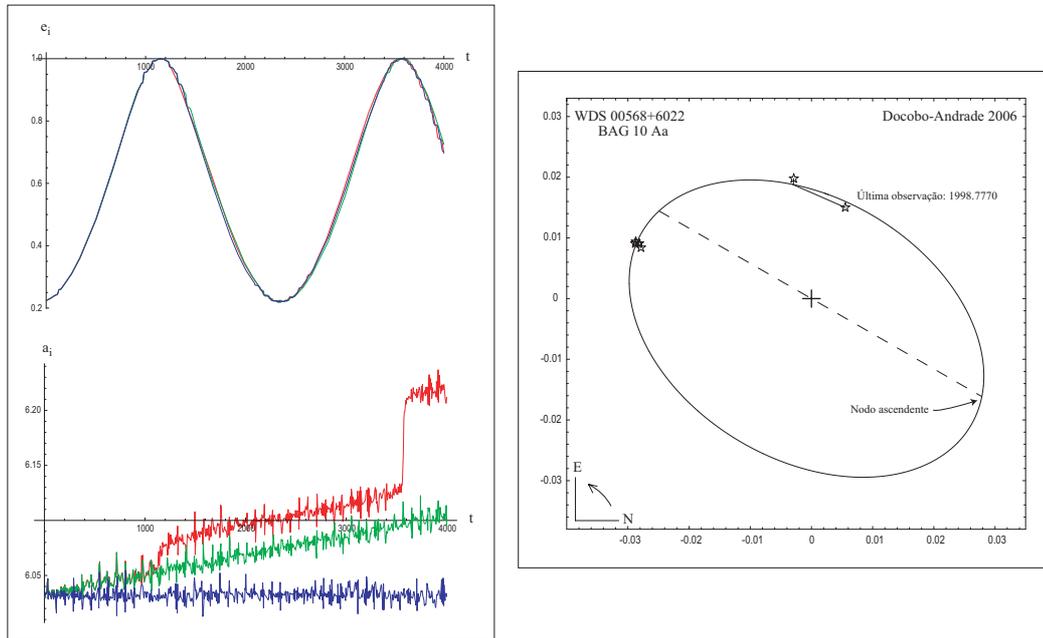


Figura 7.4: Esquerda: Evolução temporal da excentricidade e semieixo maior da órbita interna para BAG 10 Aa (a linha azul corresponde ao cenário SPM, a verde ao de MDT e a vermelha ao de MDT+EP). Direita: Nova órbita visual da binária BAG 10 Aa.

apresenta um ligeiro aumento. Isto prova a maior tendência à instabilidade dos sistemas em que se está a produzir perda de massa dependente do tempo e a aceleração deste processo quando existe efeito periastro.

Na Figura 7.5 mostra-se o mapa de estabilidade inicial segundo o critério de Harrington para o sistema estelar BU 1099 AB.

### Um modelo de distribuição de massa para ventos estelares carregados

Muitos dos casos mais notáveis de estrelas com perda de massa acontecem em sistemas binários com potentes ventos em interação e, frequentemente, órbitas com alta excentricidade.

Tendo em mente um caso protótipo desta classe de sistemas como é a Wolf-Rayet 140, cujas passagens pelo periastro vão acompanhadas de uma

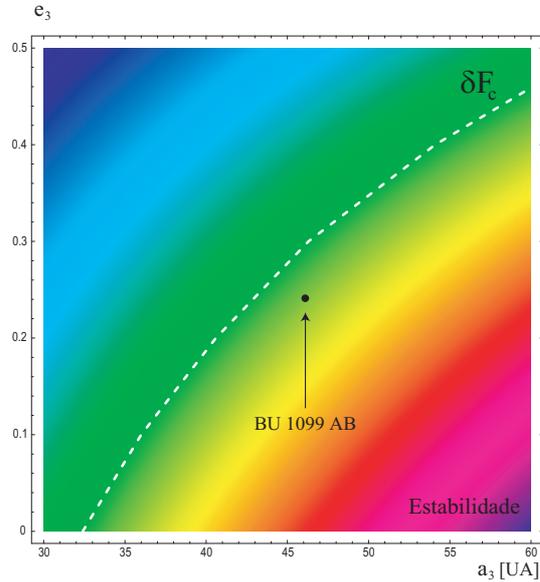


Figura 7.5: Detalhe do mapa de estabilidade para o critério de Harrington no entorno do ponto que ocupa o sistema estelar BU 1099 AB.

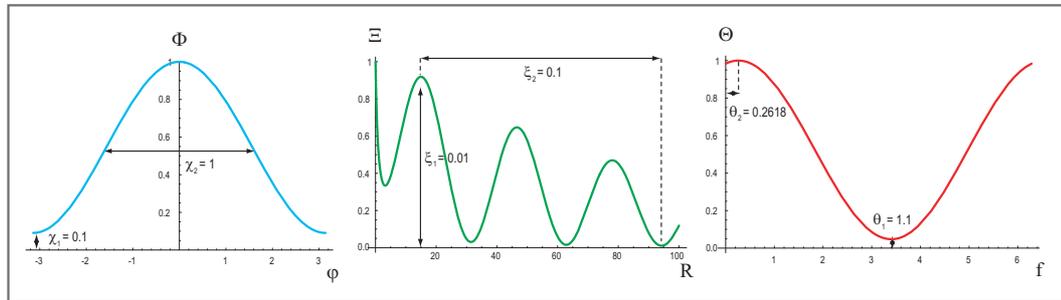


Figura 7.6: Factores de forma  $\Phi(\varphi)$ ,  $\Xi(R)$  e  $\Theta(f)$  para certos valores concretos dos parâmetros do vento (indicados na figura).

potente emissão de radiação e pó, define-se um modelo para a distribuição de massa resultante  $\Gamma$ . Esta expressa-se em função de três factores de forma  $\Phi$ ,  $\Xi$  e  $\Theta$ , dependentes das três variáveis  $(\varphi, R, f)$  e do conjunto de parâmetros  $(\chi_1, \chi_2, \xi_1, \xi_2, \theta_1, \theta_2)$ , cujo significado geométrico se define em § 6.4.1. Nas Figuras 7.6 e 7.7 mostra-se a aparência em duas e três dimensões, respectivamente, destes factores de forma.

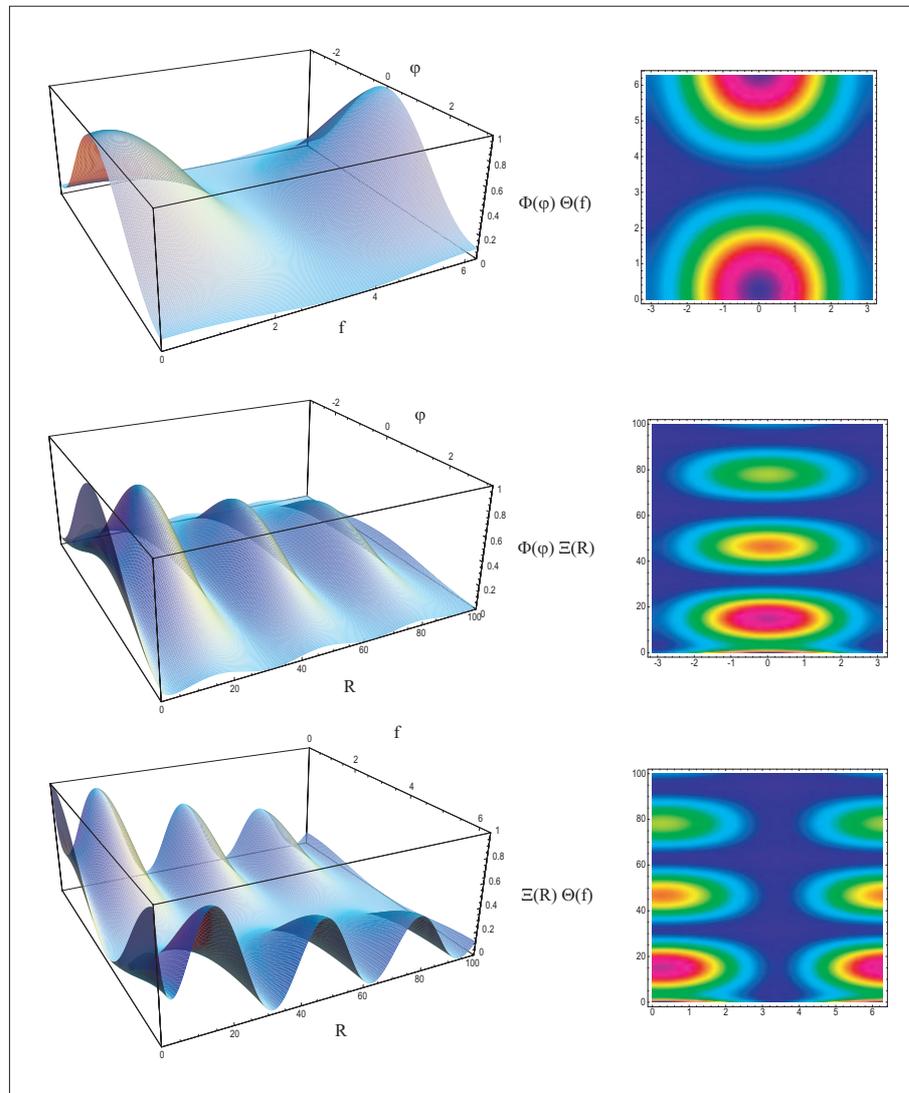


Figura 7.7: Representações tridimensionais e mapas de densidade dos factores de forma da região activa.

Este modelo aplicou-se ao sistema WR 140 supondo a existência de uma anã castanha em órbita tipo P. Considerou-se que parte da massa emitida pela Wolf-Rayet, que estava a escapar do sistema, era capturada pela anã castanha, de modo que se tinha um problema de massa variável com perda de massa de duas das componentes e ganho de massa da terceira componente. Estas variações foram quantificadas considerando

a lei de Jeans para o sistema com perda de massa, enquanto para a terceira componente se considerou uma lei de ganho de massa do tipo

$$\dot{m}_3 = +\delta(\varphi, R, r) \cdot m_3,$$

onde

$$\delta = \delta_0 \cdot \Gamma(\varphi, R, f),$$

sendo  $\delta_0$  um número real positivo que quantifica a intensidade do ganho de massa.

Os casos considerados foram os seguintes:

- SPM: Não há perda de massa.
- CPM: Existe perda de massa dos primários em função do tempo e por efeito periastro.
- CPM+GM: Além da perda de massa dos primários, o terceiro corpo captura certa fracção da massa que escapa do sistema.

A partir da integração do problema e dos valores obtidos para os parâmetros de estabilidade ao longo de 20 000 anos comprovou-se que, tanto no caso em que só existe perda de massa do sistema interno como quando se acrescenta o ganho de massa por parte da terceira componente, o sistema tende a manter a sua estabilidade. Assim, apesar de que se produz uma redução da região de estabilidade, como se pode ver na Figura 7.8, também a posição do sistema no mapa de estabilidade se desloca na mesma direcção, de modo que o sistema continua a estar longe do limite final da região de estabilidade.

A integração do problema permitiu obter a evolução dos factores de forma e da função de distribuição de massa  $\Gamma$  para este sistema (ver Fig. 7.9).

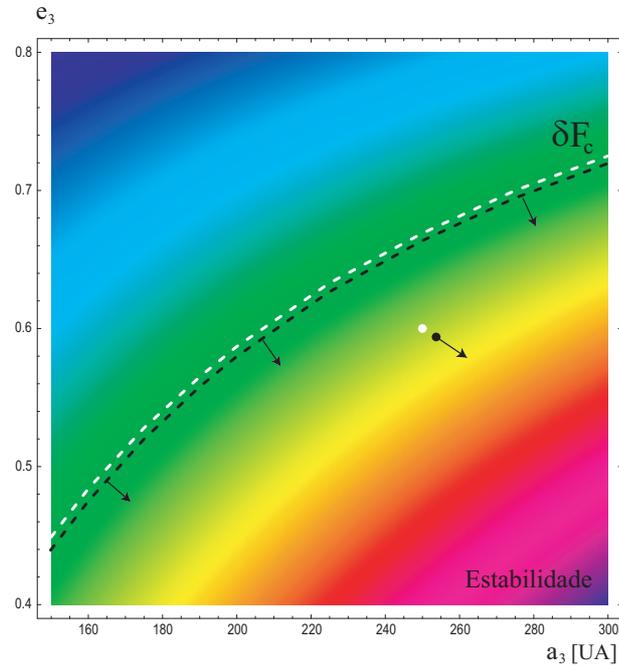


Figura 7.8: Detalhe da evolução do mapa de estabilidade segundo o critério de Harrington no entorno do ponto que ocupa o sistema WR 140 mais anã castanha no cenário CPM+GM em dois instantes de tempo separados 20 000 anos. A linha descontínua e o ponto branco representam o valor crítico que define a região de estabilidade e a posição do sistema no instante inicial, respectivamente, enquanto os pretos correspondem ao instante final.

## 7.2 Conclusões

Na investigação dos diferentes aspectos que envolvem o problema tratado nesta tese, resumida na secção anterior, destacam os seguintes contributos e conclusões:

1. Realizou-se uma extensa exposição historiográfica das aproximações mais destacadas ao problema dinâmico de dois corpos com massa variável. Por outro lado, também se ofereceu uma descrição dos tipos de estrelas em que tal fenómeno resulta especialmente impor-

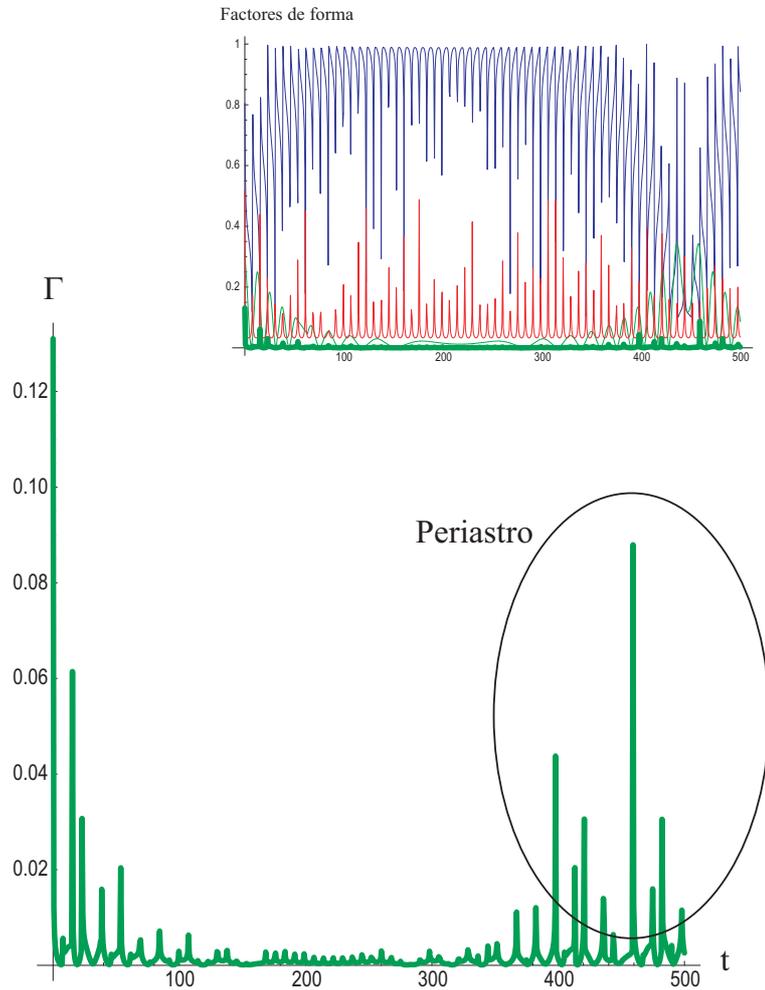


Figura 7.9: Evolução dos factores de forma,  $\Phi$  (azul),  $\Xi$  (verde claro),  $\Theta$  (vermelho) e do seu produto  $\Gamma$  (verde intenso), na parte superior. Na parte inferior representa-se exclusivamente a função  $\Gamma$ . O período de integração é de 500 anos.

tante, tanto na sua evolução orbital quanto na evolução através do diagrama HR.

2. Deu-se uma reinterpretação da lei de Jeans fornecendo novos valores para os parâmetros  $\alpha$  e  $n$  e uma relação entre  $\alpha$  e o ritmo de perda de massa de uma estrela.

3. Foi construído um novo método canônico de perturbações  $N$ -paramétrico baseado em transformações de Lie, o qual supõe uma generalização a um número arbitrário de parâmetros do clássico método de perturbações de Hori–Deprit. Este método canônico resulta especialmente útil no estudo de sistemas perturbados em que existe um amplo número de perturbações sobrepostas ao problema sem perturbar, as quais podem ser formalizadas em forma hamiltoniana mediante um conjunto de pequenos parâmetros.
4. Formulou-se, pela primeira vez de modo rigoroso do ponto de vista matemático, o problema de Gylden–Meščerskij com efeito periastro como um problema de Kepler duplamente perturbado em formulação hamiltoniana. Para a sua descrição postulou-se uma lei generalizada de perda de massa com efeito periastro em função do tempo e da distância mediante três pequenos parâmetros: dois que descrevem a perda de massa dependente do tempo de cada uma das componentes do sistema duplo (mediante a lei de Jeans) e um que representa a perda de massa do sistema por efeito periastro.
5. O mesmo problema, em particular o estudo qualitativo da evolução dos elementos orbitais do sistema, foi abordado utilizando as equações de Gauss da teoria de perturbações e o esquema perturbativo de Hadjidemetriou. Posteriormente realizou-se uma integração numérica mediante um integrador de Runge–Kutta de passo variável de oitava ordem (RK8) para determinar a evolução dos elementos orbitais.
6. Aplicou-se à função hamiltoniana do problema de perda de massa dependente do tempo de uma binária com a primária elipsoidal considerando efeitos relativistas o método canônico de perturbações na sua versão 4-paramétrica. Obteve-se assim a variação dos elementos orbitais para este sistema.
7. Analisou-se a influência da perda de massa dependente do tempo e por efeito periastro na estabilidade de sistemas triplos hierarquiza-

dos (estelares e planetários) mediante a aplicação de quatro critérios de estabilidade a sistemas reais. Para a visualização das regiões de estabilidade definiram-se mapas de estabilidade em função da excentricidade e do semieixo maior da órbita externa.

8. Definiu-se uma função de distribuição de massa  $\Gamma$  em função de três factores de forma para os ventos estelares carregados de massa que se originam em sistemas binários muito activos, tais como os sistemas Wolf-Rayet.
9. A função de distribuição de massa  $\Gamma$  foi usada para modelar o ganho de massa de uma hipotética anã castanha em órbita tipo P em redor do sistema WR 140.
10. Em resumo, os sistemas estelares múltiplos evoluem altamente condicionados pela perturbação que supõe a perda de massa nas suas diversas variantes: perda contínua e isotrópica (representada mediante a lei de Jeans) ou incremento desta por efeito periastro.

### 7.3 Linhas de continuação

O estudo das relações entre a dinâmica orbital de sistemas estelares e planetários múltiplos e a evolução astrofísica dos mesmos é uma linha de pesquisa que seria interessante continuar a explorar. Neste contexto é que se sugerem os seguintes problemas como complementares ao que se têm tratado nesta tese ou como linhas de continuação naturais dos mesmos.

#### Questões metodológicas

- ▷ Aprofundamento na teoria de métodos canónicos de perturbações a fim de integrar sistemas hamiltonianos tais como o que surge do problema de Gylden–Meščerskij com efeito periastro. Especialmente

prometedora parece a linha de investigação em que se considera o tempo como mais uma variável canónica cuja conjugada é a energia.

- ▷ Utilização de funções polilogarítmicas de argumento complexo (Osácar e Palacián 1994; Osácar, Palacián e Palacios 1995) na simplificação das expressões que aparecem na integração desta classe de problemas.

### Aplicações

- ▷ Aproveitando a versatilidade do método canónico de perturbações  $N$ -paramétrico seria factível ir acrescentando sucessivas perturbações que se aproximem a uma solução mais realista do problema 'completo' da dinâmica dos sistemas estelares múltiplos: transferência de massa entre componentes, existência de discos de acreção em redor de uma ou de ambas as componentes, ejeções de massa não isotrópicas, influência de intensos campos electromagnéticos . . .
- ▷ A aproximação pós-newtoniana do problema de perda/ganho de massa poderia ser um modelo válido para o problema de três buracos negros (Valtonen, Mikkola e Pietilä 1995; Pietilä et al. 1995; Valtonen 1996) segundo se considere a perda de energia e de momento angular mediante a emissão de radiação gravitacional ou a captura de massa.
- ▷ A análise estatística dos valores dos elementos orbitais resultantes após integrações realizadas a partir de certo conjunto de valores iniciais, tendo em conta algumas das perturbações descritas nesta tese, poderiam deitar luz sobre as frequências observadas de planetas com uma excentricidade e um semieixo maior dados. Em particular, seria interessante aprofundar na hipotética relação entre a perda de massa e as relativamente altas excentricidades observadas em alguns planetas extra-solares. ■



# Apêndice A

## Código do método canônico de perturbações N-paramétrico

NOTA: Para *Mathematica*®.

### Operador $Y_\varepsilon$

```
Y[p_, n_] := Sum[  
  Times @@ Map[ $\varepsilon_i^{[n]-1}$  &, Range[n]] /  
  Times @@ Map[j[ $n$ ]! &, Range[n]] + If[n == 0, 1, Sequence @@ Map[j[ $n$ ]-1 &, Range[n]]],  
  Evaluate[Sequence @@ Map[{i[ $n$ ], 1, p} &, Range[n]]],  
  Evaluate[Sequence @@ Map[{j[ $n$ ], 0, n-1} &, Range[n]]]
```

## Hamiltoniana $\mathcal{H}$ (original)

```

j[0] := 0;
H[p_, n_] := H0 + Sum[ $\frac{1}{j[p]!}$  Sum[Times @@ Map[ $e_{\#}^{j[\#]-j[\#-1]}$  &, Range[p]]] * HSequence @@ Map[j[\#]-j[\#-1] &, Range[p]],
{p, 1, n}];
Evaluate[Sequence @@ Map[{j[\#], 0, j[\#+1]} &, Reverse[Range[p - 1]]]]
]

```

## Hamiltoniana $\mathcal{H}^*$ (transformada)

```

j[0] := 0;
H*[p_, n_, m_] :=
H0 + Sum[ $\frac{Y[p, s, m]}{s!}$  H0 +
Sum[ $\frac{1}{j[p]!}$  Sum[Times @@ Map[ $e_{\#}^{j[\#]-j[\#-1]}$  &, Range[p]]] * HSequence @@ Map[j[\#]-j[\#-1] &, Range[p]],
{p, 1, n}];
Evaluate[Sequence @@ Map[{j[\#], 0, j[\#+1]} &, Reverse[Range[p - 1]]]]
] + Sum[ $\frac{Y[p, q, m]}{q!}$  * Sum[ $\frac{1}{j[p]!}$  Sum[Times @@ Map[ $e_{\#}^{j[\#]-j[\#-1]}$  &, Range[p]]] * HSequence @@ Map[j[\#]-j[\#-1] &, Range[p]],
{q, 1, n}];
Evaluate[Sequence @@ Map[{j[\#], 0, j[\#+1]} &, Reverse[Range[p - 1]]]]
]

```

## Resto $\mathcal{R}$

```

V[p_, n_] := Sum[ $e_{\#} \sum_{k=0}^n \frac{e_{\#}^k}{k!} W_{k+1, \#}$  &, Range[p]];
R[p_, n_, m_] := Sum[ $\frac{Y[p, k-1, m]}{k!}$  V[p, n] &, Range[p]];

```

## Hamiltoniana $\mathcal{K}$ (nova)

```

j[0] := 0;
K[p_, n_] := K0 + Sum[1/j[p]!, {j, 1, n}] Sum[Times @@ Map[e_i^{j[#]-j[#-1]}, Range[p]] * KSequence @@ Map[{j[#]-j[#-1]}, Range[p]],
  Evaluate[Sequence @@ Map[{j[#], 0, j[#+1]}, Reverse[Range[p-1]]]]
]

```



# Apêndice B

## Resumen y conclusiones (em castelhano)

‡

A continuación se recogen los principales resultados obtenidos en las investigaciones desarrolladas en esta tesis, dedicada fundamentalmente al problema mecánico–celeste de masa variable —o, equivalentemente, parámetro gravitacional variable— y a sus repercusiones en sistemas astrofísicos. Éstos se pueden resumir en:

- Nuevas contribuciones en aspectos conceptuales y metodológicos.
- Desarrollo de un método canónico de perturbaciones.
- Aplicación de la teoría a sistema estelares y planetarios reales sujetos a diversas perturbaciones.

Además, en la última sección se sugieren ulteriores análisis continuando algunas de las líneas estudiadas y apuntando otras nuevas.

---

‡Resumo (em castelhano) não inferior a 3000 palavras de acordo com o artigo 30.3 do Regulamento de Estudos de Terceiro Ciclo da USC.

## Sumario

### Dos caras de un mismo fenómeno

El parámetro fundamental que caracteriza a una estrella es su masa. Conociéndola con la suficiente precisión es posible determinar cuál será su evolución y obtener los valores de algunas de sus propiedades astrofísicas. Por otra parte, si la estrella está asociada gravitatoriamente a otros cuerpos celestes, también la masa desempeña un papel decisivo en la evolución dinámica del sistema<sup>1</sup>.

Cuando se considera su variación en sistemas estelares binarios o múltiples —principalmente su pérdida por escape fuera del sistema— aparecen ciertas interacciones entre las propiedades astrofísicas de las componentes del sistema y la evolución de los elementos orbitales que conducen a configuraciones finales muy diferentes a las que se alcanzarían en el caso de masas estacionarias. Por tanto, será esencial conocer los detalles de este fenómeno con el fin de poder realizar predicciones precisas sobre la evolución estelar y orbital de estos sistemas.

Desde los trabajos pioneros de Gyldén y Meščerskij en la resolución de las ecuaciones del movimiento del problema de dos cuerpos de masa variable dependiente del tiempo y de los de Eddington y Jeans sobre los procesos físicos que tienen lugar en los interiores estelares y su relación con la pérdida de masa, la incomunicación entre estas dos vías de investigación ha sido notable. A pesar de ser el objetivo principal de esta tesis la resolución analítica —o numérica, cuando esto no fuese posible— del problema matemático de masa variable (problema de Gyldén–Meščerskij) en escenarios en los que se han añadido ciertas perturbaciones —‘efecto periastro’, achatamiento polar de alguna de las componentes y efectos relativistas—, el hilo conductor a través de los diferentes capítulos ha sido la aplicación de la teoría considerando las propiedades astrofísicas, tales

---

<sup>1</sup>De hecho, los sistemas binarios son la principal herramienta para el cálculo de masas estelares.

como los ritmos de pérdida de masa, lo más aproximadas a la realidad posible.

En este contexto, una de las contribuciones hechas en esta tesis (ver § 1.5.1) en la cual ambos enfoques se unifican es, a la vista de resultados recientes sobre la evolución estelar y la pérdida de masa, la de la reinterpretación de la ley de Jeans

$$\dot{m} = -\alpha m^n,$$

donde  $m$  es la masa de la estrella,  $\alpha$  un pequeño parámetro positivo y  $1.4 < n < 4.4$  (según Jeans).

Así, teniendo en cuenta la relación de masa–luminosidad, se proporcionaron valores del exponente  $n$  adecuados a diferentes tipos de estrellas y diferentes a los suministrados por Jeans, sobre todo para estrellas con baja masa. Además, se obtuvo una nueva relación entre el ritmo de pérdida de masa  $\gamma$ , en unidades de  $M_{\odot}$  por año, y el parámetro  $\alpha$  de la ley de Jeans (ver Fig. 1) dada por

$$\log \alpha = a + b \log \gamma + c \log^2 \gamma + d \log^3 \gamma,$$

siendo

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 9.86, \\ b = 4.09, \\ c = 0.247, \\ d = 0.00569. \end{array} \right.$$

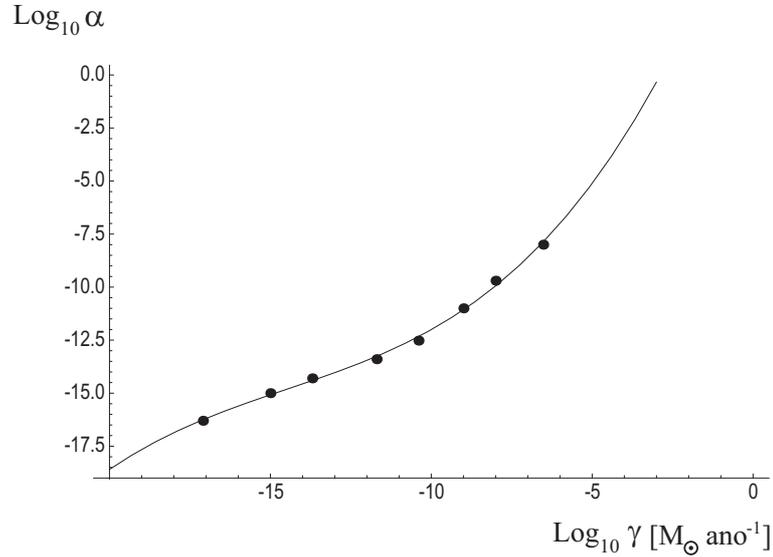


Figura 1: Relación entre  $\gamma$  y  $\alpha$ .

### Principales perturbaciones consideradas

Tomando como punto de partida el problema de Gyldén–Meščerskij se consideró su integración sometido a diferentes perturbaciones. Los escenarios perturbados resultantes fueron abordados utilizando la formulación hamiltoniana con el fin de, posteriormente, aplicar un método canónico de perturbaciones.

En primer lugar se analizó de modo completo el denominado **efecto periastro**, un fenómeno que, no obstante haber sido sugerido como explicación a los aumentos de la excentricidad observados en sistemas binarios (Martin 1964; Edwards y Pringle 1987; Valls-Gabaud 1988; Soker 2000), nunca antes había sido formalizado matemáticamente. Básicamente, consiste en un aumento de la pérdida de masa por interacción gravitatoria en las proximidades del periastro. Para cuantificar tal pérdida de masa sugerimos una ley relativamente simple de pérdida de masa dada por

$$\dot{m}_{EP}(r; p_{\theta}) = -\beta \frac{p_{\theta}}{r^2},$$

donde  $r$  es la distancia entre ambas componentes,  $p_\theta$  el momento angular del sistema y  $\beta$  un pequeño parámetro próximo a cero.

Se demostró (Andrade y Docobo 2003b), integrando numéricamente las ecuaciones del movimiento en variables polares–nodales, que esta ley produce variaciones seculares en los elementos orbitales. Quizá la más notable de estas variaciones seculares sea la que se produce en la excentricidad por su influencia directa en la estabilidad orbital del sistema.

Aplicando el esquema perturbativo de Hadjidemetriou a leyes de pérdida de masa dependientes del tiempo y de la distancia se obtuvieron variaciones seculares para el semieje mayor y la excentricidad, permaneciendo el argumento del periastro con variaciones no seculares, como sucede en el problema de Gyldén–Meščerskij. Por otra parte, también se obtuvieron variaciones seculares para estos mismos elementos considerando una perturbación externa, dependiente de la anomalía verdadera, similar a la producida por efecto periastro. En este caso, después de una transformación canónica, se formuló el problema en variables de Delaunay como paso previo a la integración de las ecuaciones de Lagrange de los elementos orbitales.

Otro de los escenarios perturbados que se analizaron es el que surge de considerar que alguna de las componentes del sistema binario no es totalmente esférica, sino que presenta cierto achatamiento polar<sup>2</sup>. Este **componente elipsoidal** origina ciertas perturbaciones que se superponen a las producidas por la pérdida de masa dependiente del tiempo dando lugar a nuevas variaciones de los elementos orbitales. Como es usual, el potencial gravitatorio correspondiente se obtuvo a partir del desarrollo en armónicos esféricos considerando simetría ecuatorial y restringiéndonos al problema zonal con  $J_2$ .

En el último de los escenarios se estudió el problema de Gyldén–Meščerskij teniendo en cuenta **efectos relativistas**. Se obtuvieron así va-

---

<sup>2</sup>Esta configuración también es válida para aproximar el problema en el cual una de las componentes presenta un disco de acreción.

riaciones periódicas de ciertos elementos orbitales y el famoso avance del periastro (observado por primera vez en Mercurio). Como paso previo a la formulación hamiltoniana se obtuvo la lagrangiana del movimiento para dos masas en primera aproximación post-newtoniana.

Todos estos escenarios perturbados fueron integrados analíticamente utilizando el método canónico de perturbaciones que se construyó en el Capítulo 3, excepto el correspondiente al efecto periastro, ya que, desafortunadamente, en este caso no son aplicables los métodos canónicos de perturbaciones basados en transformaciones de Lie.

### **Construcción de un método canónico de perturbaciones $N$ -paramétrico**

Los métodos canónicos de perturbaciones basados en transformaciones de Lie, desarrollados en la segunda mitad del siglo pasado (Hori 1966; Deprit 1969), utilizan una familia de difeomorfismos dependiente de un pequeño parámetro. Las teorías de perturbaciones basadas en esta técnica permiten obtener soluciones aproximadas de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales que pueden ser tomados como una perturbación de un sistema integrable.

En años posteriores se realizaron algunas extensiones del método original<sup>3</sup> uniparamétrico a dos (Ribera 1981; Abad y Ribera 1984; Varadi 1985) y tres parámetros (Ahmed 1993; Andrade 2002, 2003). Sin embargo, con el fin de integrar sistemas hamiltonianos sometidos a diversas perturbaciones, con un número arbitrario de pequeños parámetros, uno de los objetivos de esta investigación fue la obtención de un método canónico de perturbaciones  $N$ -paramétrico, lo cual constituye una generalización completa a un número arbitrario de parámetros del método de Hori–Deprit.

---

<sup>3</sup>Se puede demostrar que las formulaciones de Hori y Deprit son equivalentes (Campbell y Jefferys 1970; Henrard y Roels 1974).

### **Integración del problema de Gyldén–Meščerskij en escenarios perturbados**

El problema de Gyldén–Meščerskij considerando las perturbaciones descritas anteriormente fue integrado analíticamente y numéricamente. La integración numérica fue llevada a cabo mediante un método de Runge–Kutta de paso variable de orden ocho (RK8), mostrando que estas perturbaciones producen variaciones de los elementos orbitales, tanto periódicas como seculares, que se superponen a las ya conocidas variaciones periódicas inducidas por la pérdida de masa dependiente del tiempo.

Para la resolución del escenario en el cual se considera el **efecto periastro** se realizó la formulación de las ecuaciones del movimiento en el conjunto de variables polares–nodales. Al no ser aplicable el método canónico de perturbaciones, debido a la dependencia de la hamiltoniana con el argumento de la latitud, se realizó una integración numérica de la cual se exponen algunos de los resultados obtenidos (ver Fig. 2):

- Dada la dependencia explícita de las ecuaciones del movimiento con la variable  $\theta$ , el momento angular del sistema  $p_\theta$  no es una constante del movimiento, lo que supone una de las diferencias más importantes con el problema de Gyldén–Meščerskij sin efecto periastro.
- La excentricidad deja de oscilar periódicamente y pasa a aumentar secularmente, siendo su crecimiento por unidad de tiempo mayor cuanto mayor es la excentricidad inicial.
- En el caso del semieje mayor el comportamiento es al revés que en el problema de Gyldén–Meščerskij sin efecto periastro, esto es, disminuye secularmente.
- Como consecuencia de las evoluciones de la excentricidad y del semieje mayor, la relación entre la distancia apocéntrica y pericéntrica presenta también una tendencia a aumentar secularmente.

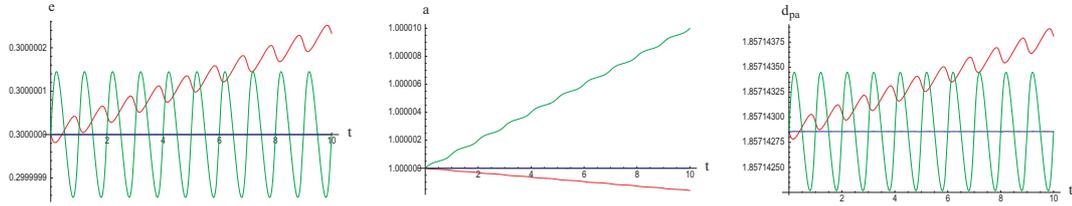


Figura 2: De izquierda a derecha: variaciones en la excentricidad, en el semieje mayor y en la relación entre la distancia pericéntrica y apocéntrica para un valor inicial de la excentricidad de 0.3. Se representan el problema de Kepler (azul), el problema de Gylden–Meščerskij (verde) y el efecto periastro (rojo).

Es notable el fenómeno de disminución secular del semieje mayor ya que, dependiendo de la magnitud del efecto periastro, puede llegar a contrarrestar el aumento secular provocado por la pérdida de masa en función del tiempo. Será el valor relativo entre  $\alpha$  y  $\beta$  el que decida cuál de los dos fenómenos es el dominante.

La integración del problema de Gylden–Meščerskij con una componente elipsoidal y teniendo en cuenta efectos relativistas se realizó analíticamente. La hamiltoniana del problema se expresó, a primer orden, en serie de los cuatro pequeños parámetros que dan cuenta de cada una de las perturbaciones

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \alpha_1 \mathcal{H}_{1000} + \alpha_2 \mathcal{H}_{0100} + J_2 \mathcal{H}_{0010} + \frac{1}{c^2} \mathcal{H}_{0001}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= -\frac{\mu_0^2}{2L^2}, \\ \mathcal{H}_{1000} &= \frac{\mu_{10}^{n_1} \mu_0}{L^2} (t - t_0) - \frac{\mu_{10}^{n_1}}{\mu_0} L e \sin E, \\ \mathcal{H}_{0100} &= \frac{\mu_{20}^{n_2} \mu_0}{L^2} (t - t_0) - \frac{\mu_{20}^{n_2}}{\mu_0} L e \sin E, \\ \mathcal{H}_{0010} &= \frac{\mu_0^4 R^2}{4G^6} (1 + e \cos f)^3 \left[ 1 - 3 \frac{H^2}{G^2} - 3 \left( 1 - \frac{H^2}{G^2} \right) \cos 2(f + g) \right], \\ \mathcal{H}_{0001} &= -\frac{\mu_0^4}{L^4} \left[ \sigma_0 + \left[ -\sigma' + \sigma_3 \left( \frac{L^2}{G^2} - 1 \right) \sin^2 f \right] \frac{L^2}{G^2} (1 + e \cos f) \right. \\ &\quad \left. + \sigma'' \frac{L^4}{G^4} (1 + e \cos f)^2 \right], \end{aligned}$$

con  $\mu_0 = \mu_{10} + \mu_{20}$ .

Después de la aplicación a esta hamiltoniana del método canónico de perturbaciones en su versión 4-paramétrica se obtuvieron las variaciones en función del tiempo para el período, la excentricidad, el semieje mayor, la inclinación, el argumento del periastro y el ángulo del nodo. Su comportamiento fue el siguiente:

- La excentricidad y la inclinación presentan variaciones periódicas en todos los escenarios.
- La pérdida de masa dependiente del tiempo provoca el incremento secular del semieje mayor y del período.
- El argumento del periastro avanza siempre que la inclinación es menor que su valor crítico, mientras que por encima de este valor depende de cual es el efecto dominante: el achatamiento de la primaria o los efectos relativistas.

- El ángulo del nodo retrograda siempre que se considera la forma elipsoidal de la primaria y la inclinación es diferente de  $90^\circ$  para el movimiento directo, dándose la situación inversa si el movimiento es retrógrado.

Para el caso con parámetros reales que se integró con este método canónico se obtuvieron las variaciones seculares que se muestran en la Tabla 1, donde también se indica el fenómeno que las produce.

Tabla 1: VARIACIONES SECULARES DE LOS ELEMENTOS ORBITALES Y LOS FENÓMENOS QUE LAS PRODUCEN.

	VALORES AL CABO DE 100 AÑOS	FENÓMENO
$\Delta a$	$+1.90 \cdot 10^{-2}$ UA	Pérdida de masa
$\Delta \omega$	$+7^\circ.63$ (95%) $+0^\circ.40$ (5%)	Componente elipsoidal Efectos relativistas
$\Delta \Omega$	$-9^\circ.22$	Componente elipsoidal

En la Figura 3 se muestra la evolución en función del tiempo de los elementos orbitales.

La bondad del método canónico fue satisfactoriamente testada con ejemplos bien conocidos de la teoría del satélite artificial y de la teoría de la relatividad. Se comprobó que el tiempo de integración del ordenador crece a medida que la excentricidad aumenta, así como cuando la inclinación toma su valor crítico —si se considera la forma elipsoidal de la primaria.

### **Análisis de estabilidad en sistemas triples jerarquizados con masa variable**

Los conocidos criterios de estabilidad para sistemas triples jerarquizados definidos por Harrington (1972), Graziani y Black (1981), Eggleton y Kise-

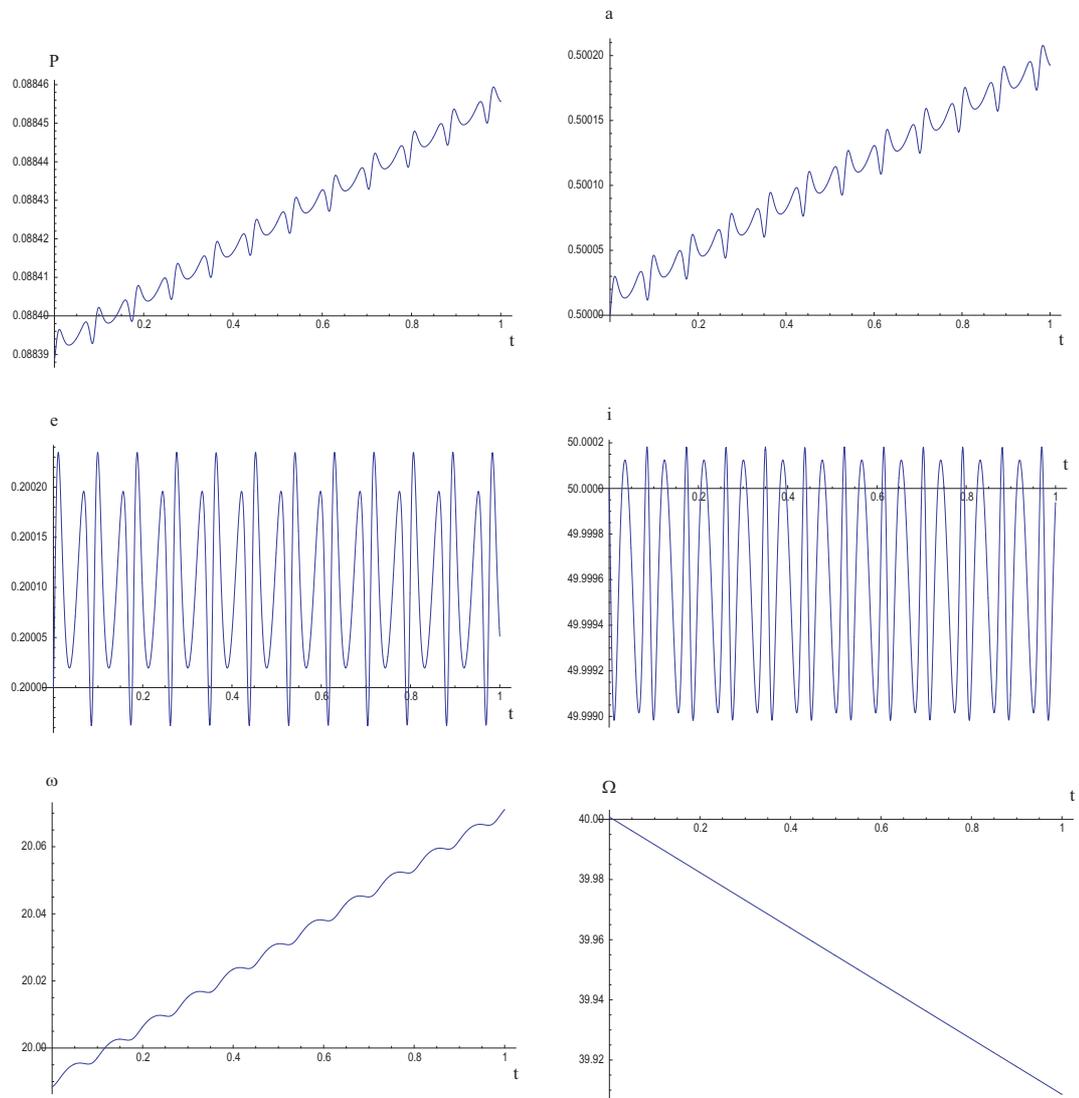


Figura 3: Variaciones de los elementos orbitales para el sistema sometido al conjunto completo de perturbaciones (intervalo de 1 año).

leva (1995), Aarseth y Mardling (1999), fueron aplicados por primera vez al problema de Gyldén–Meščerskij con y sin efecto periastro. La formulación del problema se realizó utilizando variables de Jacobi. Con el fin de visualizar las regiones de estabilidad se construyeron mapas de estabilidad en función de la excentricidad y del semieje mayor de la órbita externa (o de

la excentricidad de la órbita interna para el criterio de Eggleton–Kiseleva) en los cuales se representa su límite y la posición del sistema.

Después de aplicar estas herramientas a dos sistemas planetarios, en órbitas tipo P ( $\gamma$  Cephei) y tipo S (ejemplo hipotético basado en el anterior), y a un sistema estelar triple (BU 1099 AB, cuya binaria interna es BAG 10 Aa) se observaron los siguientes comportamientos:

- En general, los intervalos de estabilidad disminuyen en escenarios con pérdida de masa dependiente del tiempo (MDT) y pérdida de masa dependiente del tiempo más efecto periastro (MDT+EP).
- En sistemas planetarios el efecto periastro influye, sobre todo, en la excentricidad y el semieje mayor de la órbita interna para las órbitas tipo P, y en la excentricidad y semieje mayor de la órbita externa para las órbitas tipo S.
- En sistemas estelares triples en configuraciones tales que el mecanismo de Kozai es importante se produce un refuerzo del efecto periastro que conduce a notables incrementos del semieje mayor de la órbita interna (ver Fig. 4).

La órbita visual de la binaria BAG 10 Aa (ver Fig. 4), la primera astrométrica *speckle*, fue calculada (Docobo y Andrade 2006b) gracias a una nueva metodología recientemente presentada con la cual se pueden obtener todos los elementos orbitales, masas y clases espectrales de un sistema triple con una subcomponente espectroscópica (Docobo y Andrade 2006a).

En cuanto a la evolución de los intervalos de estabilidad se observó que para todos los criterios se produce una reducción de los intervalos de estabilidad en escenarios con pérdida de masa, excepto para el de Aarseth–Mardling que presenta un ligero aumento. Esto prueba la mayor tendencia a la inestabilidad de los sistemas en los que produce pérdida de masa dependiente del tiempo y la aceleración de este proceso cuando existe efecto periastro.

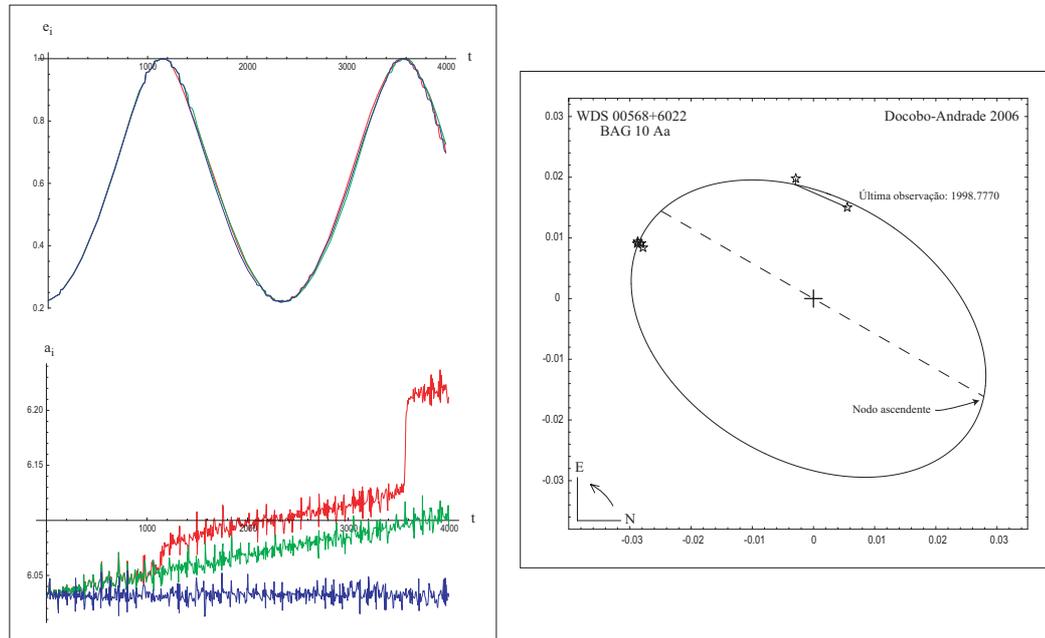


Figura 4: Izquierda: Evolución temporal de la excentricidad y del semieje mayor de la órbita interna para BAG 10 Aa (la línea azul corresponde al escenario SPM, la verde al de MDT y la roja al de MDT+EP). Derecha: Nueva órbita visual de la binaria BAG 10 Aa.

En la Figura 5 se muestra el mapa inicial de estabilidad según el criterio de Harrington para el sistema estelar BU 1099 AB.

### Un modelo de distribución de masa para vientos estelares cargados

Muchos de los casos más notables de estrellas con pérdida de masa suceden en sistemas binarios con potentes vientos en interacción y, frecuentemente, órbitas con alta excentricidad.

Teniendo en mente un caso prototipo de esta clase de sistemas como es la Wolf-Rayet 140, cuyos pasos por el periastro van acompañados de una potente emisión de radiación y polvo, se define un modelo para la distribución de masa resultante  $\Gamma$ . Ésta se expresa en función de tres factores de forma  $\Phi$ ,  $\Xi$  y  $\Theta$ , dependientes de las tres variables  $(\varphi, R, f)$  y del conjunto de parámetros  $(\chi_1, \chi_2, \xi_1, \xi_2, \theta_1, \theta_2)$ , cuyo significado geométrico

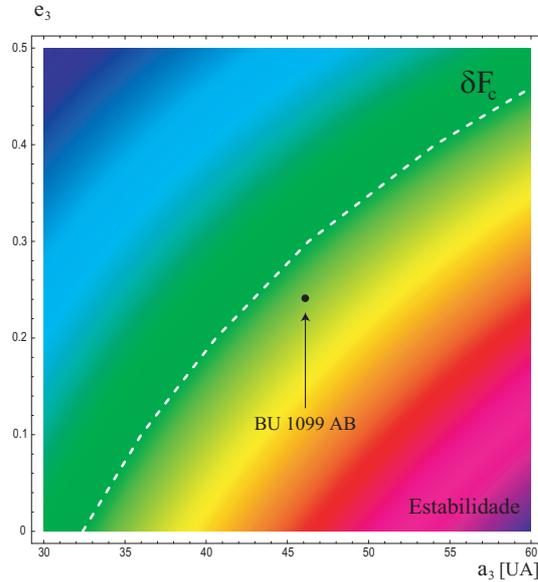


Figura 5: Detalle del mapa de estabilidad para el criterio de Harrington en el entorno del punto que ocupa el sistema estelar BU 1099 AB.

se define en § 6.4.1. En las Figuras 6 y 7 se muestra la apariencia en dos y tres dimensiones, respectivamente, de estos factores de forma.

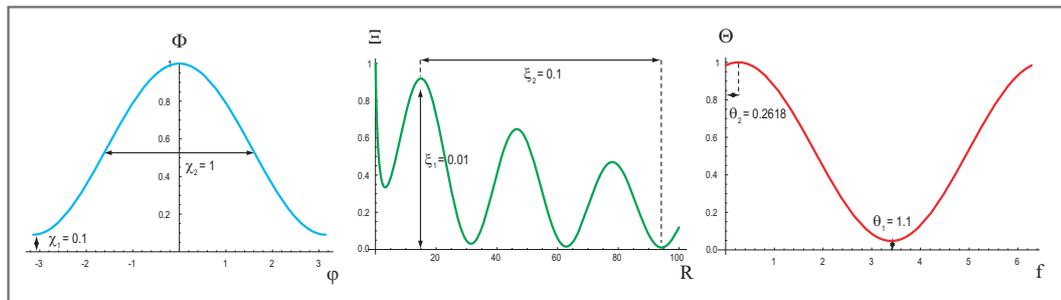


Figura 6: Factores de forma  $\Phi(\varphi)$ ,  $\Xi(R)$  y  $\Theta(f)$  para ciertos valores concretos de los parámetros del viento (indicados en la figura).

Este modelo se aplicó al sistema WR 140 suponiendo la existencia de una enana marrón en órbita tipo P. Se consideró que parte de la masa emitida por la Wolf-Rayet, que estaba escapando del sistema, era capturada por la enana marrón, de forma que se tenía un problema de masa variable con pérdida de masa de dos de las componentes y ganancia de masa de la

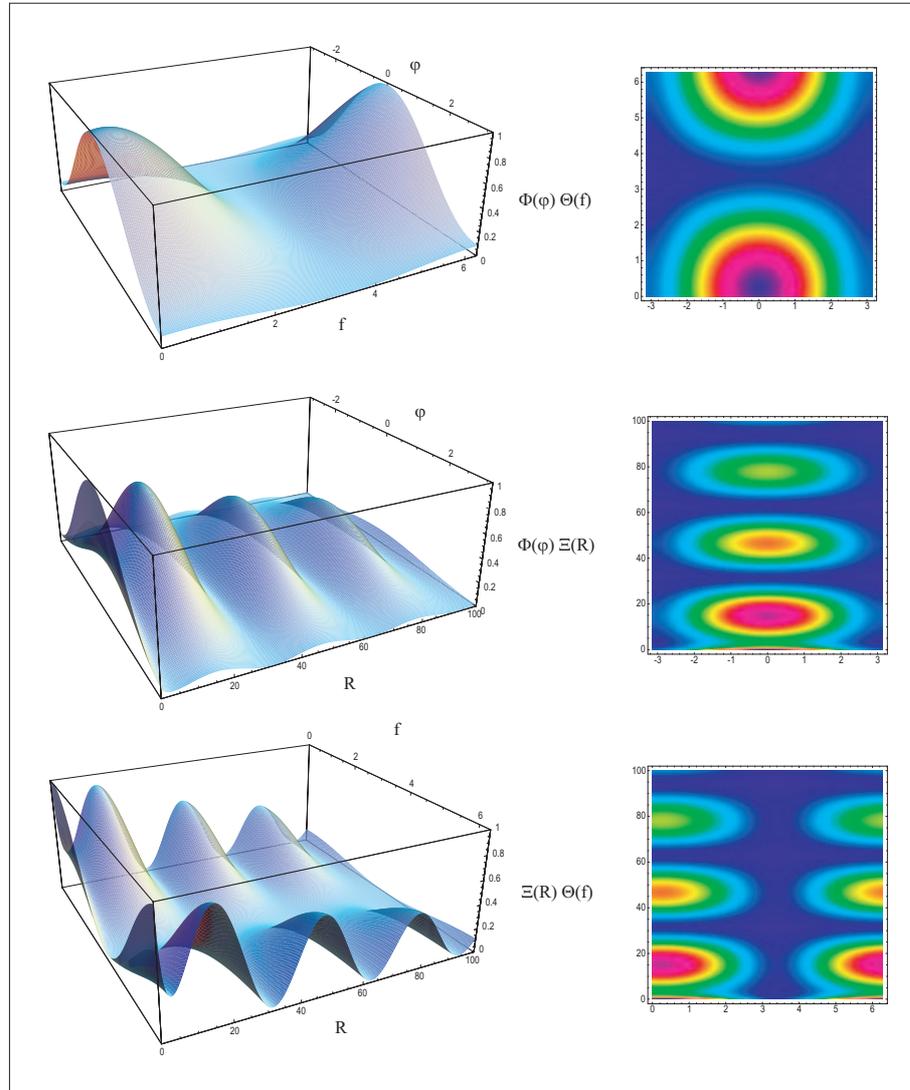


Figura 7: Representaciones tridimensionales y mapas de densidad de los factores de forma de la región activa.

tercera componente. Estas variaciones fueron cuantificadas considerando la ley de Jeans para el sistema con pérdida de masa, mientras que para la tercera componente se consideró una ley de ganancia de masa del tipo

$$\dot{m}_3 = +\delta(\varphi, R, r) \cdot m_3,$$

donde

$$\delta = \delta_0 \cdot \Gamma(\varphi, R, f),$$

siendo  $\delta_0$  un número real positivo que cuantifica la intensidad de la ganancia de masa.

Los casos considerados fueron los siguientes:

- SPM: No hay pérdida de masa.
- CPM: Existe pérdida de masa de los primarios en función del tiempo y por efecto periastro.
- CPM+GM: Además de la pérdida de masa de los primarios, el tercer cuerpo captura cierta fracción de masa que escapa del sistema.

A partir de la integración del problema y de los valores obtenidos para los parámetros de estabilidad a lo largo de 20 000 años se comprobó que, tanto en el caso en el que sólo existe pérdida de masa del sistema interno como cuando se añade la ganancia de masa por parte de la tercera componente, el sistema tiende a mantener su estabilidad. Así, a pesar de que se produce una reducción de la región de estabilidad, como se puede ver en la Figura 8, también la posición del sistema en el mapa de estabilidad se desplaza en la misma dirección, de forma que el sistema sigue estando lejos del límite final de la región de estabilidad.

La integración del problema permitió obtener la evolución de los factores de forma y de la función de distribución de masa  $\Gamma$  para este sistema (ver Fig. 9).

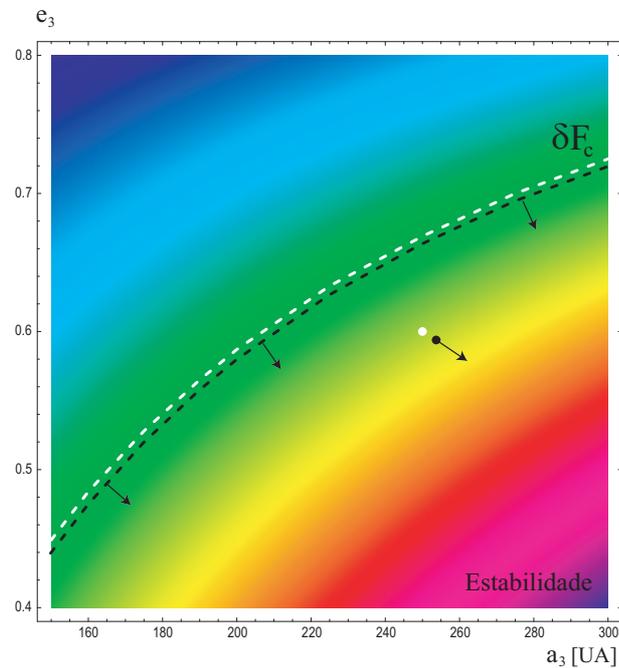


Figura 8: Detalle de la evolución del mapa de estabilidad según el criterio de Harrington en el entorno del punto que ocupa el sistema WR 140 más enana marrón en el escenario CPM+GM en dos instantes de tiempo separados 20 000 años. La línea discontinua y el punto blancos representan el valor crítico que define la región de estabilidad y la posición del sistema en el instante inicial, respectivamente, mientras que los negros corresponden al instante final.

## Conclusiones

En la investigación de los diferentes aspectos involucrados en el problema tratado en esta tesis, resumida en la sección anterior, destacan las siguientes aportaciones y conclusiones:

1. Se realizó una extensa exposición historiográfica de las aproximaciones más destacadas al problema dinámico de dos cuerpos con masa variable. Por otra parte, también se ofreció una descripción de los tipos de estrellas en la que tal fenómeno es especialmente importante, tanto en su evolución orbital como en su evolución a través del diagrama HR.

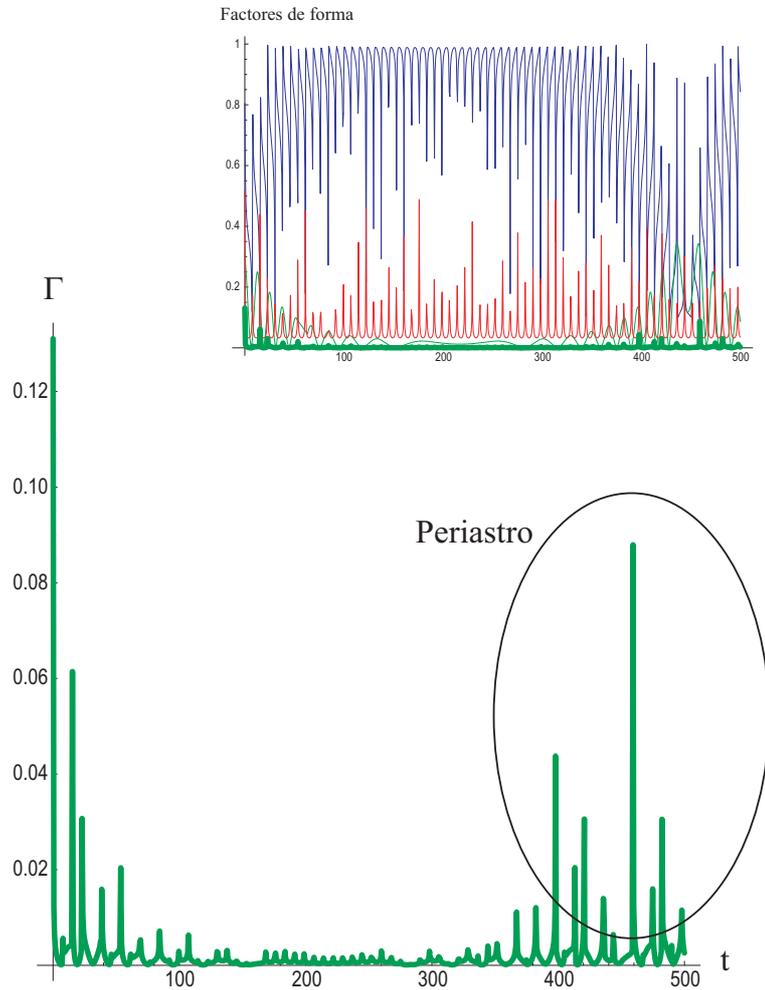


Figura 9: Evolución de los factores de forma,  $\Phi$  (azul),  $\Xi$  (verde claro),  $\Theta$  (rojo) y de su producto  $\Gamma$  (verde intenso), en la parte superior. En la parte inferior se representa exclusivamente la función  $\Gamma$ . El período de integración es de 500 años.

2. Se dio una reinterpretación de la ley de Jeans proporcionando nuevos valores para los parámetros  $\alpha$  y  $n$  y una relación entre  $\alpha$  y el ritmo de pérdida de masa de una estrella.
3. Se construyó un nuevo método canónico de perturbaciones  $N$ -paramétrico basado en transformaciones de Lie, lo que supone una generalización a un número arbitrario de parámetros del clásico método de perturbaciones de Hori–Deprit. Este método canónico resulta

especialmente útil en el estudio de sistemas perturbados en los que existe un amplio número de perturbaciones superpuestas al problema sin perturbar, las cuales pueden ser formalizadas en forma hamiltoniana mediante un conjunto de pequeños parámetros.

4. Se formuló, por primera vez de manera rigurosa del punto de vista matemático, el problema de Gylden–Meščerskij con efecto periastro como un problema de Kepler doblemente perturbado en formulación hamiltoniana. Para su descripción se postuló una ley generalizada de pérdida de masa con efecto periastro en función del tiempo y de la distancia mediante tres pequeños parámetros: dos que describen la pérdida de masa dependiente del tiempo de cada una de las componentes del sistema doble (mediante la ley de Jeans) y uno que representa la pérdida de masa del sistema por efecto periastro.
5. El mismo problema, en particular el estudio cualitativo de la evolución de los elementos orbitales del sistema, fue abordado utilizando las ecuaciones de Gauss de la teoría de perturbaciones y el esquema perturbativo de Hadjidemetriou. Posteriormente se realizó una integración numérica mediante un integrador de Runge–Kutta de paso variable de orden ocho (RK8) para determinar la evolución de los elementos orbitales.
6. Se aplicó a la función hamiltoniana del problema de pérdida de masa dependiente del tiempo de una binaria con la primaria elipsoidal considerando efectos relativistas el método canónico de perturbaciones en su versión 4-paramétrica. Se obtuvo así la variación de los elementos orbitales para este sistema.
7. Se analizó la influencia de la pérdida de masa dependiente del tiempo y por efecto periastro en la estabilidad de sistemas triples jerarquizados (estelares y planetarios) mediante la aplicación de cuatro criterios de estabilidad a sistemas reales. Para la visualización de las regiones de estabilidad se definieron mapas de estabilidad en función de la excentricidad y del semieje mayor de la órbita externa.

8. Se definió una función de distribución de masa  $\Gamma$  en función de tres factores de forma para los vientos estelares cargados de masa que se originan en sistemas binarios muy activos, tales como los sistemas Wolf–Rayet.
9. La función de distribución de masa  $\Gamma$  fue usada para modelar la ganancia de masa de una hipotética enana marrón en órbita tipo P alrededor del sistema WR 140.
10. En resumen, los sistemas estelares múltiples evolucionan altamente condicionados por la perturbación que implica la pérdida de masa en sus diversas variantes: pérdida continua e isotrópica (representada mediante la ley de Jeans) o incremento de ésta por efecto periastro.

## Líneas de continuación

El estudio de las relaciones entre la dinámica orbital de sistemas estelares y planetarios múltiples y la evolución astrofísica de los mismos es una línea de investigación que sería interesante seguir explorando. En este contexto se sugieren los siguientes problemas como complementarios a los que se han tratado en esta tesis o como líneas de continuación naturales de los mismos.

### Cuestiones metodológicas

- ▷ Profundización en la teoría de métodos canónicos de perturbaciones con el fin de integrar sistemas hamiltonianos tales como el que surge del problema de Gylden–Meščerskij con efecto periastro. Especialmente prometedora parece la línea de investigación en la cual se considera al tiempo como una variable canónica más cuya conjugada es la energía.

- ▷ Utilización de funciones polilogarítmicas de argumento complejo (Osácar y Palacián 1994; Osácar, Palacián y Palacios 1995) en la simplificación de las expresiones que aparecen en la integración de esta clase de problemas.

### Aplicaciones

- ▷ Aprovechando la versatilidad del método canónico de perturbaciones  $N$ -paramétrico sería factible ir añadiendo sucesivas perturbaciones que se aproximen a una solución más realista del problema ‘completo’ de la dinámica de los sistemas estelares múltiples: transferencia de masa entre componentes, existencia de discos de acreción alrededor de una o de ambas componentes, eyecciones de masa no isotrópicas, influencia de intensos campos electromagnéticos . . .
- ▷ La aproximación post-newtoniana del problema de pérdida/ganancia de masa podría ser un modelo válido para el problema de tres agujeros negros (Valtonen, Mikkola y Pietilä 1995; Pietilä et al. 1995; Valtonen 1996) según se considere la pérdida de energía y de momento angular mediante la emisión de radiación gravitacional o la captura de masa.
- ▷ El análisis estadístico de los valores de los elementos orbitales resultantes después de integraciones realizadas a partir de cierto conjunto de valores iniciales, teniendo en cuenta algunas de las perturbaciones descritas en esta tesis, podrían explicar las frecuencias observadas de planetas con una excentricidad y un semieje mayor dados. En particular, sería interesante profundizar en la hipotética relación entre la pérdida de masa y las relativamente altas excentricidades observadas en algunos planetas extrasolares. □



# Bibliografía

- Aarseth, S. J. e Mardling, R. A. (1999), *Dynamics and Stability of Three-Body Systems*. Em *The Dynamics of Small Bodies in the Solar System, a Major Key to Solar System Studies*, Eds. B. A. Steves e A. E. Roy, p. 385. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Abad, A. J. (1984), *Estudio de sistemas estelares múltiples*. Tese de Doutorado. Universidad de Zaragoza.
- Abad, A. J. e Ribera, J. (1984), *Método biparamétrico de perturbaciones del tipo Hori*. MSMGG, **II**(1), 3.
- Adams, F. C. e Laughlin, G. (2006a), *Effects of secular interactions in extrasolar planetary systems*. ApJ, **649**, 992–1003.
- (2006b), *Long-term evolution of close planets including the effects of secular interactions*. ApJ, **649**, 1004–1009.
- Ahmed, M. K. M. (1993), *Multiple-Parameter Lie Transform*. EM&P, **61**, 21–28.
- Andrade, M. (2002), *Método triparamétrico de perturbaciones*. Em *Métodos de dinámica orbital y rotacional*, Eds. S. Ferrer, T. López Moratalla e A. Viguera, p. 113–120. Prensas Universitarias, Murcia.
- (2003), *Estudo dinâmico, astrométrico e físico de sistemas estelares duplos e múltiplos*. Memória do Diploma de Estudos Avançados (30/07/2001). Publicacións do Departamento de Matemática Aplicada, **33**, Universidade de Santiago de Compostela.

- Andrade, M. e Docobo, J. A. (2001), *The influence of decreasing mass on the orbits of wide binaries: an approach to the problem*. Em *Highlights of Spanish astrophysics II*, Eds. J. Zamorano, J. Gorgas e J. Gallego, p. 273. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- (2002), *The influence of mass loss on orbital elements of binary systems by periastron effect*. AIPCP, **637**, 82–85.
- (2003a), *Una ley de pérdida de masa en binarias que por efecto periastro produce un aumento secular de la excentricidad*. MRACZ, **22**, 161–170.
- (2003b), *Orbital Dynamics Analysis of Binary Systems in Mass-Loss Scenarios*. RMxAC, **15**, 223–225.
- (2004), *Estudio de la estabilidad en sistemas estelares triples con pérdida de masa*. MRACZ, **25**, 13–22.
- (2006), *Satellites around extrasolar planets?*. MRACZ, **28**, 95–102.
- Armellini, G. (1953a), *Osservazioni sul problema dei due corpi di masse variabili e sopra alcune sue applicazioni alla cosmogonia*. LRSFMN, **XIV**, 727–733.
- (1953b), *Sopra le variazioni dell' eccentricità nel problema astronomico dei due corpi di masse decrescenti*. LRSFMN, **XV**, 345–351.
- Armitage, P. (2006), *Distribution of currently known extrasolar planets*. <http://jilawwww.colorado.edu/~pja/planets/extrasolar.html> [consulta: 14-10-2006].
- Balega, I. I., Balega, Y. Y., Hofmann, K.-H., Maksimov, A. F., Pluzhnik, E. A., Schertl, E., Shkhagosheva, Z. U. e Weigelt, G. (2002), *Speckle interferometry of nearby multiple stars*. A&A, **385**, 87–93.
- Barrio, R. e Palacián, J. (2003), *High-order averaging of eccentric artificial satellites perturbed by the Earth's potential and air-drag terms*. PRSL, **459**, 1517–1534.

- Bekov, A. A. (1993), *Periodic solutions of the Gylden–Meshcherskii problem*. ARep, **37**(6), 651–654.
- Berković, L. M. (1981), *Gylden–Meščerskii problem*. CeM, **24**, 407–429.
- Berković, L. M. e Gel'fgat, B. E. (1975), *Em Problemy Analiticheskoi Nebesnoi Mekhaniki, Teorii Ustoichivosti i Upravleniya (Problems in Analytical Celestial Mechanics, Stability Theory, and Control)*. Nauka, Moscovo.
- Blaauw, A. (1961), *On the origin of the O- and B-type stars with high velocities (the "run-away" stars), and some related problems*. BAN, **15**, 265–290.
- Black, D. C. (1982), *A simple criterion for determining the dynamical stability of three-body systems*. AJ, **87**(9), 1333–1337.
- Blanchet, L. e Faye, G. (2000), *On the equations of motion of point-particle binaries at the third post-Newtonian order*. PhLA, **271**, 58–64.
- Budaj, J. (1999), *Do the physical properties of Ap binaries depend on their orbital elements?*. MNRAS, **310**, 419–427.
- Budría, C. (1980), *Métodos especiales de perturbaciones. Transformaciones canónicas no clásicas. Aplicaciones*. Tese de Doutoramento. Universidad de Zaragoza.
- Calvo, C. e Palacios, M. (1997), *On the numerical integration of two body problem with variable mass*. Em *Visual Double Stars: Formation, Dynamics and Evolutionary Tracks*, Eds. J. A. Docobo, A. Elipe e H. McAlister, p. 341–346. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Campbell, J. A. e Jefferys, W. A. (1970), *Equivalence of the Perturbation Theories of Hori and Deprit*. CeM, **2**, 467–473.
- Cantó, J., Raga, A. C. e Wilkin, F. P. (1996), *Exact algebraic solutions of the thin-shell two-wind interaction problem*. ApJ, **469**, 729–733.
- Catelán, M. (2005), *Horizontal Branch Stars: Observations, Theory, and Insights into the Formation of the Galaxy*. Em *Resolved Stellar Populations*, Eds. D. Valls-Gabaud e M. Chávez, ASPCS (no prelo).

- Chiara, L. (1957), *Casi in cui nel problema dei due corpi di massa decrescente l'eccentricità varia in ragione inversa della massa*. POPal, **10**(8), 3–16.
- Cid, R. e Ferrer, S. (1997), *Geodesia Geométrica, Física y por Satélites*. IGN, Madrid.
- Cole, W. A., Fekel, F. C., Hartkopf, W. I., McAlister, H. A. e Tomkin, J. (1992), *HR 266 = ADS 784 —an early type spectroscopic, speckle astrometric multiple system*. AJ, **103**(4), 1357–1368.
- Contopoulos, C. (1959), *Lectures in Celestial Mechanics*. Publications of the University of Thessaloniki (em grego).
- Corcoran, M. F., Ishibashi, K., Swank, J. H. e Petre, R. (2001), *The X-Ray Light Curve of  $\eta$  Carinae: Refinement of the Orbit and Evidence for Phase-dependent Mass Loss*. ApJ, **547**, 1034–1039.
- Cordani, B. (2003), *The Kepler Problem*. Birkhäuser Verlag, Basel.
- Correas, J. M. e Ribera, J. (1975), *Algunas soluciones analíticas del problema de dos cuerpos con masa variable*. Em *Actas I Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica*, 175–187.
- Cranmer, S. R. (1996), *Dynamical models of winds from rotating hot stars*. Tese de Doutoramento. University of Delaware.
- Crowley, C. (2006), *Red Giant Mass-Loss: Studying Evolved Stellar Winds with FUSE and HST/STIS*. Tese de Doutoramento. University of Dublin.
- Damour, T., Jaranowski, P., e Schäfer, G. (2000), *Dynamical invariants for general relativistic two-body systems at the third post-Newtonian approximation*. PhRvD, **62**(4), 044024.
- (2001), *Equivalence between the ADM-Hamiltonian and the harmonic-coordinates approaches to the third post-Newtonian dynamics of compact binaries*. PhRvD, **63**(4), 044021.

- Das, R. K., Shrivastava, A. K. e Ishwar, B. (1988), *Equations of motion of elliptic restricted problem of three bodies with variable mass*. CeM, **45**, 387–393.
- David, E.-M., Quintana, E. V., Fatuzzo, M. e Adams, F. C. (2003), *Dynamical Stability of Earth-like Planetary Orbits in Binary Systems*. PASP, **115**, 825–836.
- Deprit, A. (1969), *Canonical Transformations Depending on a Small Parameter*. CeM, **1**, 12–30.
- (1983), *The secular accelerations in Gylden’s problem*. CeM, **31**, 1–22.
- Deprit, A., Miller, B. e Williams, C. (1989), *Gylden systems: Rotation of pericentres*. Ap&SS, **159**, 239–270.
- Dirac, P. A. M. (1937), *The cosmological constants*. Nature, **139**, 323.
- (1938), *A new basis for cosmology*. PRSL, **165**, 199–208.
- Docobo, J. A. (1977), *Aplicación de la teoría de perturbaciones al estudio de sistemas estelares triples*. Tese de Doutorado. Universidad de Zaragoza.
- (1985), *On the analytic calculation of visual double star orbits*. CeM, **36**, 143–153.
- (2003), *Some Integrable Cases of the Two-Body Problem with Mass Depending Both on Time and Distance*. AstL, **29**(5), 344–347.
- Docobo, J. A. e Andrade, M. (2006a), *A methodology for the description of multiple stellar systems with spectroscopic subcomponents*. ApJ, **652**, 681–695.
- (2006b), *New orbit for WDS 00568+6022*. IAUDS, **159**.
- Docobo, J. A., Tamazian, V. S. e Melikyan, N. D. (1999), *Spectral, Photometric, and Polarimetric Study of Visual Binary COU 14*. ApJ, **513**, 933–940.

- Dommanget, V. (1963), *Recherches sur l'évolution des étoiles doubles, par voie statistique et par application de la mécanique des masses variables*. BARB, **9**(5), 213.
- Dougherty, S. M., Beasley, A. J., Claussen, M. J., Zauderer, B. A. e Bolingbroke, N. J. (2005), *High-Resolution Radio Observations of the Colliding-Wind Binary WR 140*. ApJ, **623**(1), 447–459.
- Dougherty, S. M., Pittard, J. M., Coker, R., Williams, P. M., Kasian, L. e Lloyd, H. M. (2003a), *Radio emission models of Colliding-Wind Binaries*, RMxAC, **15**, 56–58.
- Dougherty, S. M., Pittard, J. M., Kasian, L., Coker, R. F., Williams, P. M. e Lloyd, H. M. (2003b), *Radio emission models of colliding-wind binary systems*. A&A, **409**, 217–233.
- Duboshin, G. N. (1925), *Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force qui depend du temps*. AZh, **2**, 5–11.
- (1927), *Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force qui depend du temps II*. AZh, **4**, 123–141.
- (1928), *Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force qui depend du temps III*. AZh, **5**, 138–150.
- (1929), *Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force qui depend du temps IV*. AZh, **6**, 162–178.
- (1930), *Sur la forme de trajectoires dans le probleme des deux corps de masse variables*. AZh, **7**, 153–171.
- Dufour, M. Ch. (1866), *Sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune*. CRHSAS, 840–842.
- Duquennoy, A. e Mayor, M. (1991), *Multiplicity among solar-type stars in the solar neighbourhood. II - Distribution of the orbital elements in an unbiased sample*. A&A, **248**, 485–524.

- Duval, C., Gibbons, G. e Horváthy, P. (1991), *Celestial mechanics, conformal structures, and gravitational waves*. PhRvD, **43**(12), 3907–3922.
- Dvorak, R. (1986), *Critical orbits in the elliptic restricted three-body problem*. A&A, **167**, 379–386.
- (2006), *Stability of motion in extrasolar planetary systems*. POBeo, **80**, 13–27.
- Dvorak, R. e Lichtenegger, H. (1983), *On the two-body problem with variable masses*. Em *The Motion of Planets and Natural and Artificial Satellites*, **2**, 11–17. Universidade de São Paulo.
- Dvorak, R., Pilat-Lohinger, E., Funk, B. e Freistetter, F. (2003), *Planets in habitable zones: A study of the binary Gamma Cephei*. A&A, **398**, L1–L4.
- Dyson, J. E., Hartquist, T. W. e Biro, S. (1993), *Mass-loaded astronomical flows – V. Tails: intermediate-scale structures in flowing clumpy media*. MNRAS, **261**, 430–434.
- Eddington, A. S. (1924), *On the Relation between the Masses and Luminosities of the Stars*. MNRAS, **84**, 308–332.
- (1925), *On the Mass–Luminosity Relation; a Reply to Dr. Jeans*. MNRAS, **85**, 403–407.
- Edwards, D. A. e Pringle, J. E. (1987), *Orbital eccentricity in classical novae*. Nature, **328**, 505–505.
- Eggenberger, A., Udry, S. e Mayor, M. (2004), *Statistical properties of exoplanets. III. Planet properties and stellar multiplicity*. A&A, **417**, 353–360.
- Eggleton, P. e Kiseleva, L. (1995), *An empirical condition for stability of hierarchical triple systems*. ApJ, **455**, 640–645.
- Einstein, A. (1905), *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. AnP, **322**, 891–921.
- Einstein, A. e Infeld, L. (1949), *On the motion of particles in general relativity*. CJM, **1**, 209–241.

- Einstein, A., Infeld, L. e Hoffmann, B. (1938), *The gravitaional equations and the problem of motion*. AM, **39**(1), 65–100.
- Els, S. G., Sterzik, M. F., Marchis, F., Pantin, E., Endl, M. e Kürster, M. (2001), *A second substellar companion in the Gliese 86 system. A brown dwarf in an extrasolar planetary system*. A&A, **370**, L1–L4.
- Floría, L. (1993), *Intermediarios radiales y generalizaciones de las variables de tipo Delaunay–Scheifele. Aplicación al movimiento orbital de satélites artificiales*. Tese de Doutoramento. Universidad de Valladolid.
- (1997), *Perturbed Gylden Systems and Time-Dependent Delaunay-Like Transformations*. CeMDA, **68**(1), 75–85.
- (2001a), *TR-like canonical transformations and perturbed Gylden systems*. MSMGG, **21**, 137–144.
- (2001b), *Towards a canonical reduction of a class of perturbed Gylden ystems*. Em *Highlights of Spanish astrophysics II*, Eds. J. Zamorano, J. Gorgas e J. Gallego, p. 285, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- (2001c), *On the Canonical Treatment of Gylden-Type Problems Based on Quasi-Keplerian Systems*. Em *Actas XVII CEDYA–VII CMA*.
- (2002), *A note concerning Delaunay–similar variables*. Em *Métodos de dinámica orbital y rotacional*, Eds. S. Ferrer, T. López Moratalla e A. Viguera, p. 183–190. Prensas Universitarias, Murça.
- (2003), *The Gravitational Parameter from the Viewpoint of Canonical Celestial Mechanics*, MRACZ. **22**, 153–160.
- (2006), *Some Remarks on the Treatment of Quasi-Keplerian Systems*. MRACZ, **28**, 137–148.
- Ford, E. B., Kozinsky, B. e Rasio, F. A. (2000), *Secular evolution of hierarchical triple star systems*. ApJ, **535**, 385–401 (erratum, **605**, 966 [2004]).

- Gel'fgat, B. E. (1963), *Sobre la conducta asintótica de la resolución del problema de dos cuerpos de masa variable*. Publ. Astroph. Inst. Alma-Ata, **5**, 191–204.
- (1965), Tr. Astrofiz. Inst. Akad. Nauk. Kaz. SSR, **5**, 354.
- (1969), *Trudy e Chtenii K.E. Tsiolkovskogo, Sektsiya: Mekhanika Kosmicheskogo Poleta (Proc. 3<sup>th</sup> Tsiolkovskii Readings, Section: Mechanics of Spaceflight)*. p. 86. Moscovo
- Gel'fgat, B. E. e Omarov, T. B. (1967), *Nestatsionarnaya Schema Zadachy Dvuch Tel.* Tr. Astrofiz. Inst. (Almaty: Acad. of Sciences of Kazak SSR) **8**, 13.
- Georgakarakos, N. (2002), *Eccentricity generation in hierarchical triple systems with coplanar and initially circular orbits*. MNRAS, **337**, 559–566.
- (2004), *Eccentricity generation in hierarchical triple systems with non-coplanar and initially circular orbits*. CeMDA, **89**, 63–82.
- (2006), *Eccentricity generation in hierarchical triple systems: the planetary regime*. MNRAS, **366**, 566–574.
- Gies, D. R. e Bolton, C. T. (1986), *The binary frequency and origin of the OB runaway stars*. ApJS, **61**, 419–454.
- Giordano, C. M. e Plastino, A. R. (1999), *Jacobi Dynamics And The N-Body Problem With Variable Masses*. CeMDA, **75**(3), 165–183.
- Glikman, L. G. (1976), *Estimates of osculating-orbit elements for the two-body problem with variable mass*. AZh, **53**(1), 185–190.
- (1978), *On the problem of two bodies of variable mass*. AZh, **55**, 873–880.
- Goldstein, H. (1980), *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Massachusetts.
- Graziani, F. e Black, D. C. (1981), *Orbital stability constraints on the nature of planetary systems*. ApJ, **251**, 337–341.
- Guillaume, P. (1974), *Regularization of the Two-Body Problem with Variable Mass*. CeM, **10**, 141–149.

- Gylden, H. (1884), *Die Balmbewegungen in einen Systeme von zwei Körpern in dem Falle, das die Massen Veränderungen unterworfen sind*. AN, **2593–94**, 1–6.
- Hadjidemetriou, J. (1963), *Two-Body Problem with Variable Mass: A New Approach*. Icarus, **2**, 440–451.
- (1966a), *Binary Systems with Decreasing Mass*. ZA, **63**, 116–130.
- (1966b), *Analytic Solution of the Two-Body Problem with Variable Mass*. Icarus, **5**, 34–46.
- (1969a), *Dynamics of close binary systems with mass exchange*. Ap&SS, **3**, 31–45.
- (1969b), *Dynamical effects of mass exchange in close binary systems*. Ap&SS, **3**, 330–344.
- Haghighipour, N. (2006), *Dynamical Stability and Habitability of the  $\gamma$  Cephei Binary-Planetary System*. ApJ, **644**(1), 543–550.
- Harrington, R. S. (1968), *Dynamical Evolution of Triple Stars*. AJ, **73**(3), 190–194.
- (1969), *The stellar three-body problem*. CeM, **1**, 200–209.
- (1972), *Stability criteria for triple stars*. CeM, **6**, 322–327.
- (1977), *A review of the dynamics of classical triple stars*. RMxAA, **3**, 139–143.
- Hatzes, A. P., Cochran, W. D., Endl, M., McArthur, B., Paulson, D. B., Walker, G. A. H., Campbell, B. e Yang, S. (2003), *A Planetary Companion to  $\gamma$  Cephei A*. ApJ, **599**, 1383–1394.
- Heimberger, J., Soffel, M. e Ruder, H. (1990), *Relativistic effects in the motion of artificial satellites: the oblateness of the central body II*. CeMDA, **47**, 205–217.
- Henrard, J. (1970), *On a Perturbation Using Lie Transforms*. CeM, **3**, 107–120.

- Henrard, J. e Roels, J. (1974), *Equivalence for Lie Transforms*. CeM, **10**, 497–512.
- Hoffer, J. B. (1983), *Computer simulations of gravitational encounters between pairs of binary star systems*. AJ, **88**, 1420–1434.
- Holman, M. J. e Wiegert, P. A. (1999), *Long-Term stability of planets in binary systems*. AJ, **117**, 621–628.
- Hori, G.-I. (1966), *Theory of General Perturbations with Unspecified Canonical Variables*. PASJ, **18**, 287.
- Huang, S.-S. (1956), *A dynamical problem in binary systems and its bearing on stellar evolution* AJ, **61**(2), 49–61.
- Jeans, J. H. (1924), *Cosmogonic problems associated with a secular decrease of mass*. MNRAS, **85**(1), 2–11.
- (1925a), *On the Masses, Luminosities, and Surface-Temperatures of the Stars*, MNRAS, **85**, 196–211.
- (1925b), *On the Masses, Luminosities, and Surface-Temperatures of the Stars (Final Note)*. MNRAS, **85**, 792–797.
- Jha, S. K. e Shrivastava, A. K. (2001), *Equations of Motion of the Elliptical Restricted Problem of Three Bodies with Variable Masses*. AJ, **121**, 580–583.
- Joy, A. H. (1945), *T Tauri Variable Stars*. ApJ, **102**, 168–195.
- Kamel, A. (1970), *Perturbation Method in the Theory of Nonlinear Oscillations*. CeM, **3**, 90–106.
- Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M. e Donner, K. J. (2000), *Fundamental Astronomy*. Springer, Berlim.
- Kenny, H. T. e Taylor, A. R. (2005), *Colliding winds in symbiotic binary systems. I. Analytic and numerical solutions*. ApJ, **619**, 527–537.

- Khodykin, S. A., Zakharov, A. I., e Andersen, W. L. (2004), *Stability of triple systems with highly inclined orbits*. ApJ, **615**, 506–511.
- Konacki, M. (2005), *An extrasolar giant planet in a close triple-star system*. Nature, **436**(7048), 230–233.
- Kozai, Y. (1962), *Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity*. AJ, **67**, 591–598.
- Kruszewski, A. (1963), *Exchange of Matter in Close Binary Systems. I. Equilibrium Configurations in the Case of Deviations from Synchronism*. AcA, **13**(2), 106–117.
- (1964a), *Exchange of Matter in Close Binary Systems. II. Particle Trajectories*. AcA, **14**(4), 232–249.
- (1964b), *Exchange of Matter in Close Binary Systems. III. Changes in Period Caused by Exchange of Matter*. AcA, **14**(4), 242–250.
- Lamers, H. J. G. L. M. (1998), *Stellar Wind Theories*. Ap&SS, **260**, 81–100.
- Lamers, H. J. G. L. M. e Cassinelli, J. P. (1999), *Introduction to Stellar Winds*. Cambridge University Press, Nova Iorque.
- Landau, L. D. e Lifshitz, E. M. (1962), *The Classical Theory of Fields* (2<sup>a</sup> ed.). Pergamon Press, Oxford.
- Lehmann-Filhés, R. (1898), *Ueber Centralbewegungen*. AN, **3479–80**, 353–376.
- Levi-Civita, T. (1928), *Sul moto di un corpo di massa variabile*. LRSFMN, **VIII**, 229–333.
- Lichtenegger, H. (1984), *The dynamics of bodies with variable masses*. CeM, **34**, 357–368.
- Ling, J. F. (1988), *Aplicación del método estroboscópico al problema estelar de tres cuerpos*. Tese de Doutorado. Universidade de Santiago de Compostela.

- Logunov, A. e Mestvirishvili, M. (1989), *The Relativistic Theory of Gravitation*. Mir Publishers, Moscovo.
- Lubow, S. H. e Artymowicz, P. (1996), *Young Binary Star/Disk Interactions*. Em *Evolutionary Processes in Binary Stars*, Eds. R.A.M.J. Wijers, M.B. Davies e C.A. Tout, p. 53. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Luk'yanov, L. G. (1983a), *Equations of motion of the problem of two bodies with variable masses*. Vestn. Mos. Univ., Ser. 3: Fiz., Astron., **24**(1), 62–66.
- (1983b), *On the equations of motion in the variable-mass many-body problem*. AZh, **60**, 181–184.
- (1989), *Particular solutions in the restricted three-body problem with variable masses*. AZh, **66**, 180–187.
- (1992), *Surfaces of zero velocity in the restricted three-body problem with variable masses*. AZh, **69**, 640–648.
- Maeder, A. e Meynet, G. (1987), *Grids of evolutionary models of massive stars with mass loss and overshooting. Properties of Wolf-Rayet stars sensitive to overshooting*. A&A, **182**, 243–263.
- Marchal, C. (1990), *The Three-Body Problem*. Elsevier, Amsterdão.
- Mardling, R. A. e Aarseth, S. J. (2001), *Tidal interactions in star cluster simulations*. MNRAS, **321**, 398–420.
- Martin, E. L. (1964), *Le problème théorique des deux corps de masses décroissantes et l'évolution orbitale des étoiles doubles*. CT, **80**, 1–16.
- Martynov, D. Y. e Khaliullin, K. F. (1980), *On the relativistic motion of the periastron in the eclipsing binary system DI Herculis*. Ap&SS, **71**, 147–170.
- Massey, P. (1981), *The masses of Wolf-Rayet stars*. ApJ, **246**, 153–160.
- Mayor, M. e Queloz, D. A. (1995), *A Jupiter-Mass Companion to a Solar-Type Star*. Nature, **378**, 355–357.

- McMillan, W. D. (1925), *The Problem of Two Bodies with Diminishing Mass*. MNRAS, **85**(9), 904–912.
- Mcvittie, G. C. (1978), *Newtonian cosmology with a time-varying constant of gravitation*. MNRAS, **183**, 749–764.
- Meščerskij, F. (1893), *Ein Specialfall des Gyldén'schen Problems*. AN, **3153**, 8–9.
- (1902), *Ueber die Integration der Bewegungsgleichungen in Probleme zweier Körper von veränderlicher Masse*. AN, **3807**, 229–240.
- (1949), *Studies on the Mechanics of Variable-Mass Bodies*. Gostekhizdat (original em russo), Moscovo.
- Mikkola, S. (1983), *Encounters of binaries. I - Equal energies*. MNRAS, **203**, 1107–1121.
- Milne, E. A. (1933), *World-relation and the 'cosmical constant'*. MNRAS, **94**, 3–13.
- Moffat, A. F. J. (1998), *Colliding winds in binaries: observations*. Ap&SS, **260**, 225–242.
- Moffat, J. W. (1984), *The orbital motion of DI Herculis as a test of a theory of gravitation*. ApJ, **287**, L77-L80.
- Monnier, J. D., Tuthill, P. G. e Danchi, W. C. (1999), *Pinwheel nebula around WR 98a*. ApJ, **525**, L97–L100.
- (2002), *Proper motions of new dust in the colliding wind binary WR 140*. ApJ, **567**, L137–L140.
- Mudryk, L. R. e Wu, Y. (2006), *Resonance overlap is responsible for ejecting planets in binary systems*. ApJ, **639**, 423–431.
- Munier, A., Burgan, J. R., Feix, M. e Fijalkov, E. (1981), *Asymptotic solutions for a variable mass two-body problem*. A&A, **94**, 373–376.

- Musielak, Z. E., Cuntz, M., Marshall, E. A. e Stuit, T. D. (2005), *Stability of planetary orbits in binary systems*. *A&A*, **434**, 355–364.
- Nieuwenhuijzen, H. e de Jager, C. (1990), *Parametrization of stellar rates of mass loss as functions of the fundamental stellar parameters  $M$ ,  $L$ , and  $R$* . *A&A*, **231**, 134–136.
- Nugis, T. e Lamers, H. J. G. L. M. (2000), *Mass-loss rates of Wolf-Rayet stars as a function of stellar parameters*. *A&A*, **360**, 227–244.
- Omarov, T. B. (1975), *Dinamika Gravitiruyushchikh Sistem Metagalaktiki (Dynamics of Gravitating Systems in the Metagalaxy)*. Nauka Kaz. SSR, Alma-Ata.
- Oppolzer, Th. V. (1884), *Ueber eine Ursache, welche den Unterschied zwischen der theoretisch berechneten Säcularacceleration in der Länge des Mondes und der thatsächlichen bedingen kann*. *AN*, **2573**, 67–72.
- Origlia, L., Ferraro, F. R., Fusi Pecci, F. e Rood, R. T. (2002), *ISOCAM observations of galactic globular clusters: mass loss along the Red Giant Branch*. *ApJ*, **571**, 458–468.
- Orlov, V. V. e Petrova, A. V. (1996), *The effect of tidal friction on the stability of triple systems*. *MNRAS*, **281**, 384–392.
- (2000), *Dynamical stability of triple stars*. *AstL*, **26**(4), 250–260.
- Osácar, C. e Palacián, J. (1994), *Decomposition of functions for elliptic orbits*. *CeMDA*, **60**, 207–223.
- Osácar, C., Palacián, J. e Palacios, M. (1995), *Numerical evaluation of the dilogarithm of complex argument*. *CeMDA*, **62**, 93–98.
- Paresce, F., Livio, M., Hack, W. e Korista, K. (1995), *The structure and evolution of the Nova V1974 Cygni shell from HST observations*. *A&A*, **299**, 823–834.

- Pendleton, Y. J. e Black, D. C. (1983), *Further studies on criteria for the onset of dynamical instability in general three-body systems*. *AJ*, **88**, 1415–1419.
- Pétriz, F. (1980), *Sobre la aplicación de algunos métodos analíticos y numéricos a la teoría de perturbaciones*. Tese de Doutoramento. Universidad de Zaragoza.
- Pietilä, H., Heinämäki, P., Mikkola, P. e Valtonen, M. J. (1995), *Anisotropic gravitational radiation in the problems of three and four black holes*. *CeMDA*, **62**, 377–394.
- Pilat-Lohinger, E. e Dvorak, R. (2002), *Stability of S-type Orbits in Binaries*. *CeMDA*, **82**, 143–153.
- Piotrowski, S. L. (1964), *Variations of Orbital Elements in Binary Systems with Mass Transfer*. *AcA*, **14**(4), 251–272.
- Pittard, J. M., Dougherty, S. M., Coker, R. F., O'Connor, E. e Bolingbroke, N. J. (2006), *Radio emission models of colliding-wind binary systems. Inclusion of IC cooling*. *A&A*, **446**(3), 1001–1019.
- Plastino, A. R. e Muzzio, J. C. (1992), *On the use and abuse of Newton's second law for variable mass problems*. *CeMDA*, **53**(3), 227–232.
- Pogge, R. (2006), *Introduction to Stars, Galaxies, & the Universe: The Internal Structure of Stars*. <http://www.astronomy.ohio-state.edu/~pogge/Ast162/Unit2/structure.html> [consulta: 15-10-2006].
- Pollock, A. M. T., Corcoran, M. F., Stevens, I.R. e Williams, P. M. (2005), *Bulk velocities, chemical composition, and ionization structure of the X-ray shocks in WR 140 near periastron as revealed by the CHANDRA gratings*. *ApJ*, **629**, 482–498.
- Polyakhova, E. N. (1994), *A Two-Body Variable-Mass Problem in Celestial Mechanics: The Current State*. *ARep*, **71**(2), 321–331.
- Popper, D. M. (1980), *Stellar Masses*. *ARA&A*, **18**, 115–164.

- Poveda, A., Ruiz, J. e Allen, C. (1967), *Run-away Stars as the Result of the Gravitational Collapse of Proto-stellar Clusters*. BOTT, **4**, 86–90.
- Prieto, C. (1995), *Soluciones analíticas del problema de dos cuerpos con masa lentamente decreciente*. Tese de Doutoramento. Universidade de Santiago.
- Prieto, C. e Docobo, J. A. (1997a), *Analytic solution of the two-body problem with slowly decreasing mass*. A&A, **318**, 657–661.
- (1997b), *On the Two-body Problem with Slowly Decreasing Mass*. CeMDA, **68**(1), 53–62.
- Radzievskii, V. V. e Gel'fgat B. E. (1957), *The restricted problem of two bodies of variable mass*. AZh, **34**, 568–573.
- Razbitnaya, E. P. (1985), *The problem of two bodies with variable masses: classification of different cases*. SvA, **29**(6), 684–687.
- Regös, E., Bailey, V. C. e Mardling, R. (2005), *Mass transfer in eccentric binary stars*. MNRAS, **358**, 544–550.
- Reimers, D. (1975), *Circumstellar absorption lines and mass loss from red giants*. MSRSL, **8**, 369–382.
- Ribera, J. (1981), *Aplicación de los grupos de Lie de transformaciones a la integración de sistemas diferenciales perturbados*. Tese de Doutoramento. Universidad de Zaragoza.
- Richardson, D. L., e Kelly, T. J. (1988), *Two-body motion in the post-Newtonian approximation*. CeM, **43**, 193–210.
- Rodríguez, A. e Gallardo, T. (2005), *The dynamics of the HD 12661 extrasolar planetary system*. ApJ, **628**, 1006–1013.
- Ruymaekers, E. (1992), *Effects of dynamics tides on secular variations of orbital elements in close binary systems*. A&A, **259**, 349–358.
- Saari, D. G. (1977), *On Newtonian Cosmology with a Varying Gravitational Constant*. CeM, **16**, 407–409.

- Savedoff, M. P. e Vila, S. (1964), *Dynamic effects of variable G or variable mass*. AJ, **69**, 242–245.
- Schatzman, E. L. e Praderie, F. (1993), *The Stars*. Springer–Verlag, Berlim.
- Schoeller, M., Balega, I. I., Balega, Y. Y., Hofmann, K.-H., Reinheimer, T. e Weigelt, G. (1998), *Diffraction-limited speckle masking interferometry of binary stars with the SAO 6-m telescope*. AstL, **24**(3), 283–287.
- Schröder, K.-P. e Cuntz, M. (2005), *A New Version of Reimers' Law of Mass Loss Based on a Physical Approach*. ApJ, **630**, L73–L76.
- Setia Gunawan, D. Y. A., van der Hucht, K. A., Henrichs, H. F., Kaper, L., Stickland, D. J. e Wamsteker, W. (2001), *Multi-frequency variations of the Wolf-Rayet system HD193793 (WC7pd+O4-5) III. IUE observations*. A&A, **376**, 460–475.
- Shrivastava, A. K. e Ishwar, B. (1983), *Equations of motion of the restricted problem of three bodies with variable mass*. CeM, **30**, 323–328.
- Smith, N. e Morse, J. A. (2004), *Nitrogen and oxygen abundance variations in the outer ejecta of  $\eta$  Carinae: evidence for recent chemical enrichment*. ApJ, **605**, 854–863.
- Soffel, M., Wirrer, R., Schastok, J., Ruder, H. e Schneider, M. (1988), *Relativistic effects in the motion of artificial satellites: the oblateness of the central body I*. CeM, **42**, 81–89.
- Soker, N. (2000), *Eccentric orbits of close companions to asymptotic giant branch stars*. A&A, **357**, 557–560.
- (2001), *The departure of  $\eta$  Carinae from axisymmetry and the binary hypothesis*. MNRAS, **325**(2), 584–588.
- (2003), *Accretion-induced collimated fast wind model for  $\eta$  Carinae*. ApJ, **597**, 513–517.

- 
- (2005a), *The binarity of  $\eta$  Carinae and its similarity to related astrophysical objects*. *ApJ*, **619**, 1064–1071.
- (2005b), *Accretion by the secondary in  $\eta$  Carinae during the spectroscopic event. I. Flow parameters*. *ApJ*, **635**, 540–546.
- Stevens, I. R., Blondin, J. M. e Pollock, A. M. T. (1992), *Colliding winds from early-type stars in binary systems*. *ApJ*, **386**, 265–287.
- Stiefel, E. L. e Scheifele, G. (1971), *Linear and Regular Celestial Mechanics*. Springer–Verlag, Berlim.
- Strömgen, E. (1903), *Ueber die Bedeutung kleiner Massenänderungen für die Newtonsche Centralbewegung*. *AN*, **3897**, 129–136.
- Şelaru, D. e Cucu-Dumistrescu, C. (1992), *On a two-body problem with periodically changing equivalent gravitational parameter*. *AN*, **313**(4), 257–263.
- Takeda, G. e Rasio, F. A. (2005), *High orbital eccentricities of extrasolar planets induced by the Kozai mechanism*. *ApJ*, **627**, 1001–1010.
- (2006), *Eccentricities of Planets in Binary Systems*. *Ap&SS*, 19T.
- Tamazian, V. S. (2004), *Orbit of T Tau Ba-Bb and Mass Estimate for Its Infrared Companion*. *AJ*, **127**, 2378–2381.
- Tamazian, V. S., Docobo, J. A., White, R. J. e Woitas, J. (2002), *Preliminary Orbits and System Masses for Five Binary T Tauri Stars*. *ApJ*, **578**, 925–934.
- Torge, W. (2001), *Geodesy* (3<sup>a</sup> ed.). Walter de Gruyter, Berlim.
- Torres, G. (2006), *The planet host star  $\gamma$  Cephei: physical properties, the binary orbit, and the mass of the substellar companion*. arXiv:astro-ph/0609638 v1 (22/09/2006).
- Tremaine, S. e Zakamska, N. L. (2003), *Extrasolar Planet Orbits and Eccentricities*. Em *The Search for Other Worlds*, Eds. S.S. Holt e D. Deming. AIPCP, **713**, 243.

- Tuthill, P. G., Monnier, J. D. e Danchi, W. C. (1999), *A dusty pinwheel nebula around the massive star WR104*. *Nature*, **398**, 487–489.
- Tuthill, P., Monnier, J., Tanner, A., Figer, D., Ghez, A. e Danchi, W. (2006), *Pinwheels in the Quintuplet Cluster*. *Science*, **313**, 935.
- Unsöld, A. e Baschek, B. (2001), *The New Cosmos*. Springer, Heidelberg.
- Usov, V. V. (1995), *Hydrodynamics and high-energy physics of Wolf-Rayet colliding winds*. Em *IAU Symp. 163, Wolf-Rayet Stars: Binaries, Colliding Winds, Evolution*, Eds. van der Hucht e P. M. Williams, 495–503, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Valls-Gabaud, D. (1988), *Evidence for mass loss in binary visual stars*. *Ap&SS*, **142**, 289–304.
- Valtonen, M. J. (1996), *Triple black hole systems formed in mergers of galaxies*. *MNRAS*, **278**, 186–190.
- Valtonen, M. J., Mikkola, S. e Pietilä, H. (1995), *Burrau's three-body problem in the post-Newtonian approximation*. *MNRAS*, **273**, 751–754.
- Valtonen, M. e Karttunen, H. (2006), *The Three-Body Problem*. Cambridge University Press, Nova Iorque.
- Van der Laan, L. e Verhulst, F. (1972), *The transition from elliptic to hiperbolic orbits in the two-body problem by slow loss of mass*. *CeM*, **6**, 343–351.
- Varadi, F. (1985), *Two-Parameter Lie Transforms*. *CeM*, **36(2)**, 133–142.
- Verbunt, F. e Phinney, E. S. (1995), *Tidal circularization and the eccentricity of binaries containing giant stars*. *A&A*, **296**, 709–721.
- Verhulst, F. (1969a), *Two-Body Problem with Decreasing Mass: The Autonomous Case*. *BAN*, **10**, 215–221.
- (1969b), *Some Nonlinear Problems in Celestial Mechanics*. *Bull. 5<sup>th</sup> ICNO Conference*, Kiev, 158–168.

- (1975), *Asymptotic expansions in the perturbed two-Body problem with application to systems with variable mass*. *CeM*, **11**, 95–129.
- Verhulst, F. e Eckhaus, W. (1970), *Two-body problem with slowly decreasing mass*. *IJNLM*, **5**, 617–624.
- Verrier, P. E. e Evans, N. W. (2006), *Planets and asteroids in the  $\gamma$  Cephei system*. *MNRAS*, **368**, 1599–1608.
- Vink, J. S. e de Koter, A. (2002), *Predictions of variable mass loss for Luminous Blue Variables*. *A&A*, **393**, 543–553.
- Vinti, J. P. (1974), *Classical solution of the two-body problem if the gravitational constant diminishes inversely with the age of the Universe*. *MNRAS*, **169**, 417–427.
- (1977), *Newtonian cosmology with a varying gravitational constant*. *CeM*, **16**, 391–406.
- Wilkin, F. P. (1996), *Exact analytic solutions for stellar wind bow shocks*. *ApJ*, **459**, L31–L34.
- Woitas, J., Tamazian, V. S., Docobo, J. A. e Leinert, Ch. (2003), *Visual orbit for the low-mass binary Gliese 22 AC from speckle interferometry*. *A&A*, **406**, 293–298.
- Wood, B. E., Müller, H.-R., Zank, G. P. e Linsky, J. L. (2002), *Measured mass-loss rates of solar-like stars as a function of age and activity*. *ApJ*, **574**, 412–425.
- Zahn, J.-P. (1977), *Tidal friction in close binary stars*. *A&A*, **57**(3), 383–394.
- (1989), *Tidal evolution of close binary stars. I - Revisiting the theory of the equilibrium tide*. *A&A*, **220**(1-2), 112–116.
- Zahn, J.-P. e Bouchet, L. (1989), *Tidal evolution of close binary stars. II - Orbital circularization of late-type binaries*. *A&A*, **223**(1-2), 112–118.

Zakamska, N. L. e Tremaine, S. (2004), *Excitation and propagation of eccentricity disturbances in planetary systems*. *AJ*, **128**, 869–877.

# Acrónimos das publicações

A&A	Astronomy & Astrophysics
A&AS	Astronomy & Astrophysics Supplement Series
AcA	Acta Astronomica
AIPCP	The American Institute of Physics Conference Proceedings
AJ	The Astronomical Journal
AN	Astronomische Nachrichten
AM	Annals of Mathematics
AnP	Annalen der Physik
ApJ	The Astrophysical Journal
ApJL	The Astrophysical Journal Letters
ApJS	The Astrophysical Journal Supplement Series
Ap&SS	Astrophysics and Space Science
ARA&A	Annual Review of Astronomy and Astrophysics
ARep	Astronomy Reports (Russo: AZh)
ASPCS	Astronomical Society of the Pacific Conference Series
AstL	Astronomy Letters (Russo: PAZh)
AZh	Astronomicheskii Zhurnal (Inglês: ARep)
BAAS	Bulletin of the American Astronomical Society
BAN	Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands
BARB	Bulletin de l'Academie Royale de Belgique
BOTT	Boletín de los Observatorios de Tonantzintla y Tacubaya
CeM	Celestial Mechanics

---

CeMDA	Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy
Chaos	Chaos
CJM	Canadian Journal of Mathematics
CRHSAS	Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences
CT	Ciel et Terre
EM&P	Earth, Moon, and Planets
IAUDS	Information Circular Double Star Commission International Astronomical Union
Icarus	Icarus
IGN	Instituto Geográfico Nacional
IJNLM	International Journal of Non-Linear Mechanics
LRSFMN	Accademia Nazionale Lincei Rendiconti Classe Scienze Fisiche Matematiche e Naturali
MSRSL	Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège
MmSAI	Memorie della Società Astronomica Italiana
MNRAS	Monthly Notices of the Royal Astronomical Society
MRACZ	Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza
MSMGG	Monografías del Seminario Matemático "García de Galdeano"
Nature	Nature
PASJ	Publications of the Astronomical Society of Japan
PASP	Publications of the Astronomical Society of the Pacific
PAZh	Pis'ma v Astronomicheskii Zhurnal (Inglês: AstL)
PhLA	Physics Letters A
PhRvD	Physical Review D
P&SS	Planetary Space Science
POBeo	Publications of the Astronomical Observatory of Belgrade
POPal	Pubblicazioni dell'Osservatorio Astronomico di Palermo
PRSL	Proceedings of the Royal Society of London
RMxAA	Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica
RMxAC	Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica (SC)
Science	Science

---

SSRv	Space Science Reviews
SvA	Soviet Astronomy (novo título: ARep)
SvAL	Soviet Astronomy Letters (novo título: AstL)
ZA	Zeitschrift für Astrophysik



# Índice

- álgebras de Lie
  - deformações, 63
- época de passagem pelo periastro,
  - 50, 142–144, 214
- órbitas
  - co-planares, 213
  - colisões de, 55
  - equatoriais, 55
  - osculatrizes, 73, 74
  - retilíneas, 55
- ângulo
  - de posição, 186
  - do nodo, 56, 140
    - ascendente, 55, 186
    - variações, 142
- achatamento polar, 54, 62, 69, 142
- anomalia
  - excêntrica, 11, 76, 130, 142
  - média, 56, 138
    - eliminação, 128
  - tipo excêntrica, 84, 85
  - tipo verdadeira, 84
  - verdadeira, 56, 79, 114, 130, 142,
    - 208, 214, 225
- argumento
  - da latitude, 54, 55, 227
  - do periastro, 56, 114, 139, 142
    - aumento secular, 77, 78, 80, 81
    - constante, 79, 81, 82
    - variações, 142, 151, 225
- buracos negros, 241
- campo escalar, 98
- centro de massas, 35, 55, 63, 161, 163,
  - 177, 206, 210, 211
  - velocidade do, 6
- co-latitude, 62
- colchetes de Poisson, 96
- constante gravitacional, 2, 37, 115,
  - 143, 162, 206
- constantes do movimento, 70, 141
- coordenadas
  - cartesianas retangulares, 55
  - de Jacobi, 161, 170
  - em cadeia baricêntrica, 161
- coroa, 17, 22
- cromosfera
  - temperatura da, 17
- diagrama
  - de Hertzsprung–Russell, 7, 27,
    - 31, 43, 46, 238
  - de hierarquias, 185

- de massa–luminosidade, 39
- difeomorfismo, 94, 226
- disco de acreção, 27–30, 35, 54
- distância
  - angular, 186
  - apocêntrica, 117
    - variações, 122, 228
  - pericêntrica, 117, 161, 213
    - variações, 122, 228
  - radial, 55
- efeito
  - de aproximações mútuas, 169, 188
  - de proximidade, 50
  - periastro, 27, 48–50, 53, 57–59, 82, 160, 194, 196, 213, 224–226, 233, 240
    - amortecimento do, 122
    - generalizado, 169, 188
    - hipótese, 57
    - inverso, 124, 205
    - perturbações por, 57, 115, 117
    - reforço, 190, 192, 232
  - relativista, 142
- efemérides
  - cálculo de, 140
- elementos orbitais, 20, 115, 122, 140, 177, 183, 186, 195, 214
  - cálculo de, 141, 185, 186
  - evolução, 14, 51, 59, 82, 116, 143, 150, 170, 214, 239
- osculadores, 11
  - variações, 15, 72, 75, 76, 82, 89, 115, 122, 124, 143, 145, 195, 222, 227, 229, 239
    - periódicas, 144, 226
    - seculares, 59, 77, 79, 81, 91, 116, 123, 143, 144, 149, 160, 163, 169, 176, 181, 196, 215, 225, 230
- energia, 116
  - conservação da, 27
  - variação da, 15
- equação
  - de Delaunay, 86
  - de Hamilton–Jacobi, 56
  - de Jacobi, 14
  - de Kepler, 132
  - de Laplace, 61
  - de Meščerskij, 13
  - de uma cônica, 73
- equações
  - canônicas do movimento, 88, 114, 138
    - de Gauss, 72, 239
    - de Hamilton, 97, 138
    - de Lagrange, 11, 72, 75, 77, 82, 89, 225
    - de Newton, 63
  - do movimento, 11
  - EIH, 63
  - homológicas, 104, 107, 129
- escala de tempo nuclear, 45
- escurecimento gravitacional, 19
- espaço de fases, 13, 63, 83, 96

- ampliado, 13
- estabilidade
- critérios de, 51, 162, 216, 231, 232, 240
  - Aarseth–Mardling, 167
  - Eggleton–Kiseleva, 166
  - Graziani–Black, 165
  - Harrington, 164
- Indicadores Rápidos de Lyapunov (FLI), 159
- intervalos de, 168, 232
- mapas de, 176, 179, 189, 216, 232, 233, 236, 240
- orbital, 150, 216
- sistemas triplos hierarquizados, 150, 240
- colisão, 196
  - escape, 163
  - violação da hierarquia, 163, 196
- tendência, 196, 216, 233
- zonas de habitabilidade, 159, 171
- estrelas
- T–Tauri, 2, 27
    - clássicas, 28
    - de linha fraca, 28
  - AGB, 2, 25, 27
  - anãs castanhas, 154, 205, 213, 216, 235, 240
    - deserto das*, 154
  - astrométricas
    - speckles*, 185
  - binárias, 9, 124
    - com efeito periastro, 113
    - com componente elipsoidal, 54, 61, 69, 124, 143, 144, 225, 239
    - com perda de massa, 144
    - efeitos relativistas, 124, 143, 144, 226, 239
  - desbocadas, 2, 24
  - espectroscópicas, 185
  - gigantes, 49
    - frias, 24
    - RGB, 8
    - vermelhas, 25
  - individuais
    - LBV 1806-20*, 31
    - Sol*, 31
    - η Carinae*, 203
    - λ Tau*, 184
    - ξ Tau*, 184
    - ADS 15971*, 184
    - ADS 16138*, 184
    - ADS 3358*, 184
    - BAG 10 Aa*, 185, 232
    - BU 1099 AB*, 183, 232
    - COU 14*, 30
    - Cúmulo Quíntuplo*, 200
    - Gliese 22*, 184
    - Gliese 795*, 184
    - HZ Her*, 184
    - Sol*, 41
    - VV Ori*, 184
    - WR 104*, 200, 201, 208
    - WR 140*, 34, 200, 208, 213, 235, 240
    - WR 98a*, 200, 201

- 'Homúnculo', 204  
 LBV, 2, 17, 30, 203  
 massivas, 17  
 novas, 23  
     clássicas, 2, 35, 49  
     recorrentes, 36  
 quentes, 20  
 Ramo Horizontal, 25  
 rapidamente rotantes, 17, 54, 61  
 RGB, 172, 173  
     perda de massa, 175  
 RS CVn, 29  
 Sequência Principal, 10, 17, 19,  
     29, 35, 41, 46, 151  
     idade zero da, 47  
 simbióticas, 22  
 supernova, 25  
 tipo Ap, 51  
 tipo solar, 41  
 UV Ceti, 29  
 variáveis, 29, 30  
     eruptivas, 35, 204  
 WR, 2, 8, 17, 20, 31, 32, 201, 205,  
     235, 240  
     sequência evolutiva, 34  
     WR+OB, 200, 201, 205  
 excentricidade, 116  
     *ciclos de Kozai*, 160, 189, 195, 232  
     alta, 27, 49, 57, 154, 200, 203, 213,  
         233  
     aumento secular, 9, 10, 36, 49,  
         51, 59, 77, 79, 80, 82, 117, 160,  
         169, 225, 228  
     mecanismo de, 57, 156, 225  
     circularização, 27, 36, 48, 57, 124,  
         151, 154  
     tempo de, 48, 49  
     constante, 5, 11, 15, 74, 78  
     diminuição secular, 91, 151  
     distribuição, 155, 160, 241  
     variações, 11, 117, 142  
 explosões tipo S Doradus, 31  
 extensão canónica, 55  
 factor de forma dinâmico ( $J_2$ ), 54, 62,  
     70, 72, 125, 226  
 força  
     centrífuga, 19, 20  
     de Coriolis, 19, 20  
     de maré, 27, 36, 48, 57, 61, 151,  
         154, 204  
     dissipação por, 151  
     perturbativa, 6, 11, 12, 14, 72, 75–  
         77  
 fotosfera, 20  
     raio da, 21  
     velocidade de expansão, 50  
 função  
      $\zeta$  de Weierstrass, 160  
     distribuição de massa  $\Gamma$ , 207, 211,  
         216, 234, 236, 240  
     geratriz, 56, 82, 84, 87, 94, 96, 97,  
         100, 108, 129, 132, 136  
     hamiltoniana, 56, 69, 71, 82, 83,  
         87, 88, 95, 113, 125  
     termos seculares, 142

- transformada, 97, 102, 131
- homogénea, 98
- lagrangiana, 64, 67–69, 226
- de Schwarzschild, 68
- princípio variacional, 64
- perturbadora, 56
- polilogarítmica, 241
- resto, 87, 88, 99, 103
- fusão nuclear, 46
- cadeia pp, 46
- ciclo CNO, 46
- energia, 46
- gravidade superficial, 172
- grupo de Lie, 96
- hipótese de Dirac, 2, 37
- inclinação, 145, 159
- crítica, 145
- mútua, 160, 168
- ortogonal, 164
- variações, 192
- interferometria *speckle*, 186
- intervalo espaço-temporal, 64
- lóbulo de Roche, 26, 27, 29
- transbordamento, 27
- lei
- das áreas, 6
- de ganho de massa, 207, 236
- de Jeans, 6, 7, 10–12, 14, 39–41, 45, 59, 76, 112, 116, 126, 222, 223, 236, 240
- reinterpretação, 7, 38, 43–47, 223, 238
- de Martin, 10, 49
- de Meščerskij, 6, 10, 15
- conjunta, 5
- primeira, 4, 7
- segunda, 5, 7
- de Newton
- da gravitação, 9
- segunda, 14
- de perda de massa, 6
- com efeito periastro, 59
- com efeito periastro generalizado, 169, 176, 239
- dependente da distância, 10, 49, 51, 75, 113, 225
- dependente da distância e do momento angular, 59
- exponencial, 7
- linear, 7, 12
- outras, 7, 9, 13
- sistemas triplos, 169
- de Reimers, 8, 172, 175
- de Schröder–Cuntz, 172
- limite de Rayleigh, 187
- linha
- das apsides, 77, 81
- dos nodos, 187
- luminosidade, 7, 25, 31, 38, 39, 41–43, 45, 47, 172
- método

- N*-paramétrico, 93, 95, 100, 227, 239, 241  
 aplicação, 102, 107, 125, 142, 229  
 esquema, 146  
 de Runge–Kutta, 11, 50, 115, 170, 227, 239  
 de Abad–Ribera (bipar.), 14  
 de Docobo, 186  
 de Docobo–Andrade, 186, 232  
 de Duboshin, 8  
 de Hadjidemetriou, 11  
 de Hori–Deprit, 14, 226, 239  
 de mínimos quadrados, 47  
 de perturbações, 15  
 de promédios, 12  
 de Radzievskii–Gel’fgat, 10  
 de variáveis universais, 12  
 quase-invariante, 12
- massa  
 acreção de, 2, 9, 27, 204, 241  
 estelar, 7, 25, 27, 29, 31, 32, 34, 38–43, 45, 46, 50, 172, 222, 223  
 ganho de, 211, 216, 235, 240  
   no apoastro, 204  
 perda de, 9, 16, 117, 143, 150, 155, 203, 222, 235  
 aumento, 57  
 constante, 45  
 instabilidades, 196  
 isotrópica, 6, 11, 75, 76, 115, 206, 228  
 mecanismos, 17, 22  
 não esfericidade, 17  
 não isotrópica, 241  
 por efeito periastro, 60, 115, 117, 228  
 ritmo, 41, 44  
 perda–ganho de, 205, 214  
 transferência de, 15, 26, 27, 29, 33, 241
- Mathematica<sup>®</sup>, 102, 114, 142, 243  
 matriz simpléctica, 95  
 metalicidade, 174  
 momento angular, 59, 116, 225  
   componente polar do, 55, 56  
   conservação do, 27  
   constante, 89  
   módulo do, 55, 56  
   perda do, 16, 117  
   variação do, 15
- objectos Herbig–Haro, 29  
 operador de Lie, 101
- parâmetro  
   de amortecimento  $\beta$ , 123  
   de ganho de massa  $\delta$ , 211, 236  
   de perda de massa, 8, 115  
    $\alpha$ , 7, 9, 11, 41, 44–47, 49, 59, 223  
    $\alpha_i$ , 170  
    $\beta$ , 54, 57, 59, 76, 89, 225  
    $\beta_{ij}$ , 170  
    $\gamma$ , 44–49, 223  
   gravitacional, 4, 10, 13, 37
- parametrização

- de Nieuwenhuijzen–de Jager, 7, 46
- de Nugis–Lamers, 8
- período, 33, 35, 115, 116, 154, 160, 184, 201, 204, 214
- variações, 121, 122, 124
- periastro, 15, 50, 53, 200, 202, 204, 205, 209–211, 214, 216, 225
- perturbações
- outras, 72, 82
  - esquema de Hadjidemetriou, 72
  - na direcção da velocidade, 72
- planetas
- Júpiteres quentes*, 154
  - definição, 153
  - extra-solares, 152, 154
  - órbita tipo L, 158
  - órbita tipo P, 158–160, 170, 179, 232
  - órbita tipo S, 158–160, 170, 232
  - altas excentricidades, 155, 241
  - perturbações seculares, 159
  - satélites, 152
  - velocidades radiais, 152, 159
- gigantes, 205
- individuais
- Mercúrio*, 142, 226
  - sistema  $\gamma$  *Cephei*, 159, 171
  - sistema GJ 86, 159
  - sistema HD 188753, 159
  - sistema HD 202206, 159
  - sistema PSR B1620-26, 159
  - velocidades radiais, 156
- polinómios de Legendre, 62, 162
- ponto de Lagrange
- $L_1$ , 15, 29
  - $L_2$ , 16
- potencial gravitacional, 54, 69
- efeitos relativistas, 63
  - esfera homogénea, 62
  - harmónicos esféricos, 54, 61, 226
  - coeficientes, 62
  - zonais, 62
- termos relativistas, 54
- problema
- G variável, 4, 37, 38
  - de dois corpos
    - com massa variável, 1, 3, 5, 11, 75, 222
    - confinado, 13
    - função hamiltoniana, 56
    - generalizado, 13
    - perturbado, 69  - de Gyldén, 4, 6
  - de Gyldén–Meščerskij, 2, 3, 6, 13, 50, 72, 75, 77, 117, 225
  - de Gyldén–Meščerskij perturbado, 53, 54, 112, 124, 223, 224, 227, 239
  - formulação hamiltoniana, 60, 124, 224, 226, 228
  - integração numérica, 55, 56, 58, 227
  - por efeito periaastro, 58, 60, 117, 206

- de Kepler, 5, 56, 89, 117  
 perturbado, 72
- de massa variável, 1–3  
 classificação de Razbitnaya, 13  
 energia, 14  
 focagem de Hadjidemetriou, 11, 225, 239  
 formulação de Duboshin, 8  
 formulação hamiltoniana, 12, 55  
 integração numérica, 114  
 momento de inércia, 14  
 regularização, 12  
 rigorosidade, 14  
 tratamento analítico, 113
- de Meščerskij–Civita, 9
- de três corpos, 150  
 baricentro, 161  
 com efeito periastro, 171  
 formulação de Jacobi, 161, 205  
 integração numérica, 170  
 restringido, 15
- lunar, 151
- quase-kepleriano, 13
- quadraturas, 84–87
- raio  
 equatorial médio, 62  
 estelar, 7, 25, 31, 47, 50, 172
- relação de massa–luminosidade, 7, 41–43, 45, 223
- séries
- de Lie, 13
- de Poisson, 12
- de Taylor, 126
- satélite artificial, 72  
 ‘Problema Principal’, 63  
 atrito atmosférico, 60  
 semieixo maior, 116, 161, 214  
 aumento secular, 9, 11, 77–79, 81, 118, 124, 169, 225, 232  
 constante, 74  
 diminuição secular, 91, 119, 151, 169, 228  
 variações, 11, 15, 118, 142, 192
- simetria  
 axial, 70, 136  
 equatorial, 62, 63, 226  
 esférica, 61
- sistemas  
 binários  
 colisão de, 192  
 eclipsantes, 151  
 fechados, 151  
 simbióticos, 200
- multiplanetários, 154
- triplos hierarquizados, 149, 154  
 binários+planeta, 150, 205  
 critérios de estabilidade, 162  
 efeitos seculares, 151, 163  
 estelares, 150  
 formulação de Jacobi, 161  
 perda de massa, 150
- temperatura efectiva, 172

- teorema  
  de Armellini, 9  
  de Berković, 10
- teoria  
  da evolução estelar da sequência gigante-anã, 38  
  da gravitação  
    newtoniana, 38  
    tensorial, 38  
  da gravitação  
    com dois tempos, 37  
    newtoniana, 2  
  da relatividade  
    aproximação pós-newtoniana, 54, 63–65, 69, 124, 226  
    discrepâncias, 151  
    métrica, 65  
    precessão relativista, 151, 160  
    restrita, 39  
    tensor de Minkowski, 65  
    tensor de Riemann, 65, 66  
  de Eddington, 7, 38–40, 222
- transformação  
  canónica, 83, 96, 225  
  de contacto, 56  
  infinitesimal, 128, 142  
  não conservativa, 99  
  de Galileu, 14  
  de Lie, 50, 60, 94, 109, 113, 132, 226, 239  
  de Mathieu, 55  
  de Meščerskij, 5  
  tipo Delaunay, 13
- variáveis  
  acção-ângulo, 69  
  canónicas, 13, 55  
  conjugadas, 69  
  de Delaunay, 12, 56, 82, 83, 88, 113, 140, 225  
  generalizadas, 87  
  de Delaunay-Gyldén, 84  
  de Hill-Whittaker, 55  
  de Jacobi, 161, 232  
  de Levi-Civita, 12  
  de Lissajous, 13  
  polares-nodais, 55, 60, 82, 83, 113–115, 225, 227  
  tipo Delaunay-Scheifele, 13  
  universais, 12
- velocidade  
  angular, 54  
  da luz, 39, 54  
  da partícula ejectada, 11, 14  
  orbital, 25, 54  
  radial, 55  
  relativa, 6
- ventos estelares, 2, 16, 57, 199  
  cauda de pó, 201  
  cone de choque, 22  
  de coroa, 22  
  de estrelas frias, 17  
  de estrelas quentes, 18, 22  
  de estrelas rapidamente rotantes, 19  
  de gigantes, 22  
  de pulsantes frias, 22

---

- de sistemas binários, 20
- de supergigantes frias, 22
- em colisão, 20–22, 34, 200, 202,  
203, 207, 208, 233, 240
- esfericamente simétricos, 17
- estrutura, 207
  - factores de forma, 208, 210, 216,  
233, 236, 240
  - parâmetros, 209, 234
- fluxo
  - adiabático, 22
  - isotermo, 22
- guiados
  - por linhas, 22
  - por ondas Alfvén, 22
  - por ondas sónicas, 22
  - por pó, 22
  - por pulsações, 22
- híbridos, 17
- não esféricos, 24
- no periastro, 200
- nuvem de pó, 205
- produtores de pó, 203
- rotantes magnéticos, 22
- superfície de choque, 22
- tipo solar, 17, 22
- variáveis, 24
- velocidade, 16, 20, 22, 25
  - terminal, 18, 22, 23, 32

